Il fibrato tangente a una varietà diff. M.

In ogni $p \in M$ abbiamo definito lo spazio tangente

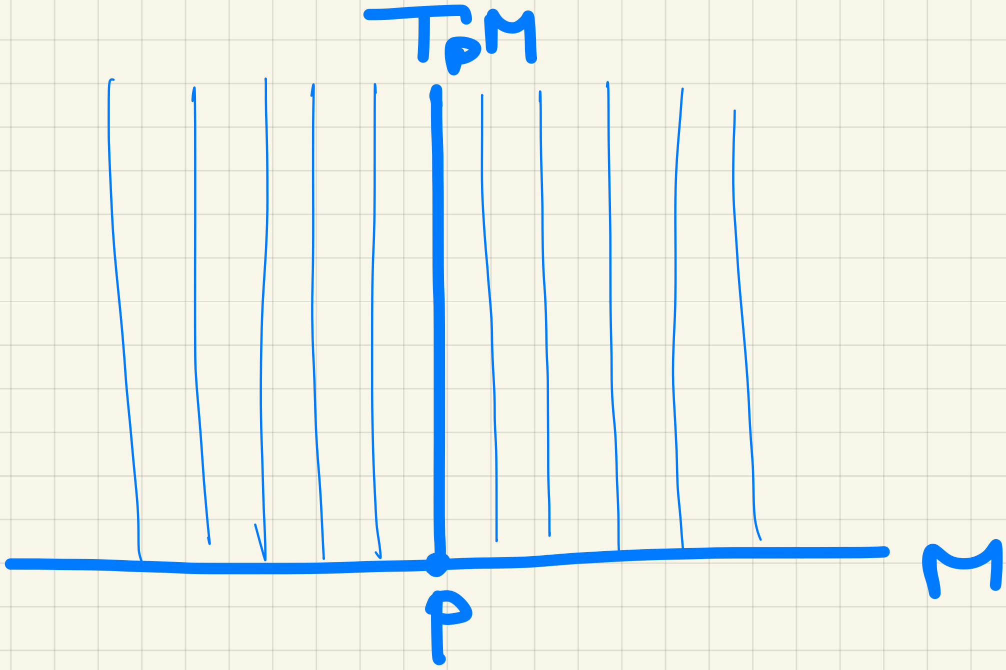
$$T_pM$$

è uno spazio vettoriale di dim n dove n è la dimensione di M.

Il fibrato tangente TM di M è

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

ossia l'unione disgiunta degli spazi tangenti.



T_pM si dice fibra di TM nel punto p.

E' definita una proiezione

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

se (p, X_p) è un punto di TM

$$\pi(p, X_p) = p$$

ossia π manda tutti i punti dello fibra T_pM in p.

Vogliamo definire sull'insieme TM una struttura C^∞.

Topologia

Sia $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ una carta di M.

Denotiamo con $TU = \bigsqcup_{p \in U} T_pM$

$TU = \pi^{-1}(U)$, sia $p \in U$

allora un vettore tangente

$X_p \in T_pM$ $\quad X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$

dove gli $a^i = a^i(X_p) \in \mathbb{R}$

sono univocamente determinati

da X_p.

Definiamo

$$\tilde{\phi} = (\phi, \phi_*):$$

$$TU \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$$

$$(p, X_p) \longmapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), a^1(X_p), \dots, a^n(X_p))$$

$\tilde{\phi}$ è biunivoca

Def $A \subset TU$ è aperto se

$\tilde{\phi}(A)$ è aperto in $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$

Sia (U_α, ϕ_α) un atlante di M.

Sia $\mathcal{B}$ la collezione degli aperti di TU_α con U_α nell'atlante.

Si verifica che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia e prendiamo la topologia definita da $\mathcal{B}$ come topologia di TM.

Si può verificare che TM con questa topologia è una varietà topologica

Struttura C^∞ di TM

Sia (U_α, ϕ_α) un atlante C^∞ di M. Allora gli aperti TU_α sono carte di TM e

$$TM = \bigcup_\alpha TU_\alpha$$

verifichiamo che

TU_α e TU_β sono

C^∞ - compatibili

Consideriamo:

$(U, x^1, \dots, x^n)$ e $(V, y^1, \dots, y^n)$

due carte di M.

$\forall\, p \in U \cap V$ abbiamo due

basi di T_pM

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}_{i=1}^n \quad e \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p \right\}_{i=1}^n$$

inoltre sappiamo che

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ & & \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}}_{J(\psi \circ \phi^{-1})}$$

ogni

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \begin{bmatrix} a^1 \\ \\ a^n \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) \begin{bmatrix} b^1 \\ \\ b^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) J(\psi \circ \phi^{-1}) \begin{bmatrix} a^1 \\ \\ a^n \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) \begin{bmatrix} b^1 \\ \\ b^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J(\psi \circ \phi^{-1}) \begin{bmatrix} a^1 \\ \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ \\ b^n \end{bmatrix}$$

adesso consideriamo U_α e U_β e denotiamo

$$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$$

allora

$$\tilde{\Phi}_\beta \circ \tilde{\Phi}_\alpha^{-1}:$$

$$\phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, a^1, \dots, a^n) \longmapsto (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x), b^1, \dots, b^n)$$

con $\displaystyle b^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} a^j$

$\tilde{\Phi}_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ è biunivoca,

C^∞, con inversa C^∞.

Il fibrato tangente TM è un fibrato vettoriale:

un fibrato vettoriale è una tripletta

$$(E, M, \pi)$$

dove E, M sono varietà diff. e $\pi : E \longrightarrow M$ è una applicazione

- suriettiva
- C^∞
- localmente banale di rango r

localmente banale di rango r significa che:

1. Ogni fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ è uno spazio vettoriale di dimensione r

2. $\forall\, p \in M$ esistono un intorno U di p e un diffeomorfismo

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^r$$

che preserva le fibre e t.c. $\forall\, q \in U$

$$\phi : \pi^{-1}(q) \longrightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^r$$ è un isomorfismo di spazi vett.

Esempio

$\pi : TM \longrightarrow M$ come definita

① $\pi^{-1}(p) = T_pM$ sp. vett.

② $\forall$ p $\exists$ carta di M

(U, ϕ) e

$\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$

locale banalizzazione.

In generale una collezione

$\{(U, \phi)\}$ con $\phi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$

come in ② si chiama

banalizzazione locale di E

e $\{U\}$ un ricoprimento

banalizzante.

E si dice <u>spazio totale</u> del fibrato vettoriale con <u>varietà di base</u> M

Spesso diciamo che E è uno fibrato vettoriale su M.

Sezioni

Una sezione C^∞ di un fibrato vettoriale

$$\pi : E \longrightarrow M$$

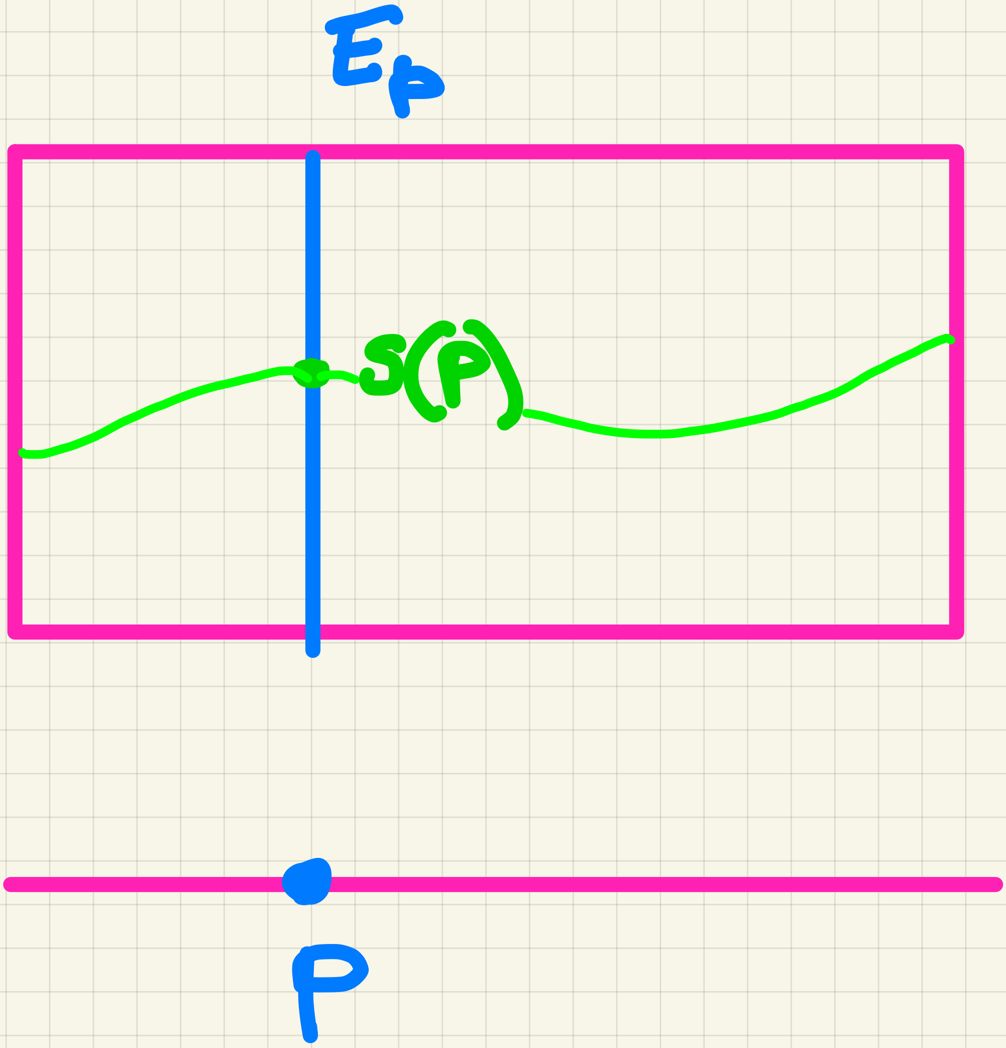
è una applicazione C^∞

$$s : M \longrightarrow E$$

tale che

$$\pi \circ s = id_M$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, shift right, "\pi"'] \\ M \arrow[u, shift right, "s"'] \end{tikzcd}$$



<u>Esempio</u> Sia M una varietà differenziabile, una <u>sezione</u> del fibrato tangente TM è un <u>CAMPO VETTORIALE</u> su M.

Denotiamo con $\Gamma(E)$ l'insieme delle sezioni di E. $\Gamma(E)$ è un modulo su $C^\infty(M)$, ossia su $\Gamma(E)$ sono definite, in modo naturale, e godono di tutte le buone proprietà, la somma di due sezioni, il prodotto λs di uno scalare con una sezione s ($\Gamma(E)$ è uno spazio vettoriale) e il prodotto fs di una sezione s e una funzione $f \in C^\infty(M)$.

Sia U un aperto di M, denotiamo con $\Gamma(U, E)$ lo spazio delle sezioni ristrette ad E.

NOTA $\Gamma(M, E) = \Gamma(E)$

- $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$

Il fibrato cotangente T^*M

Si ottiene con una costruzione del tutto analoga a quella del fibrato tangente:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$$

vediamo solo, esplicitamente, la banalizzazione locale.

Sia $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$

una carta di M.

Denotiamo con $T^*U = \bigsqcup_{p \in U} T_p^*M$

allora un vettore cotangente

$\omega_p \in T_p^*M$ si scrive

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n c_i \, dx^i|_p$$

si ottiene così l'applicazione

biunivoca

$$TU \xrightarrow{\tilde{\phi}} \phi(U)\times\mathbb{R}^n$$

$$(p,\omega_p) \longmapsto \left(x^1(p),\dots,x^n(p),\, c_1(\omega_p),\dots,c_n(\omega_p)\right)$$

Analogamente a TM consideriamo per due carte $(U,x^1,\dots,x^n)$ e $(V,y^1,\dots,y^n)$

$\forall\, p\in U\cap V$ abbiamo due basi di T_p^*M

$$\left\{dx^i|_p\right\}_{i=1}^{n} \quad e \quad \left\{dy^i|_p\right\}_{i=1}^{n}$$

prima di tutto cerchiamo una matrice di funzioni tale che

$$(dx^1, \dots, dx^n) = (dy^1, \dots, dy^n) A$$

dunque

$$(dx^1, \dots, dx^n)^T = A^T (dy^1, \dots, dy^n)^T$$

sappiamo che

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ & & \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}}_{J(\psi \circ \phi^{-1})}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)}^{I_n} = A^T \overbrace{\begin{pmatrix} dy^1 \\ \vdots \\ dy^n \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right)}^{I_n} J(\psi \circ \phi^{-1})$$

$$\Rightarrow I_n = A^T J(\psi \circ \phi^{-1})$$

$$\Rightarrow I_n = J(\psi \circ \phi^{-1})^T A$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \left(\left(J(\psi \circ \phi^{-1})\right)^{-1}\right)^T}$$

Ogni

$$\omega_p = (dx^1, \dots, dx^n) \begin{bmatrix} c_1 \\ \\ \\ c_n \end{bmatrix} =$$

$$= (dy^1, \dots, dy^n) \begin{bmatrix} d_1 \\ \\ \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (dy^1, \dots, dy^n)\, J(\psi \circ \phi^{-1})^{-T} \begin{bmatrix} c_1 \\ \\ c_n \end{bmatrix} =$$

$$= (dy^1, \dots, dy^n) \begin{bmatrix} d_1 \\ \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J(\psi \circ \phi^{-1})^{-T} \begin{bmatrix} c_1 \\ \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \\ d_n \end{bmatrix}$$

NOTA: $-T$ = inversa della trasposta

$$\tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}_\alpha^{-1} :$$

$$\phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, c_1, \dots, c_n) \longmapsto (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x), d_1, \dots, d_n)$$

con $\boxed{d_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial y^i} c_j}$

Lo spazio delle 1-forme differenziali $\Omega^1(M)$ è lo spazio $\Gamma(T^*M)$ delle sezioni di T^*M.

Analogamente possiamo costruire le k-forme:

per le 1-forme, punto per punto, si considera

$$T_p^*M = \Lambda^1(T_pM)$$

per le k-forme

consideriamo

$$\Lambda^k(TM) = \bigsqcup_p \Lambda^k(T_pM)$$

(NB: la notazione del Tu è diversa)

e lo spazio delle

k-forme è dato dalle

sezioni di questo fibrato:

$$\Omega^k(M) = \Gamma\left(\Lambda^k(TM)\right)$$

Consideriamo ad esempio $\Omega^2(M)$. Se abbiamo due carte locali $(U, x^1, \dots, x^n)$ e $(V, y^1, \dots, y^n)$ su $U \cap V$

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = \sum_{k<l} b_{kl}\, dy^k \wedge dy^l$$

qual è la relazione tra $\{a_{ij}\}_{i<j}$ e $\{b_{kl}\}_{k<l}$?

In generale, possiamo vedere una k-forma su una varietà M, dotata di un atlante $(U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ come una collezione di k-forme ω_α su U_α tali che, $\forall\ p \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\omega_\alpha|_p = \omega_\beta|_p$$

quindi, in particolare,

se $\omega_\alpha = \sum_I a_I \, dx_\alpha^I$

e $\omega_\beta = \sum b_I \, dx_\beta^I$

i coefficienti

$$a_I \quad e \quad b_I$$

devono stare nella giusta relazione.

Ad esempio, per le 1-forme,

se $\omega_\alpha = \sum_i c_i \, dx_\alpha^i \qquad c_i \in C^\infty(U_\alpha)$

e $\omega_\beta = \sum_i d_i \, dx_\beta^i \qquad d_i \in C^\infty(U_\beta)$

si deve avere $J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^{-T} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$

su $U_\alpha \cap U_\beta$.

Ricordiamo che il prodotto wedge è definito su $\Lambda^k(V)$ e quindi si definisce su $\Omega^k(M)$ punto per punto.

Analogamente, se abbiamo

$$F : M \longrightarrow N \quad C^\infty$$

punto per punto è definito il pull-back F^* di F_*.

Dunque è definito

$$F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M).$$

Si ha che

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$$

dotata del $\wedge$ è una algebra graduata.

E $F^*: \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$

è un omomorfismo di algebre graduate

Derivata esterna d:

abbiamo definito

$$d : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$$

e localmente, su un aperto U di $\mathbb{R}^n$.

Sostanzialmente, per definire $d\omega$ con $\omega \in \Omega^k(M)$, si dimostra che, se ω_α e ω_β sono le espressioni locali di ω, si ha che

$$d\omega_\alpha|_p = d\omega_\beta|_p$$

$\forall \, p \in U_\alpha \cap U_\beta$

Quindi $(d\omega)_p$ è ben definito e <u>non</u> dipende dalla carta.

Abbiamo quindi l'operatore

$$d : \Omega^*(M) \to \Omega^* M$$

con le stesse proprietà che avevamo già verificato, ossia:

1. $d^2 = 0$

2. $d_M \circ F^* = F^* \circ d_N$

con $F : M \to N$

Coomologia di de Rham di una varietà M.

Dato M, consideriamo il complesso di de Rham

$$d : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

e definiamo la <u>coomologia di de Rham</u>

$$\boxed{H^q_{dR}(M) = \frac{\{q\text{-forme chiuse}\}}{\{q\text{-forme esatte}\}}}$$