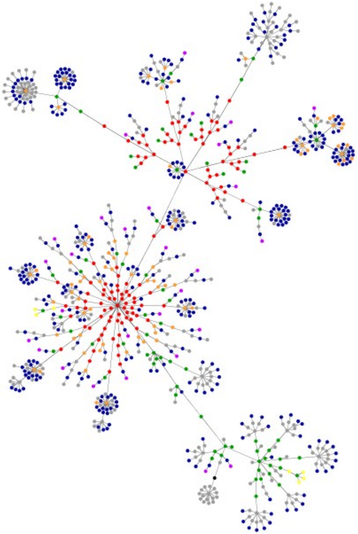
Appunti per Geometria e Algebra Computazionale
2-4. Colorabilità di un grafo
via basi di Groebner

Corso di Laurea in Matematica, Università di Firenze, 2019/20

Giorgio Ottaviani

21 aprile 2020

I grafi sono dappertutto



Il codice sorgente della pagina principale di Wikipedia, visualizzato sotto forma di albero, un caso particolare di grafo.

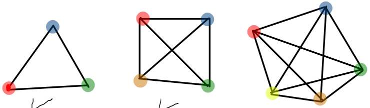
Colorabilità di un grafo

Un grafo $G = (V, E)$ è formato da un insieme finito di vertici V e un insieme di lati E che consistono in coppie non ordinate di vertici. Nel contesto della colorabilità, si considerano solo grafi con lati che uniscono vertici *distinti* (senza cappi).

Un grafo si dice k-colorabile se esiste una funzione $f\colon V \to \{0, \ldots, k-1\}$ tale che assume valori distinti per ogni coppia di vertici uniti da un lato.

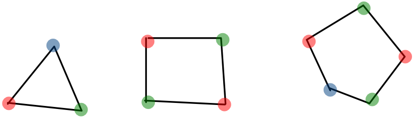
Ogni grafo è k-colorabile per $k \geq |V|$ (colorando ogni vertice con un colore diverso), la questione interessante è riuscire a k-colorare un grafo con valori di k più piccoli. L'indice cromatico di un grafo G è il minimo k tale che G è k-colorabile.

Il grafo completo e il grafo ciclico



K_3 K_4 K_5

Il grafo completo
K_n ha indice cromatico n

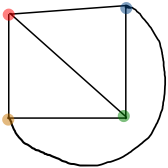


C_3 C_4 C_5

Il grafo ciclico
C_n ha indice cromatico
$$\begin{cases} 2 & n \text{ pari} \\ 3 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

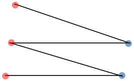
Grafi piani

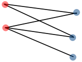
Un grafo è piano se può essere rappresentato in un piano in modo che i lati si intersecano solo nei vertici. Il grafo completo K_4 è piano.



Grafi bipartiti

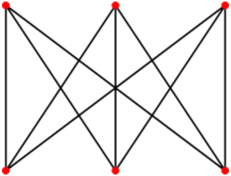
Un grafo è bipartito se i vertici possono essere divisi in due sottoinsiemi in modo che i lati congiungono vertici appartenenti a sottoinsiemi diversi.





Un grafo è bipartito $\iff$ è 2-colorabile.

Il grafo bipartito completo $K_{3,3}$.



Il Teorema di Kuratowski (1929)

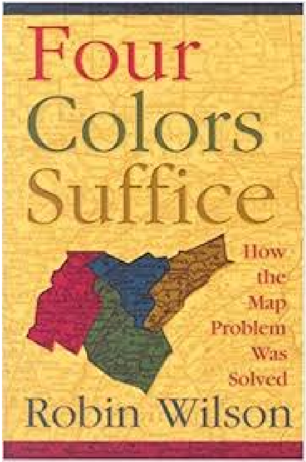
Teorema

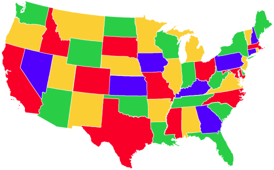
Un grafo è planare se e solo se non contiene alcun sottografo che sia omeomorfo a K_5 oppure $K_{3,3}$.

Kazimizierz Kuratowski (1896-1980)

Teorema (Teorema dei 4 colori, Appel-Haken, 1977)

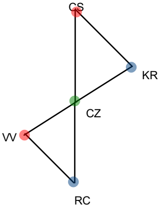
Ogni grafo planare è 4-colorabile.





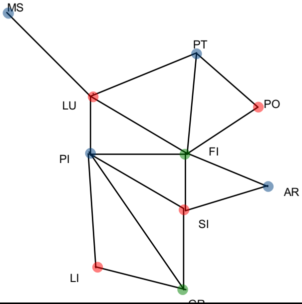
La Calabria


Cosenza
Crotone
Catanzaro
Vibo
Valentia
Reggio Calabria


CS
KR
CZ
VV
RC

La Toscana

Massa e Carrara
Lucca
Pistoia
Prato
Firenze
Pisa
Arezzo
Siena
Livorno
Grosseto



MS
PT
LU
PO
PI
FI
AR
SI
LI

Veneto e Liguria

L'ideale k-cromatico

Lemma

Sia $k \geq 2$ e sia $\xi = e^{2\pi\sqrt{-1}/k} \in \overline{\mathbb{Q}}$ una radice primitiva k-esima dell'unità. Per ogni $j = 0, \ldots, k-1$, il polinomio $f_j(x) = \frac{x^k - 1}{x - \xi^j}$ di grado $k-1$ ha per radici $x = \xi^i$ per $i = 0, \ldots, k-1$, $i \neq j$.

Ogni grafo G con n vertici $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ammette (per ogni intero $k \geq 2$) il suo ideale k-cromatico $I_k(G) \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ generato dai seguenti polinomi:

- $v_i = x_i^k - 1$ per $i = 1, \ldots, k$ *(polinomi dei vertici)*
- $e_{ij} = \frac{x_i^k - x_j^k}{x_i - x_j} = x_i^{k-1} + x_i^{k-2}x_j + \ldots + x_j^{k-1}$ per ogni coppia (v_i, v_j) di vertici che sono uniti da un lato *(polinomi dei lati)*.

Proprietà dell'ideale k-cromatico

Teorema

Un grafo è k-colorabile se e solo se l'ideale $I_k(G)$ è diverso da (1).

Dimostrazione.

Se un grafo è k-colorabile mediante una funzione $f\colon V \to \{0, \ldots, k-1\}$ consideriamo la radice k-esima dell'unità $\xi = e^{2\pi\sqrt{-1}/k} \in \overline{\mathbb{Q}}$ e il punto $\left(\xi^{f(1)}, \ldots, \xi^{f(n)}\right) \in V(I_k(G)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^n$, da cui $I_k(G) \neq (1)$. Viceversa, se $I_k(G) \neq (1)$, per il NullStellenSatz esiste $(a_1, \ldots, a_n) \in V(I_k(G))$. Vale $a_i^k = 1$, pertanto possiamo definire $f\colon V \to \{0, \ldots, k-1\}$ dalla condizione $a_i = \xi^{f(v_i)}$, e ogni altra equazione $e_{ij}(\xi^{f(v_i)}, \xi^{f(v_j)}) = 0$ garantisce che $f(v_i) \neq f(v_j)$ dal Lemma precedente (considerando l'equazione $e_{ij}(x, \xi^{f(v_j)}) = 0$). $\square$

L'ideale 2-cromatico

Per $k = 2$ l'ideale 2-cromatico $I_2(G) \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ è generato da:

- $v_i = x_i^2 - 1$ per $i = 1, \ldots, k$ *(polinomi dei vertici)*
- $e_{ij} = x_i + x_j$ *(polinomi dei lati)*.

Dunque un grafo G è bipartito se e solo se $I_2(G) \neq 1$.

Algoritmo per il calcolo dell'indice cromatico

Il Teorema precedente permette di verificare la k-colorabilità di un grafo G e di determinare il suo indice cromatico mediante il calcolo della base di Gröbner del suo ideale cromatico $I_k(G)$.

Il grado di $I_k(G)$ (ottenibile col comando $\mathrm{degree} I_k(G)$), diviso per $k!$, fornisce il numero di k-colorazioni diverse di G.

Una osservazione interessante è che ogni soluzione del gioco *"Sudoku"* corrisponde alla 9-colorabilità di un grafo con 81 vertici x_{ij} per $1 \leq i, j \leq 9$ dove tutti i vertici con stessa riga, o con stessa colonna, sono connessi da un lato, e infine anche i vertici di uno stesso blocco 3×3 sono connessi.

SUDOKU

5	4			2		8		6
	1	9			7			3
			3			2	1	
9			4		5		2	
		1				6		4
6		4		3	2		8	
	6					1	9	
4		2			9			5
	9			7		4		2

ANSWER:

5	4	3	9	2	1	8	7	6
2	1	9	6	8	7	5	4	3
8	7	6	3	5	4	2	1	9
9	8	7	4	6	5	3	2	1
3	2	1	7	9	8	6	5	4
6	5	4	1	3	2	9	8	7
7	6	5	2	4	3	1	9	8
4	3	2	8	1	9	7	6	5
1	9	8	5	7	6	4	3	2

L'ideale 9-cromatico del *"Sudoku"*

Per inserire nell'ideale 9-cromatico i vertici che hanno già una colorazione, si considera che il campo di spezzamento del polinomio ciclotomico $\Phi_9(t) = t^6 + t^3 + 1$ è $\mathbb{Q}[t]/(t^6 + t^3 + 1)$, questo campo coincide col campo ottenuto aggiungendo a $\mathbb{Q}$ una radice primitiva nona dell'unità.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Implementazione in M2

Si può lavorare in M2 con il seguente anello

```
K2=toField(QQ[t]/ideal(t^6+t^3+1))
R=K2[x_(0,0)..x_(8,8)]
```

Se la casella x_{ij} è riempita con il colore k, dove $k \in \{1, \ldots, 9\}$, si aggiunge all'ideale cromatico il generatore $x_{ij} - t^{k-1}$, e questo per tutte le condizioni iniziali.

Esercizi

Esercizio

Calcolare l'indice cromatico dei grafi dati dalle province della Lombardia, del Lazio e della Sardegna, dove due province sono unite da un lato quando sono confinanti.

Esercizio

Sperimentare l'implementazione di un problema di Sudoku.