Partizioni dell'unità

Dato una varietà M, una partizione dell'unità è una collezione di funzioni C^∞ $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$

$\rho_\alpha \geq 0$ tali che

a) $\forall\, p \in M$ esiste un intorno di p in cui $\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha$ è una somma finita

b) $\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha = 1$

① Dato un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M

ESISTE una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ t.c.

$$\operatorname{supp}\{\rho_\alpha\} = \overline{\{p \in M \mid \rho_\alpha(p) \neq 0\}} \subset U_\alpha$$

in questo caso si dice che $\{\rho_\alpha\}$ è una partizione dell'unità SUBORDINATA al ricoprimento $\{U_\alpha\}$.

2 Dato un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ <u>ESISTE</u> una partizione dell' unità

$$\{\rho_\beta\}_{\beta \in J}$$

a supporto compatto tale che $\text{supp}(\rho_\beta)$ è contenuto in qualche U_α.

Nota: in 1 il supporto non si richiede che sia compatto e l'indice di $\{U_\alpha\}$ e $\{\rho_\alpha\}$ è lo stesso. In 2 è vero il viceversa.

Su una varietà non compatta non possiamo richiedere che siano soddisfatte entrambe le condizioni simultaneamente