Appunti per Geometria e Algebra Computazionale 2-5. Parametrizzazioni, varietà razionali e irrazionali

Corso di Laurea in Matematica, Università di Firenze, 2019/20

Giorgio Ottaviani

24 aprile 2020

Una varietà differenziabile nonsingolare X di dimensione k in $\mathbf{R}^n$ può essere introdotta in uno dei due modi equivalenti:
i) PARAMETRICO $\forall x \in X$ esiste un intorno aperto $x \in U \subset X$ (con la topologia indotta), un aperto $V \subset \mathbf{R}^k$ ed un'applicazione suriettiva C^∞ $F\colon V \to U \subset \mathbb{R}^n$ di rango k.
ii) IMPLICITO $\forall x \in X$ esiste un intorno aperto $x \in W \subset \mathbf{R}^n$ ed una funzione C^∞ $G\colon W \to \mathbf{R}^{n-k}$ di rango $n-k$ tale che $X \cap W = \{y \in W | G(y) = 0\}$.

La condizione i) dà localmente una parametrizzazione della varietà. La condizione ii) dà invece equazioni implicite. L'equivalenza delle condizioni i) e ii) segue essenzialmente dal teorema della funzione implicita.

Si possono parametrizzare le varietà algebriche ?

Le varietà algebriche nascono sostituendo le funzioni C^∞ con le funzioni razionali (con denominatore mai nullo dove sono definite). La condizione ii) definisce allora un aperto di una varietà algebrica affine. In questo caso la condizione i) implica la ii), ed il procedimento con cui si ottiene la funzione G va sotto il nome di eliminazione dei parametri.

La condizione ii) non implica la i). Questo è mostrato dal seguente

Esempio

(Le curve di Fermat). Sia C la curva di $\mathbf{R}^2$ data dall'equazione

$$x^n + y^n - 1 = 0$$

per $n \geq 3$. Allora non esistono funzioni razionali $x = x(t)$, $y = y(t)$ tali che $(x(t), y(t)) \in C$ per t in un aperto di $\mathbb{R}$.

Dimostrazione che le curve di Fermat non si parametrizzano, I

Supponiamo che esistano $x(t) = \frac{p(t)}{r(t)}$, $y(t) = \frac{q(t)}{r(t)}$ come nell'enunciato con p, q, r polinomi senza fattori comuni. Abbiamo

$$p^n(t) + q^n(t) - r^n(t) = 0$$

da cui p, q, r sono primi tra loro a due a due. Derivando rispetto a t otteniamo la relazione

$$np^{n-1}p' + nq^{n-1}q' - nr^{n-1}r' = 0$$

Le due relazioni precedenti si riassumono nella forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} p & q & -r \\ p' & q' & -r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{n-1} \\ q^{n-1} \\ r^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione che le curve di Fermat non si parametrizzano, II

Quindi il vettore $(p^{n-1}, q^{n-1}, r^{n-1})$ risulta proporzionale al vettore

$$\left(\begin{vmatrix} q & -r \\ q' & -r' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} p & -r \\ p' & -r' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}\right)$$

Si ottengono facilmente le due relazioni

$$\begin{vmatrix} q & -r \\ q' & -r' \end{vmatrix} q^{n-1} = -\begin{vmatrix} p & -r \\ p' & -r' \end{vmatrix} p^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} q & -r \\ q' & -r' \end{vmatrix} r^{n-1} = \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} p^{n-1}$$

da cui le seguenti condizioni di divisibilità:

$$p^{n-1} \mid \begin{vmatrix} q & -r \\ q' & -r' \end{vmatrix} \qquad q^{n-1} \mid \begin{vmatrix} p & -r \\ p' & -r' \end{vmatrix}$$

$$r^{n-1} \mid \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}$$

Dimostrazione che le curve di Fermat non si parametrizzano, III

Le tre relazioni precedenti forniscono

$$(n-1)P \leq Q + R - 1$$

$$(n-1)Q \leq P + R - 1$$

$$(n-1)R \leq P + Q - 1$$

e sommando

$$(n-1)(P+Q+R) \leq 2(P+Q+R) - 3$$

che è una contraddizione se $n \geq 3$.

Le curve di Fermat per $n = 1, 2$

Se $n = 2$ allora

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2} \tag{0.1}$$

è una parametrizzazione razionale della conica $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Se $t = \frac{p}{q}$ si ricava (eliminando i denominatori) che $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ sono terne pitagoriche.

Se $n = 1$ si trova la retta $x + y - 1 = 0$ che ammette la parametrizzazione

$$x = t \qquad y = -t + 1$$

Parametrizzazioni polinomiali

Sia $F\colon K^m \to K^n$ una funzione polinomiale definita da $F = (f_1, \ldots, f_n)$ con f_i polinomi in $t_1, \ldots, t_m$.
Abbiamo così una parametrizzazione polinomiale di $Im\ F = F(K^m)$. Il teorema seguente mostra che si possono sempre trovare con un procedimento di eliminazione delle equazioni per la chiusura di Zariski di $F(K^m)$.

Teorema (Implicitizzazione polinomiale)

Sia K un campo algebricamente chiuso. Sia $F = (f_1, \ldots, f_n)\colon K^m \to K^n$ una funzione polinomiale. Sia $I = (x_1 - f_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n - f_n(t_1, \ldots, t_m)) \subset K[t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$ e sia $I_m = I \cap K[x_1, \ldots, x_n]$ l'm-esimo ideale di eliminazione. Allora

$$\overline{F(K^m)} = V(I_m)$$

Dimostrazione.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} V(I) & \subset & K^{n+m} & & \\ & i\nearrow & & \searrow \pi_m & \\ K^m & & \xrightarrow{F} & & K^n \end{array} \tag{0.2}$$

dove $i(t_1, \ldots, t_m) := (t_1, \ldots, t_m, f_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_m))$.
È facile verificare che $i(K^m) = V(I)$, che si dice il *grafico* di F.
Pertanto $F(K^m) = \pi_m(i(K^m)) = \pi_m(V(I))$ e quindi dal teorema di chiusura $\overline{F(K^m)} = V(I_m)$ come volevamo. $\square$

Il teorema di implicitizzazione polinomiale è vero se K è un qualunque campo infinito, anche non algebricamente chiuso (ad esempio $\mathbb{R}$). Non è possibile applicare il teorema di chiusura e la dimostrazione va modificata nel modo seguente. Sia $K \subset \overline{K}$ (chiusura algebrica). Come sopra abbiamo $F(K^m) = \pi_m(V(I)) \subset V(I_m)$ e quindi $\overline{F(K^m)} \subset V(I_m)$. Sia adesso $V_K(g_1, \ldots, g_s) = \overline{F(K^m)}$. Quindi $g_i \circ F \equiv 0$ come polinomi in $t_1, \ldots, t_m$. Il principio di identità dei polinomi vale su qualunque campo infinito, quindi g_i si annullano su $F(\overline{K}^m)$, da cui $V_{\overline{K}}(g_1, \ldots, g_s) \supset \overline{F(\overline{K}^m)} = V_{\overline{K}}(I_m) \supset V_K(I_m)$ (l' uguaglianza per il teorema di implicitizzazione) . Quindi

$$\overline{F(K^m)} = V_K(g_1, \ldots, g_s) \supset V_K(I_m)$$

da cui $V_K(I_m) \subset \overline{F(K^m)}$ come volevamo.

L'immagine di una parametrizzazione polinomiale può non essere chiusa.

Il teorema di implicitizzazione polinomiale mostra che eseguendo l'eliminazione da $(x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n)$ si trova la più piccola varietà contenente $F(K^m)$. In generale $F(K^m)$ può essere strettamente contenuto nella sua chiusura (anche se K é algebricamente chiuso).

Ad esempio si prenda $F\colon K^2 \to K^2$ definita da

$$F(x, y) = (xy, y).$$

$Im\ F$ é uguale a $\{y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$, che non é chiuso e $\overline{Im\ F} = K^2$. $Im\ F$ è un tipico esempio di insieme costruibile, cioè unione e intersezione finita di aperti e chiusi.

L'immagine è chiusa per le curve parametriche (un solo parametro)

Con le notazioni del teorema di implicitizzazione polinomiale $F(K)$ (corrispondente a $m = 1$) é chiuso. Cioè vale la

Proposizione

Sia K algebricamente chiuso. Sia $F = (f_1, \ldots, f_n) \colon K \to K^n$ una funzione polinomiale. Sia $I = (x_1 - f_1(t), \ldots, x_n - f_n(t)) \subset K[t, x_1, \ldots, x_n]$. Allora

$$F(K) = \overline{F(K)} = V(I_1)$$

Dimostrazione.

Seguendo la dimostrazione del teorema 0.2 abbiamo $F(K) = \pi_1(V(I))$. Adesso se $(x_1, \ldots, x_n) \in V(I_1)$ dal teorema di estensione esiste t tale che $(t, x_1, \ldots, x_n) \in V(I)$ e quindi $(x_1, \ldots, x_n) \in \pi_1(V(I))$. Pertanto $V(I_1) = \pi_1(V(I)) = F(K)$ e quindi $F(K)$ é chiuso. □

Esercizio

Esercizio

Trovare un esempio di una parametrizzazione polinomiale F dove K non é algebricamente chiuso e $F(K)$ non é chiuso.
Suggerimento: $F(x) = x^2$ *su* $\mathbb{R}$.

Esempio

Consideriamo $x = \frac{u^2}{v}$, $y = \frac{v^2}{u}$, $z = u$. *Si vede subito che l'immagine di questa parametrizzazione* F *(che è definita per* $u \neq 0$, $v \neq 0$*) è contenuta in* $x^2y - z^3 = 0$. *Eliminando i denominatori abbiamo l'ideale*

$$I = (vx - u^2, uy - v^2, z - u) \subset K[u, v, x, y, z].$$

Eliminando u, v *si trova* $I_2 = \left(z(x^2y - z^3)\right)$. *Pertanto in questo caso*

$$V(I_2) = V(x^2y - z^3) \cup V(z) \supset_{\neq} V(x^2y - z^3) \supset \overline{F(K^2)}$$

Questo esempio mostra che il teorema di implicitizzazione polinomiale non puó essere generalizzato al caso di parametrizzazioni razionali semplicemente eliminando i denominatori.

Parametrizzazioni razionali, formalizzazione

Nel caso generale abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{f_1(t_1,\ldots,t_m)}{g_1(t_1,\ldots,t_m)} \\ \vdots \\ x_n = \frac{f_n(t_1,\ldots,t_m)}{g_n(t_1,\ldots,t_m)} \end{cases} \tag{0.3}$$

dove f_i, g_i sono polinomi. In questo caso si dice che abbiamo una parametrizzazione razionale, che è definita dove $g_i \neq 0$.
Precisamente, posto $W = V(g_1 \cdots g_n) \subset K^m$ le 0.2 definiscono

$$F \colon K^m \setminus W \to K^n \tag{0.4}$$

dove $F = (\frac{f_1}{g_1} \ldots \frac{f_n}{g_n})$.

Consideriamo il diagramma (analogo a 0.2)

$$\begin{array}{ccccc} & & V(I) \subset K^{n+m} & & \\ & {}^{i}\nearrow & & \searrow^{\pi_m} & \\ K^m \setminus W & & \xrightarrow{F} & & K^n \end{array}$$

dove $I := (g_1x_1 - f_1, \ldots, g_nx_n - f_n)$, allora l'esempio precedente mostra che può essere

$$i(K^m \setminus W) \subset_{\neq} V(I)$$

e quindi non si può ripetere la costruzione del teor. di implicitizzazione polinomiale.

La costruzione con una variabile ausiliaria

Per trattare questo problema l'approccio giusto sta nel definire $g := g_1 g_2 \cdots g_n$ e considerare il diagramma

$$
\begin{array}{ccccc}
W = V(J) & \subset & K^{n+m+1} & & \\
& j \nearrow & & \searrow \pi_{m+1} & \\
K^m \setminus W & & \xrightarrow{F} & & K^n
\end{array}
$$

dove $j(t_1, \ldots, t_m) = (\frac{1}{g(t_1,\ldots,t_m)}, t_1, \ldots, t_m, \frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_n}{g_n})$ e dove

$J := (g_1 x_1 - f_1, \ldots, g_n x_n - f_n, 1 - gy) \subset K[y, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$

Il grafico delle parametrizzazioni razionali, con una variabile ausiliaria

Lemma

$$j(K^m \setminus W) = V(J)$$

Dimostrazione.

- "$\subset$" È ovvia dalle definizioni
- "$\supset$" Se $(y, t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n) \in V(J)$ allora abbiamo $g(t_1, \dots, t_m)y = 1$ da cui

$$g_i(t_1, \dots, t_m) \neq 0$$

e quindi $x_i = \frac{f_i}{g_i}$

□

Il teorema di implicitizzazione razionale

Teorema (Implicitizzazione razionale)

Se K è un campo infinito allora

$$\overline{F(K^m \setminus W)} = V(J_{m+1})$$

La dimostrazione è analoga al teorema di implicitizzazione polinomiale (su K algebricamente chiuso) ed all'estensione successiva e viene lasciata come esercizio.

Ovviamente $F(K^m \setminus W)$ puó essere strettamente contenuto nella sua chiusura, anche se $m = 1$. Si veda ad esempio le equazioni (0.1) che definiscono tutta la circonferenza meno il punto $(-1, 0)$.

Esercizio

Sia $W = V(xy) \subset K^2$ *e sia* $F\colon K^2 \setminus W \to K^2$ *definita da* $F(x,y) = (\frac{x}{y^2}, \frac{y}{x^2}, x)$. *Calcolare* $\overline{F(K^2 \setminus W)}$.

Varietà unirazionali e razionali

Definizione

Una varietà $V \subset K^n$ *immagine di una parametrizzazione razionale si dice* _unirazionale_*. In altri termini, se* V *è unirazionale deve esistere* F *come in (0.4) e*

$$\overline{F(K^m \setminus W)} = V.$$

Se $K = \mathbb{C}$ *una varietá unirazionale per cui esiste una parametrizzazione razionale* F *iniettiva si dice* _razionale_*.*

Unirazionale versus razionale

Ogni varietá razionale é anche unirazionale. Le curve di Fermat non sono unirazionali se $n \geq 3$ mentre sono razionali se $n \leq 2$. Un classico teorema di Lüroth afferma che le curve unirazionali sono razionali.

Il teorema di implicitizzazione razionale dà un algoritmo per trovare le equazioni di varietà unirazionali.

Nel caso di curve che ammettono una parametrizzazione razionale con un solo parametro l'algoritmo precedente può essere semplificato. Il seguente lemma mostra in sostanza che il fenomeno visto con l'esempio 0.5 non si può ripetere nel caso di curve.

Lemma

Sia K un campo infinito. Consideriamo le equazioni $x_i = \frac{f_i(t)}{g_i(t)}$ per $i = 1, \ldots, n$ con $f_i, g_i \in K[t]$ polinomi primi tra loro. Sia $W := V(g_1 \cdots g_n) \subset K$, sia $F \colon K \setminus \ W \to \ K^n$ data da $F(t) := (\frac{f_1(t)}{g_1(t)}, \ldots, \frac{f_n(t)}{g_n(t)})$, sia $I = (\ldots g_i(t)x_i - f_i(t), \ldots) \subset K[t, x_1, \ldots, x_n]$ e sia $i \colon K \to K^{n+1}$ definita da $i(t) := (t, \frac{f_1(t)}{g_1(t)}, \ldots, \frac{f_n(t)}{g_n(t)})$. Allora

- *i)* $V(I) = i(K \setminus W)$
- *ii)* $\overline{F(K \setminus W)} = V(I_1)$

Notiamo che non c'è bisogno di alcuna variabile ausiliaria.

Dimostrazione del Lemma sulle parametrizzazioni razionali di curve

Dimostrazione.

Si considera il diagramma

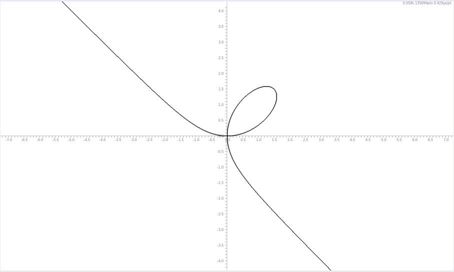
$$\begin{tikzcd} & V(I) \arrow[r, phantom, "\subset"] & K^{n+1} \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ K \setminus W \arrow[ur, "i"] \arrow[rrr, "F"] & & & K^n \end{tikzcd}$$

Per provare i) abbiamo che l'inclusione $\supset$ è banale. Viceversa sia $(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in V(I)$. Allora $g_i(\tilde{t})\tilde{x}_i - f_i(\tilde{t}) = 0 \quad \forall i$. Se $g_i(\tilde{t}) = 0$ allora anche $f_i(\tilde{t}) = 0$ e quindi f_i, g_i sarebbero divisibili per $t - \tilde{t}$ in contrasto con l'ipotesi. Pertanto $\tilde{t} \notin W$ e quindi si ricava $\tilde{x}_i = \frac{f_i(\tilde{t})}{g_i(\tilde{t})}$. Adesso ii) segue come nel teorema di implicitizzazione polinomiale. $\square$

Il folium di Cartesio

Esempio

Il Folium di Cartesio.



Si considera la parametrizzazione razionale

$$\begin{cases} x & = \frac{3t}{1+t^3} \\ y & = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \tag{0.5}$$

L'equazione del Folium di Cartesio. L'immagine della parametrizzazione è chiusa.

Per il Lemma sulle parametrizzazioni razionali di curve , per trovare equazioni implicite, occorre eliminare la t dall'ideale

$$\left((1+t^3)x - 3t, (1+t^3)y - 3t^2\right) \tag{0.6}$$

e si ottiene l'equazione

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \tag{0.7}$$

Per il Lemma suddetto l'equazione rappresenta la chiusura del luogo descritto dalla parametrizzazione. Quindi
$\overline{F(K \setminus W)} = V(I_1)$.
Viceversa ogni punto in $\mathbb{C}^2$ che soddisfa l' equazione (0.7) proviene dalla parametrizzazione. Infatti il punto $(x, y) = (0, 0)$ viene ottenuto per $t = 0$, mentre per gli altri valori di x e y uno dei coefficienti di t^3 in 0.6 è $\neq 0$ e quindi dal teorema di estensione si ha la tesi. Quindi in questo caso $F(K \setminus W) = \overline{F(K \setminus W)} = V(I_1)$.

Esercizio

Esercizio

Provare che ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *appartenente al Folium di Cartesio* $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ *proviene da un* $t_0 \in \mathbb{R}$ *secondo la parametrizzazione* (*(0.5)*)*.*

Suggerimento: $\mathbb{R}$ *non é algebricamente chiuso e quindi non si puó applicare il teorema di estensione. Posto* $f = (1+t^3)x - 3t$, $g = (1+t^3)y - 3t^2$, *possiamo supporre* $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ *ed abbiamo* $Res(f(x_0, y_0, t), g(x_0, y_0, t), t) = 0$*. Pertanto* $f(x_0, y_0, t)$ *e* $g(x_0, y_0, t)$ *hanno un fattore a comune in* $\mathbb{R}[t]$*. Se questo fattore ha grado due allora si puó scrivere* $t^3x_0 - 3t + x_0 = (t^2 + bt + c)(tx_0 - \alpha)$ *e* $t^3y_0 - 3t^2 + y_0 = (t^2 + bt + c)(ty_0 - \beta)$ *da cui* $-\alpha c = x_0$, $-\beta c = y_0$, $\beta x_0 = \alpha y_0$ *e quindi ...*