24 aprile 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di venerdì 24 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Facciamo il punto della situazione.

Noi vogliamo trovare un modo per verificare se certi ragionamenti logici (nella fattispecie, deduzioni!) sono corretti oppure no. Non vogliamo verificare la correttezza ***delle conclusioni*** ma ***del ragionamento*** (le conclusioni possono essere corrette anche se il ragionamento è sbagliato! E, viceversa, partendo da premesse false si possono ottenere conclusioni false con un ragionamento corretto…); se in un compito d’esame (di qualsiasi materia) date la risposta giusta ma presentate un ragionamento sbagliato, l’esercizio è sbagliato e non prendete punteggio!

I nostri ragionamenti sono espressi nella lingua corrente. Alcuni enunciati costituiscono le premesse del ragionamento, l’ultimo enunciato ne costituisce la conclusione; noi vogliamo vedere se l’ultimo enunciato è o non è conseguenza logica dei primi. A questo scopo dobbiamo formalizzare in un linguaggio logico tutti gli enunciati; abbiamo visto a ottobre alcuni tipi di enunciati che si possono formalizzare col linguaggio della logica proposizionale, e questo ci ha permesso di verificare la correttezza di una famiglia di ragionamenti (ricordate gli esercizi in stile Cluedo?). L’aspetto particolarmente interessante della faccenda per uno studente di informatica è che tutta la verifica di correttezza del ragionamento si può automatizzare, con un opportuno algoritmo.

Però, se negli enunciati compaiono locuzioni come “per ogni”, “comunque preso”, “per qualche”, “esiste almeno un”, il linguaggio della logica proposizionale non è sufficiente a “tradurre in formule” le premesse e la conclusione del ragionamento, e quindi non siamo in condizioni di verificarne l’esattezza con un procedimento automatico. Ecco che quindi abbiamo introdotto i linguaggi della logica dei predicati: linguaggi diversi per le diverse necessità, ciascuno dei quali ha un tipo (dato dal numero dei simboli di costante, dal numero e dalle arietà dei simboli di funzione, dal numero e dalle arietà dei simboli di predicato) che permette di stabilire quali strutture sono ad esso adeguate e ci consentono di assegnare un valore di verità alle formule del linguaggio. I linguaggi della logica dei predicati sono, come avete avuto modo di verificare sulla vostra pelle, molto più ricchi e complessi di quello della logica proposizionale, anche se alla fin fine il modo di costruire le formule a partire dalle formule atomiche è “quasi” lo stesso della logica proposizionale: ci sono da gestire in più i quantificatori, e poi, e poi, beh, le formule atomiche sono molto più strutturate (e di conseguenza anche i letterali).

Comunque, torniamo a noi. Di partenza, dicevo, abbiamo un ragionamento del quale vogliamo verificare la validità logica; gli enunciati del ragionamento sono ambientati in una certa struttura dotata presumibilmente di costanti, funzioni e predicati (costanti e funzioni possono in casi molto semplici essere assenti, ma i predicati ci vogliono altrimenti come facciamo a parlare di enunciati?). Scegliamo un linguaggio della logica dei predicati che ci permetta di tradurre in formule i nostri enunciati; siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ le formule che traducono le premesse e sia β la formula che traduce la conseguenza; il ragionamento è logicamente valido se e soltanto se

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$$

cioè se e soltanto se la formula φ definita da $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ \ldots \ \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ non è soddisfacibile.

Nelle lezioni (virtuali) di martedì scorso 21 aprile 2020 e nella precedente ora (virtuale) di oggi venerdì 24 aprile 2020 abbiamo visto che si può trovare in un opportuno linguaggio di logica dei predicati una formula che

(i) è in forma normale prenessa senza quantificatori esistenziali e con la parte che segue i quantificatori universali in forma normale congiuntiva;

(ii) è soddisfacibile se e soltanto se φ è soddisfacibile.

Quello che resta da chiederci è: data una formula che verifica la (i), come possiamo decidere se è soddisfacibile? Come possiamo controllare tutte le (infinite) strutture adeguate al linguaggio della formula, tutte le (presumibilmente infinite, anche fissata la struttura) interpretazioni e tutte le assegnazioni di valore alle variabili individuali libere… No, aspettate un momento, almeno su questo possiamo tirare un sospiro di sollievo: infatti se una formula traduce un ***enunciato*** del linguaggio corrente allora in essa ogni variabile individuale deve essere vincolata. Ricordate quando a ottobre abbiamo parlato di enunciati? Abbiamo proprio osservato che, parlando di numeri naturali, l’affermazione “x è pari” non è un enunciato perché non ha senso dire se è vera o falsa; mentre “almeno un x è pari” e “ogni x è pari” sono in effetti due enunciati (il primo è vero, il secondo è falso).

Ricordatevene anche quando farete gli esercizi: uno degli errori più frequenti e stupidi che ho visto nei compiti di esame è la traduzione di un enunciato in una formula *aperta*!

Resta comunque il fatto che data la formula che vogliamo sapere se è o non è soddisfacibile dovremmo andare a considerare tutte le (infinite) strutture adeguate al linguaggio della formula e tutte le (presumibilmente infinite, anche fissata la struttura) interpretazioni: vi sembra una cosa da niente?

Chi ci salva è un giovanissimo matematico francese, Jacques Herbrand che nacque a Parigi il 12 febbraio 1908. Oggi avrebbe 112 anni, ma purtroppo non è arrivato a 24. La sua è una storia tristissima, perché morì il 27 luglio 1931 scalando le alpi francesi. Ha fatto in tempo però a formulare la seguente osservazione.

Quando interpretiamo i nostri simboli di costante e simboli di funzione in una struttura adeguata al linguaggio, quello che conta non sono i particolari elementi della struttura che l’interpretazione ci dà come immagini ma soltanto le relazioni fra essi, espresse appunto dalle funzioni (e, ok ok, anche dai predicati). È un po’, se vogliamo, ancora la solita vecchia storia del nome della rosa… Herbrand osservò che una possibile struttura adeguata al linguaggio $\mathcal{L}$ è ***l’insieme dei termini chiusi*** di $\mathcal{L}$; certo, voi mi obietterete subito che se nel linguaggio $\mathcal{L}$ non ci sono simboli di costante l’insieme dei termini chiusi è vuoto, e noi non accettiamo strutture vuote: ma si rimedia, perbacco, se nel linguaggio $\mathcal{L}$ non ci sono simboli di costante ne aggiungiamo uno e siamo a posto!

L’insieme dei termini chiusi di $\mathcal{L}$ (una volta aggiunto, se non c’era prima, un simbolo di costante) si chiama ***universo di Herbrand*** associato al linguaggio $\mathcal{L}$. Se nell’universo di Herbrand consideriamo come costanti i termini costituiti da un solo simbolo di costante, esso diventa una struttura adeguata a $\mathcal{L}$, con l’ovvia interpretazione (“di Herbrand”) che interpreta ogni simbolo di costante in se stesso (!) e ogni simbolo di funzione f nella funzione che porta il termine t nel termine $f(t)$. La genialità dell’intuizione di Herbrand sta nell’osservazione che

(*) la formula φ è soddisfacibile sse c’è una interpretazione di Herbrand che la soddisfa.

Aspettate. Sto un po’ bluffando, e farlo per iscritto mi mette a disagio molto più di quando lo faccio in una lezione dal vivo. Se rileggete il paragrafo precedente dovreste accorgervi di dove ho barato.

Non andate alla pagina successiva prima di avere riletto il paragrafo precedente per scoprire dov’è il bluff!

Eh, sì, il bluff sta nel fatto che l’interpretazione di Herbrand non è una sola, perché è sì vero che Herbrand ci dice come interpretare i simboli di costante e i simboli di funzione, ma non ci dice niente su come interpretare i simboli di predicato!

I simboli di predicato, in effetti, possono essere interpretati ***in qualsiasi modo***, quindi esistono tante interpretazioni di Herbrand quanti sono i possibili modi di assegnare un valore di verità alle formule atomiche chiuse! Dunque questi valori di verità, prima di poter concludere che la nostra formula è insoddisfacibile, devono venire assegnati, apoditticamente, in tutti i modi possibili: proprio come si faceva nella logica proposizionale! Il cerchio si chiude, e anche nella decisione finale se una formula della logica dei predicati è o non è soddisfacibile intervengono i metodi della logica proposizionale.

Insomma, la logica proposizionale è come il maiale: non si butta via nulla!

Adesso andiamo a formalizzare le definizioni ed enunciare il teorema di Herbrand. Fatto questo, potremo dire che abbiamo terminato la parte teorica del corso! Naturalmente, in realtà, dobbiamo anche vedere un po’ nei dettagli come operativamente ci dovremo comportare per decidere della soddisfacibilità di una formula: ma questo ve lo spiegherò martedì prossimo 28 aprile 2020. In effetti, martedì prossimo sarà l’ultima ***lezione*** del corso, anche se (senza COVID-19) avrei poi fatto 2-3 mattinate di esercizi e quindi martedì 5, venerdì 8 e martedì 12 maggio 2020 pubblicherò esercizi svolti, corrispondenti diciamo a un totale di 5 ore “dal vivo” in modo da fare cifra tonda e poter dire alla fine che il corso è stato di 90 ore precise. Boh, questi sono dettagli burocratici che vi interessano fino a un certo punto. Diciamo che per le ultime esercitazioni, se avete qualche desiderio da esprimere è bene che lo facciate, non siamo vincolati per chiudere il corso a parlare soltanto di logica e quindi se da qualche parte trovate un esercizio inerente in generale alla mia materia che non sapete risolvere siete invitati a propormelo (mandandomi una email), così ne posso parlare fruttuosamente!

Sia A un alfabeto della logica dei predicati. L’insieme $\mathcal{H}(\mathrm{A})$ dei termini chiusi su A si dice *universo di Herbrand* (di A).

Detti poi

– $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ l’insieme dei simboli di costante che appartengono ad A

e

– $\mathcal{F}_{\mathrm{A}}$ l’insieme dei simboli di funzione che appartengono ad A

è facile osservare che per ogni scelta di predicati su $\mathcal{H}(\mathrm{A})$ della arietà corrispondente a quella dei simboli di predicato di A, la quaterna ordinata $(\mathcal{H}(\mathrm{A}), \mathcal{C}_{\mathrm{A}}, \mathcal{F}_{\mathrm{A}}, \mathcal{P})$ è una struttura adeguata ad A.

Si dice poi *interpretazione di Herbrand* per A qualsiasi interpretazione su $(\mathcal{H}(\mathrm{A}), \mathcal{C}_{\mathrm{A}}, \mathcal{F}_{\mathrm{A}}, \mathcal{P})$ che a ogni elemento di $\mathcal{C}_{\mathrm{A}}$ e a ogni elemento di $\mathcal{F}_{\mathrm{A}}$ associa se stesso (mentre non c’è restrizione all’interpretazione dei simboli di predicato).

Ed ecco infine il teorema conclusivo, del quale ci risparmiamo a vicenda la dimostrazione:

Teorema 3.8.3 (Herbrand)

Siano A un alfabeto per la logica dei predicati e φ una formula di A. Allora

φ è soddisfacibile se e soltanto se esiste una interpretazione di Herbrand che la soddisfa.

Resta da capire come si applica il teorema di Herbrand per decidere se una certa formula φ è soddisfacibile.

Per tutto quello che abbiamo visto fin qui, possiamo supporre che φ sia della forma

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_s)\overline{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$$

dove la formula $\overline{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ è una formula priva di quantificatori, in forma normale congiuntiva (cioè congiunzione di disgiunzioni di formule atomiche e negazioni di formule atomiche). Le variabili individuali $x_1, x_2, \ldots, x_s$ sono tutte vincolate da quantificatori universali, quindi deve essere vera ogni formula (chiusa) che si ottiene da $\overline{\varphi}$ sostituendo a $x_1, x_2, \ldots, x_s$ elementi della struttura nella quale la interpretiamo, cioè elementi dell’universo di Herbrand, cioè in ultima analisi termini chiusi del linguaggio!

Ma quanti sono i termini chiusi del linguaggio? Ahimé, qui sta l’inghippo! (“*Aye, there’s the rub*!” William Shakespeare, Hamlet, Atto 3, Scena 1).

Se appena appena nel nostro linguaggio c’è un simbolo di funzione f anche soltanto unaria, siccome un simbolo di costante c se anche non c’era ce l’abbiamo aggiunto noi, ecco che fra i termini chiusi troviamo c, $f(c)$, $f(f(c))$, $f(f(f(c)))$, $\ldots$ e avanti all’infinito!. Ricordate che avevamo detto che il quantificatore universale $\forall$ è una specie di generalizzazione del connettivo di congiunzione logica? La $\overline{\varphi}$ diventa, per effetto dei quantificatori universali che ne vincolano le variabili individuali, una specie di congiunzione fra tante “copie” di $\overline{\varphi}$ (non vere copie, ovviamente, ma formule ottenute sostituendo in $\overline{\varphi}$ alle variabili individuali i termini chiusi in tutti i modi possibili!) quanti sono i termini chiusi, e se i termini chiusi sono infiniti abbiamo una congiunzione di infinite formule!

La formula $\overline{\varphi}$, essendo in forma normale congiuntiva, suggerisce una scrittura in clausole; ma poiché nella $\overline{\varphi}$ compaiono variabili individuali (vincolate dai rispettivi quantificatori universali) quello che si può immediatamente ricavare da $\overline{\varphi}$ non è un vero insieme di clausole (perché ancora vi compaiono le variabili individuali invece degli elementi dell’universo di Herbrand) ma piuttosto una cosa che chiameremo “schema di clausole”.

Il vero e proprio insieme di clausole, che potremmo tentare di sottoporre all’algoritmo di Davis e Putnam, si ottiene dallo schema sostituendo, clausola per clausola, a ogni variabile individuale un termine chiuso del linguaggio (cioè un elemento dell’universo di Herbrand) *in tutti i modi possibili*. Purtroppo, se l’universo di Herbrand ha infiniti elementi (ed è quel che avviene se nel linguaggio è presente anche un solo simbolo di funzione) il nostro è un insieme di infinite clausole: e l’algoritmo di Davis e Putnam su un insieme di infinite clausole non è più applicabile perché richiederebbe infiniti passi…

Avete capito, adesso, perché le varie possibili forme prenesse di una stessa formula non sono fra loro affatto equivalenti ai fini dei nostri calcoli?

Nella precedente ora (virtuale) di lezione di oggi venerdì 24 aprile 2020, abbiamo fatto un esempio molto molto molto semplice, osservando che la formula

$$(\forall x)\varphi(x) \wedge (\exists y)\psi(y)$$

(che non è in forma normale prenessa) è logicamente equivalente sia alla formula

$$\alpha := (\forall x)(\exists y)\big(\varphi(x) \wedge \psi(y)\big)$$

sia anche alla formula

$$\beta := (\exists y)(\forall x)\big(\varphi(x) \wedge \psi(y)\big)\,.$$

La skolemizzazione di α si ottiene introducendo un simbolo di funzione unaria di argomento x e ci dà la formula $(\forall x)\big(\varphi(x) \wedge \psi(f(x))\big)$ alla quale corrisponde lo schema di clausole

$$\{\{\varphi(x)\}, \{\psi(f(x))\}\}$$

che a sua volta (nell’universo di Herbrand che richiede l’aggiunta di un simbolo di costante c e che è formato da infiniti termini a causa della presenza del simbolo di funzione f) dà luogo ad un insieme di infinite clausole:

$$\{\{\varphi(c)\}, \{\varphi(f(c))\}, \{\varphi(f(f(c)))\}, \dots \{\psi(f(c))\}, \{\psi(f(f(c)))\}, \dots\}$$

molto poco gestibile.

La skolemizzazione di β si ottiene invece introducendo un simbolo di costante c e ci dà la formula $(\forall x)\big(\varphi(x) \wedge \psi(c)\big)$ alla quale corrisponde lo schema di clausole

$$\{\{\varphi(x)\}, \{\psi(c)\}\}$$

che a sua volta (nell’universo di Herbrand che non richiede alcuna aggiunta perché è già presente un simbolo di costante e che è formato dal solo termine c) dà luogo ad un insieme di due clausole:

$$\{\{\varphi(c)\}, \{\psi(c)\}\}\,.$$

Voi quale delle due situazioni scegliereste?