17 aprile 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di venerdì 17 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Nelle due ore di lezione (virtuale) del martedì prima di Pasqua abbiamo visto che nella logica dei predicati le proposizioni del linguaggio comune oggetti del nostro studio vengono “tradotte” in modo molto più dettagliato di quello che fa la logica proposizionale.

Con quello che ho chiamato “linguaggio descrittivo di primo livello” abbiamo trovato un modo di individuare gli elementi di un insieme sia indicandoli direttamente (come *variabili individuali* o come *costanti*: su questo torneremo fra pochissimo) sia descrivendoli in modo più elaborato tramite funzioni, funzioni di funzioni, funzioni di funzioni di funzioni, ecc. ecc. In realtà, limitandoci per ora all’individuazione degli elmenti sui quali poi vengono espresse le proposizioni oggetto dello studio logico, il procedimento è il seguente:

(i) abbiamo un enunciato nel quale compaiono certi elementi di un insieme; ad esempio: “3 è dispari”, “il successivo di 3 è pari”, “il successivo di 5 è uguale a 4”.

(ii) si indicano gli elementi dell’insieme sul quale stiamo lavorando come variabili individuali, oppure come simboli di costante, oppure mediante variabili individuali (e/o simboli di costante) e simboli di funzione; più in generale, si indicano tali elementi come *termini* (riguardatevi la definizione di *termine*!) del linguaggio di logica dei predicati che ci sembra utile usare. Nei casi di cui sopra potremmo scrivere “x è dispari”, con x variabile individuale, oppure “c è dispari” con c simbolo di costante, oppure “$f(x)$ è uguale a y” con x e y variabili individuali, oppure “$f(c)$ è uguale a y” con c simbolo di costante e y variabile individuale, oppure… sbizzarritevi!

(iii) si prende atto che l’insieme $\mathbb{N}$ con la funzione “successivo” non è l’unica struttura adeguata al linguaggio che abbiamo scelto; ad esempio, potremmo prendere $\mathbb{R}$ come insieme, e la funzione “doppio di” al posto di “successivo”. Ma ci sono infinite altre possibilità! (Agh! Infinite… non è una buona premessa per quello che vogliamo fare… eppure… abbiate fiducia!)

Se poi vogliamo (e, naturalmente, ***dobbiamo***, altrimenti non concludiamo niente!) esprimere anche i predicati (“pari”, “dispari”, “uguale”, negli esempi precedenti) dobbiamo arricchire il nostro linguaggio con ***simboli di predicato***. Se introduciamo due simboli di predicato unari (cioè di *arietà* 1) P e D, e un simbolo di predicato binario (cioè di *arietà* 2) U, possiamo scrivere

$$\mathrm{D}(c), \quad \mathrm{P}(f(x)), \quad \mathrm{U}(f(c),d)$$

e se ***ad esempio*** scegliamo come struttura l’insieme $\mathbb{N}$ con la funzione *successivo*, i predicati unari *pari* e *dispari* e il predicato binario *uguale*, abbiamo che

– $\mathrm{D}(c)$ è una formula atomica chiusa che risulta ***vera*** nell’interpretazione che al simbolo di predicato D associa il predicato *dispari* e al simbolo di costante c associa il numero 3; ma risulta ***falsa*** nell’interpretazione che al simbolo di predicato D associa ancora il predicato *dispari* e al simbolo di costante c associa il numero 4.

– $\mathrm{P}(f(x))$ è una formula atomica aperta che risulta ***vera*** nell’interpretazione che al simbolo di predicato P associa il predicato *dispari*, al simbolo di funzione f associa la funzione successivo e se inoltre scegliamo una assegnazione di valore che alla variabile individuale x associa il numero 3; ma risulta ***falsa*** nella stessa interpretazione se invece scegliamo una assegnazione di valore che alla variabile individuale x associa il numero 3.

– $\mathrm{U}(f(c),d)$ è una formula atomica chiusa che risulta ***vera*** nell’interpretazione che al simbolo di predicato U associa il predicato “*uguale a*”, al simbolo di funzione f associa la funzione *successivo*, al simbolo di costante c associa il numero 3 e al simbolo di costante d associa il numero 4; ma risulta ***falsa*** nell’interpretazione che al simbolo di predicato U associa il predicato “*uguale a*”, al simbolo di funzione f associa la funzione *successivo*, al simbolo di costante c associa il numero 3 e al simbolo di costante d associa il numero 2.

Tutto apparentemente complicatissimo a scriversi ma in realtà molto naturale: i “simboli” di funzione e di predicato simboleggiano (appunto!) funzioni e predicati. Il punto chiave da capire è che (benché noi partiamo da un preciso specifico enunciato della lingua corrente, che consideriamo in una specifica struttura con funzioni e predicati) la formula che lo esprime si può poi interpretare in altre strutture (con l’unico essenziale vincolo che sia dello stesso tipo ([1])). Ad esempio, scegliendo come struttura l’insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con la funzione “doppio”, i predicati unari “positivo” e “negativo” e il predicato binario “uguale a”,

– $\mathrm{D}(c)$ è una formula atomica chiusa che risulta ***vera*** nell’interpretazione che al simbolo di predicato D associa il predicato *negativo* e al simbolo di costante c associa il numero $-\sqrt{2}$; ma risulta ***falsa*** nell’interpretazione che al simbolo di predicato D associa ancora il predicato *negativo* e al simbolo di costante c associa il numero π.

[1] … ma è un vero vincolo? Quel che importa è che nella nuova struttura ci siano tutte le funzioni e i predicati che ci servono per interpretare i nostri simboli, se poi ce ne sono anche altre non è un gran male! Teniamo presente questo fatto, più avanti ci tornerà utile…

– P($f(x)$) è una formula atomica aperta che risulta ***vera*** nell'interpretazione che al simbolo di predicato P associa il predicato *positivo*, al simbolo di funzione f associa la funzione *doppio* e se inoltre scegliamo una assegnazione di valore che alla variabile individuale x associa il numero $\frac{\pi}{3}$; ma risulta ***falsa*** nella stessa interpretazione se invece scegliamo una assegnazione di valore che alla variabile individuale x associa il numero $-\pi$.

– U($f(c)$,d) è una formula atomica chiusa che risulta ***vera*** nell'interpretazione che al simbolo di predicato U associa il predicato "*uguale a*", al simbolo di funzione f associa la funzione *doppio*, al simbolo di costante c associa il numero $\frac{5}{6}$ e al simbolo di costante d associa il numero $\frac{5}{3}$; ma risulta ***falsa*** nell'interpretazione che al simbolo di predicato U associa il predicato "*uguale a*", al simbolo di funzione f associa la funzione *doppio*, al simbolo di costante c associa il numero $\frac{5}{3}$ e al simbolo di costante d associa il numero 5.

Insomma, mentre nella logica proposizionale alla formule atomiche si assegnava un valore tramite una valutazione di verità (cioè, siccome le formule atomiche altro non sono in quel caso che le variabili proposizionali, si assegnava un valore a capriccio nostro), nella logica dei predicati per assegnare una valore a una formula atomica servono: una struttura adeguata al linguaggio, una interpretazione e (se la formula non è chiusa) una assegnazione di valore alle variabili individuali.

E qui devo cercare di chiarire un punto che potrebbe risultare misterioso. Cioè, la domanda che a me sembra dovrebbe sorgere spontaneamente è: se 'ste variabili individuali rompono tanto i cabasisi da dover richiedere oltre all'interpretazione una cosa extra, cioè una assegnazione di valore ad esse, perché le introduciamo nel linguaggio? Non potremmo limitarci ad usare i simboli di costante?

La risposta sta, sostanzialmente, proprio nelle parti di enunciato che ci hanno spinto ad introdurre tutto questo ambaradan della "logica dei predicati". Se io dico "5 è dispari", mi riferisco al numero 5 e alla sua proprietà di essere dispari; in questo caso, l'uso di un simbolo di costante ha senso. Ma se dico "un numero è dispari" sto sul vago, ed è opportuno in questo caso usare una variabile individuale x, scrivendo "D(x)" (con D simbolo di predicato unario che interpretiamo come "*dispari*"). E infatti, che cosa significa affermare "un numero è dispari"? Niente! Magari ha senso dire "*qualche* numero è dispari" (affermazione ***vera***), ha anche senso dire "*ogni* numero è dispari" (affermazione ***falsa***). Possiamo anche costruire enuinciati più complessi, tipo "per ogni x, il doppio di x è pari" (affermazione ***vera***), "per ogni x, il successivo del doppio di x è pari" (affermazione falsa). Mentre l'affermazione "un numero è dispari" non è né vera né falsa.

E adesso allora possiamo vedere come nella logica dei predicati dalle formule atomiche si possono costruire formule più complesse introducendo, oltre ai connettivi logici che già abbiamo imparato a conoscere nella logica proposizionale, anche dei nuovi simboli che ci permettono di esprimere i concetti di “*qualche*” e “*ogni*” ai quali ho accennato prima.

Ci sarà utile la seguente notazione.

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello, sia $\Sigma =$ (S, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) una struttura adeguata a A e sia data una interpretazione di A su Σ. Sia a una *assegnazione* di valori alle variabili individuali, sia $x_0 \in \mathcal{X}$ e sia $s \in$ S . Si indica con

$$a(x_0 \leftarrow s)$$

l’assegnazione di valori alle variabili individuali per la quale

$$a(x_0 \leftarrow s)(x) := a(x) \text{ se } x \neq x_0, \qquad\qquad a(x_0 \leftarrow s)(x_0) := s\,.$$

Un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello si dice un *alfabeto per la logica dei predicati* se ad esso appartengono, oltre alle variabili individuali, ai simboli di costante, ai simboli di funzione, ai simboli di predicato, alle parentesi e alla virgola anche i simboli “strettamente logici”

(vi) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ detti rispettivamente “*non*”, “*e*”, “*o*”, “*implica*”
e detti complessivamente “*connettivi logici*” (questi già li conosciamo dalla logica proposizionale!);

(vii) $\forall$, $\exists$ detti rispettivamente “*quantificatore universale*” e “*quantificatore esistenziale*” (questi invece costituiscono una novità!) .

Il simbolo $\forall$ si legge “*per ogni*”, mentre il simbolo $\exists$ si legge “*esiste*”

Costituiscono il *tipo* di un alfabeto per la logica dei predicati gli stessi elementi che ne costituiscono il tipo come alfabeto descrittivo del secondo ordine, e quindi tutti i seguenti: il numero dei simboli di costante, il numero dei simboli di funzione con la sequenza delle rispettive arietà, il numero t dei simboli di predicato con la sequenza delle rispettive arietà.

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati. Una parola w su A si dice *formula* di A (o anche *formula ben formata*, abbreviato in *fbf*) se esiste una sequenza finita w_0, w_1, w_2, $\dots$, w_k di parole su A tale che

FBF-PRED.1 $\qquad w = w_k$

e

FBF-PRED.2 $\qquad$ per ogni $h \leq k$ la parola w_h è

– una formula atomica di A

oppure

– della forma $(\neg w_i)$ (e si dice "negazione della formula w_i")

oppure

– della forma $(w_i \wedge w_j)$ (e si dice "congiunzione delle formule w_i e w_j")

oppure

– della forma $(w_i \vee w_j)$ (e si dice "disgiunzione delle formule w_i e w_j")

oppure

– della forma $(w_i \rightarrow w_j)$ (e si dice "implicazione tra le formule w_i e w_j")

oppure

– della forma $(\forall x)(w_i)$ con x variabile individuale di A

oppure

– della forma $(\exists\forall x)(w_i)$ con x variabile individuale di A

con $i, j < h$.

La sequenza finita w_0, w_1, w_2, $\dots$, w_k si dice in questo caso una *costruzione* della formula w.

Il minimo numero naturale k per cui esiste una costruzione w_0, w_1, w_2, $\dots$, w_k della formula w si dice *lunghezza* di w.

L'insieme delle formule costituisce il *linguaggio della logica dei predicati associato all'alfabeto dato*.

Osservazione 3.3.1

Sia w una formula e sia w_0, w_1, w_2, $\dots$, w_k una costruzione di w .

Ogni w_i per $i := 0, \dots, k$ è una formula.

Esempio 3.3.2

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati con variabili x, y, z, simboli di costante c e d, simboli di funzione f, g e h di arietà rispettivamente 1, 2 e 2, e simboli di predicato P, Q e R di arietà rispettivamente $1, 2$ e 3. Sono tre esempi di formule sull'alfabeto A (ciascuno su una diversa riga):

$$((\mathrm{P}(x) \wedge (\forall y)(\mathrm{Q}(x, f(z)))$$
$$((\mathrm{R}(x, y, x) \rightarrow \mathrm{P}(z)) \rightarrow (\exists z)(\mathrm{Q}(x, y) \vee (\neg \mathrm{P}(x))))$$
$$(\forall x)(\exists z)((\neg(\mathrm{P}(y) \wedge \mathrm{Q}(x, x)) \vee (\mathrm{Q}(x, y) \rightarrow \mathrm{R}(y, y, y))))$$

Osservazione 3.3.3

Manterremo la convenzione introdotta con l'osservazione 2.1.6 per limitare l'uso delle parentesi. Vedremo più avanti che sarà possibile adottare anche la convenzione introdotta con l'osservazione 2.3.2

Osservazione 3.3.4 (“Principio di unica lettura delle formule”)

Sia w una formula che non è una formula atomica di A. Per la condizione FBF-PRED.2 c'è un unico modo di interpretare w come negazione di altra formula oppure (ma soltanto se ciò non è possibile) come congiunzione di altre due formule oppure (ma soltanto se le due precedenti interpretazioni non sono possibili) come disgiunzione di altre due formule oppure (ma soltanto se le tre precedenti interpretazioni non sono possibili) come implicazione fra due formule oppure (ma soltanto se le quattro precedenti interpretazioni non sono possibili) come formula preceduta da un quantificatore universale riferito a una certa variabile individuale oppure (ma soltanto se nessuna delle precedenti interpretazioni è possibile) come formula preceduta da un quantificatore esistenziale riferito a una certa variabile individuale.

Adesso dobbiamo chiarire l'uso dei quantificatori, che servono a “tradurre” quelle parti di enunciato che non risultano gestibili con la logica proposizionale. L'idea di fondo è che per assegnare a un enunciato un valore di verità e poi (re –)introdurre i concetti di “conseguenza logica” ed “equivalenza logica” (sulla falsariga di quanto già visto nella logica proposizionale) debba essere sufficiente una interpretazione.

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati, sia x una variabile individuale di A e sia φ una formula su A . Si dice che x *compare* in φ se x è stata usata nella costruzione di almeno un termine in almeno una formula atomica che è stata usata nella costruzione di φ.

Si dice poi che la variabile individuale x *compare libera* oppure *compare vincolata* in φ secondo la seguente definizione:

(i) se φ è una formula atomica, x *compare libera* in φ;

(ii) se φ è ottenuta come negazione di un’altra formula ψ oppure come congiunzione, disgiunzione o implicazione fra due altre formule ψ_1 e ψ_2, le *comparse libere* della x in φ sono tutte e sole le comparse libere della x in ψ oppure in ψ_1 e ψ_2;

(iii) se φ è ottenuta premettendo a un’altra formula ψ uno dei due quantificatori ($\forall x$) o ($\exists x$), ogni comparsa libera della x in ψ diventa una *comparsa vincolata* (da quel quantificatore) della x in φ.

Una formula si dice *aperta* se in essa c’è almeno una variabile individuale che compare libera; si dice invece chiusa se tutte le sue variabili individuali compaiono soltanto vincolate. Si noti che in una formula atomica se compare una variabile individuale essa vi compare certamente libera: dunque questa definizione di “formula aperta” e “formula chiusa” estende quella che abbiamo dato per le formule atomiche nella sez. 3.2 .

Una formula chiusa si dice anche un *enunciato*: come vedremo, ogni interpretazione dell’alfabeto A permette di dare una valutazione di verità a qualunque enunciato, mentre in generale per dare una valutazione di verità ad una formula aperta occorre scegliere non solo un’interpretazione dell’alfabeto A ma anche una assegnazione di valore alle variabili individuali che compaiono libere nella formula.

Esempio 3.4.1

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati con variabili individuali x e y . Nella formula

$$(\forall x)(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{Q}(y)) \vee (\exists y)\mathrm{Q}(x)$$

la viariabile individuale x che compare come argomento del predicato x è vincolata (dal quantificatore universale ($\forall x$)), mentre quella che compare come argomento del predicato Q è libera. La variabile individuale y compare soltanto libera.

Si noti che è il principio di unica lettura (oss. 3.3.4) che consente di decidere se una comparsa di una variabile individuale è libera o vincolata; si noti inoltre che nelle scritture ($\forall x$) e ($\exists y$) anche se compaiono esplicitamente i simboli x e y non si parla di “comparsa” delle variabili individuali x e y (tali scritture servono soltanto a “vincolare” le variabili individuali nella formula a cui vengono premesse).

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati, e sia Σ una struttura adeguata ad A; abbiamo visto che per ogni interpretazione e per ogni assegnazione resta definita una valutazione di verità sulle formule atomiche (che, nel caso delle formule atomiche chiuse, dipende soltanto dall’interpretazione e non dalla particolare assegnazione). Tale valutazione di verità, grazie al “principio di unica lettura” (oss. 3.3.4) si estende facilmente all’insieme di tutte le formule con le stesse regole viste nel punto (iii) del teorema 2.2.1 e con un trattamento particolare per le formule ottenute premettendo un quantificatore universale o un quantificatore esistenziale.

Teorema 3.5.1

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati, e sia $\Sigma = (\mathrm{S}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ una struttura adeguata ad A; per ogni interpretazione i_0 di A su Σ e per ogni assegnazione a_0 sull’insieme $\mathcal{X}$ delle variabili individuali di A, esiste un’unica funzione v dall’insieme delle formule di A nell’insieme $\{0, 1\}$ tale che

(i) per ogni formula atomica α, v coincide con la valutazione di verità di α associata all’interpretazione i_0 sotto l’assegnazione a_0, come definita nella sez. 3.2;

(ii) se la formula φ è della forma $(\neg\psi)$ oppure $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ oppure $(\psi_1 \vee \psi_2)$ oppure $(\psi_1 \to \psi_2)$, si ha rispettivamente

$v(\neg\varphi_1) = 1 - v(\varphi_1)$;

$v(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = min\{v(\varphi_1), v(\varphi_2)\}$, ossia: $v(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 1$ se $v(\varphi_1) = 1$ e $v(\varphi_2) = 1$, $v(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 0$ altrimenti;

$v(\varphi_1 \vee \varphi_2) = max\{v(\varphi_1), v(\varphi_2)\}$, ossia: $v(\varphi_1 \vee \varphi_2) = 0$ se $v(\varphi_1) = 0$ e $v(\varphi_2) = 0$, $v(\varphi_1 \vee \varphi_2) = 1$ altrimenti;

$v(\varphi_1 \to \varphi_2) = 0$ se $v(\varphi_1) = 1$ e $v(\varphi_2) = 0$, $v(\varphi_1 \to \varphi_2) = 1$ altrimenti;

(iii) se la formula φ è della forma $(\forall x)\psi$ oppure $(\exists x)\psi$ (con x variabile individuale dell’alfabeto A), si ha

$$v((\forall x)\psi) := \begin{cases} 1 & \text{se per ogni } s \in \mathrm{S} \text{ si ha } \overline{v}(\psi) = 1 \\ & \text{per la valutazione di verità } \overline{v} \text{ associata all'interpretazione } i_0 \\ & \text{sotto l'assegnazione } a_0(x \leftarrow s) \text{ definita nella sez. 3.2} \\ & \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$v((\exists x)\psi) := \begin{cases} 1 & \text{se esiste un } s \in \mathrm{S} \text{ tale che } \overline{v}(\psi) = 1 \\ & \text{per la valutazione di verità } \overline{v} \text{ associata all'interpretazione } i_0 \\ & \text{sotto l'assegnazione } a_0(x \leftarrow s) \text{ definita nella sez. 3.2} \\ & \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tale funzione v si dice “*valutazione di verità sull’insieme delle formule di* A *associata all’interpretazione* i_0 *e all’assegnazione* a_0”.

Esempio 3.5.2

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati con tre variabili x, y e z, un simbolo di funzione binaria p e un simbolo di predicato binario D. Sia

$$\varphi(x) := (\forall y)(\forall z)(\mathrm{D}(x, p(y, z)) \to (\mathrm{D}(x, y) \vee \mathrm{D}(x, z)) \,.$$

La $\varphi(x)$ è una formula di A con variabile libera x (dunque non è un enunciato!).

Se interpretiamo A nell’insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali associando al simbolo p l’operazione *prodotto* ([2]) e al simbolo D la relazione *divide* (cosicché $\mathrm{D}(x, y)$ significa “x divide y”), la $\varphi(x)$ risulta vera sotto l’assegnazione che alla x associa 1, sotto quella che alla x associa 2 e sotto quella che alla x associa 3, ma non sotto quella che alla x associa 4 (o 15, o 231, o$\ldots$). Ciò si esprime scrivendo che $\varphi(1)$ è vera, $\varphi(2)$ è vera, $\varphi(3)$ è vera, $\varphi(4)$ è falsa, $\varphi(15)$ è falsa, $\varphi(231)$ è falsa$\ldots$

Invece le formule $(\forall x)\varphi(x)$ e $(\exists x)\varphi(x)$ sono formule chiuse, cioè enunciati, e sotto qualsiasi interpretazione possiamo dar loro un valore di verità senza dover scegliere in aggiunta una particolare assegnazione; nell’interpretazione vista sopra, e per le osservazioni fatte nel paragrafo precedente, la $(\forall x)\varphi(x)$ è falsa mentre la $(\exists x)\varphi(x)$ è vera.

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati. Siano Σ una struttura adeguata ad A, i_0 un’interpretazione di A su Σ e a_0 un’assegnazione sull’insieme delle variabili individuali di A. Siano φ una formula di A e v la valutazione di verità associata all’interpretazione i_0 e all’assegnazione a_0.

Se $v(\varphi) = 1$, si dice che “*φ è vera sotto v*”, oppure che “*φ è vera nell’interpretazione i_0 sotto l’assegnazione a_0*”, oppure che “Σ *nell’interpretazione i_0 sotto l’assegnazione a_0 soddisfa φ*” oppure anche che “Σ *nell’interpretazione i_0 sotto l’assegnazione a_0 è un modello per φ*”; scriveremo talvolta

$$\Sigma \models_{i_0,\, a_0} \varphi \,.$$

Se φ è una formula chiusa, $v(\varphi)$ dipende soltanto da i_0 e non dall’assegnazione a_0: in questo caso diremo semplicemente che “*φ è vera nell’interpretazione i_0*”, oppure che “Σ *nell’interpretazione i_0 soddisfa φ*” oppure anche che “Σ *nell’interpretazione i_0 è un modello per φ*”; e scriveremo

$$\Sigma \models_{i_0} \varphi \,.$$

[2] Ricordiamo che ogni operazione in un insieme I è una particolare funzione $\mathrm{I} \times \mathrm{I} \to \mathrm{I}$.

Quando è chiaro quale sia l’interpretazione considerata sulla struttura Σ, con abuso di linguaggio e di scrittura si dice che “*φ è vera in Σ*”, oppure che “*Σ è un modello per φ*”, e si scrive

$$\Sigma \models \varphi \,.$$

Teorema 3.5.3

Siano A un alfabeto per la logica dei predicati e φ una formula di A.

Se $\Sigma = (\mathrm{S}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ è una struttura adeguata per A che è un modello per φ, allora ogni struttura $\Sigma^* = (\mathrm{S}^*, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ con $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{S}^*$ (certamente adeguata per A) è un modello per φ.

Dimostrazione – La stessa interpretazione (ed eventualmente la stessa assegnazione di valore alle variabili libere di φ) che soddisfa φ in Σ soddisfa φ in Σ^* .

Osservazione 3.5.4

Non vale l’analogo del teorema 3.5.3 per l’inclusione opposta tra S e S^*, cioè:

se $\Sigma = (\mathrm{S}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ è una struttura adeguata per A che è un modello per φ, e $\Sigma^* = (\mathrm{S}^*, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ con $\mathrm{S}^* \subseteq \mathrm{S}$ è una struttura adeguata per A, può accadere che φ non sia soddisfacibile in Σ^*.

Ad esempio, sia A un linguaggio senza simboli di costanti o di funzioni e con un solo simbolo di predicato P (binario) e siano $\Sigma := (\mathbb{Z}, \emptyset, \emptyset, \{\overline{\mathrm{P}}\})$ e $\Sigma^* := (\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \{\overline{\mathrm{P}}\})$, dove $\overline{\mathrm{P}}$ è la relazione “essere il successivo di”. La struttura Σ è un modello per la formula φ così definita

$$\varphi := (\forall x)(\exists y)\mathrm{P}(x, y)$$

mentre la struttura Σ^* non lo è (si noti che in entrambi i casi c’è un’unica possibile interpretazione, quella che al simbolo di predicato P associa il predicato $\overline{\mathrm{P}}$).

Adesso dovreste aver capito come si assegna un valore di verità a una qualsiasi formula di un linguaggio della logica dei predicati; ci vuole una struttura adeguata al linguaggio e poi: se la formula è chiusa, basta una interpretazione, se invece la formula è aperta ci vuole anche una assegnazione di valore alle variabili individuali libere. È un meccanismo abbastanza più complesso di quello visto nella logica proposizionale, ma a questo punto (come vedremo nella prossima ora) siamo in grado di recuperare già molti dei risulti visti nella logica proposizionale.