## Equazione del calore: caso non omogeneo

## Formula Duhamel

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \\ u = 0 & x \in \mathbb{R}^n \quad t = 0 \end{cases}$$

Prob. non omogeneo con cond. iniz. nulle, $f$ è funzione data

Consideriamo il prob. ausiliario, in cui $f(x,t)$ diventa C.I.

Sia $0 < s < t$ fissato

$$* \quad \begin{cases} \partial_t w(x,t) - \Delta_x w(x,t) = 0 & \mathbb{R}^n \times (s,+\infty) \\ w(x,s) = f(x,s) & t = s \end{cases}$$

$s$ è il tempo iniziale del problema ausiliario

La soluzione di $*$ è data da

$$w(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Psi(x-y,t-s)}_{= \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}} f(y,s)\,dy$$

Si verifica che

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t,s)\,ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x-y,t-s) f(y,s)\,dy\,ds$$

è soluz. del problema 1

Abbiamo il seguente Teorema

Sia $f \in C^2_1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ e supporto compatto

$\hookrightarrow$ $C^2$ risp. x e $C^1$ risp. a t

e

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\, dV(y)\, ds$$

Si ha

1) $\to u \in C^2_1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

2) $\to \partial_t u - \Delta u = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad t>0$

3) $\to \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = 0$

Proof.

La difficoltà tecnica è legata al fatto che $\varphi$ è singolare in $t=s$

Verifichiamo pt 2 e 3

Calcoliamo le derivate di u utilizzando f, ovvero scambiando le variabili nell'integrale

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y, t-s)\, f(y,s)\, dV(y)\, ds =$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y,s)\, f(x-y, t-s)\, dV(y)\, ds$$

Deriviamo risp tempo

$$\partial_t u = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,t) f(x-y,0)\, dV(y) +$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s) \underbrace{\partial_t f(x-y,t-s)}_{C^1 \text{ risp. a } t} dV(y)\, ds$$

$$\Delta_x u = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s)\, \Delta_x f(x-y,t-s)\, dV(y)\, ds$$

usiamo $\partial_t f(x-y,t-s) = -\partial_s f(x-y,t-s)$

$$\Delta_x f(x-y,t-s) = \Delta_y f(x-y,t-s)$$

$$\partial_t u - \Delta_x u = \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s) \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\, dV(y)\, ds}_{I}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,t) f(x-y,0)\, dV(y)$$

Come al solito, isoliamo la singolarità di $\psi$ in $I$ dividendo l'integrale in 2 parti

$$I = \underbrace{\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s) \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\, dV(y)\, ds}_{A}$$

$$+ \overbrace{\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s) \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\, dV(y)\, ds}^{B}$$

Verifichiamo che $B$ può essere reso piccolo a piacere fissando $\varepsilon$

$$|B| \le \int_0^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s)\Big(\underbrace{\underset{\le \|\partial_t f\|_{L^\infty}}{|\partial_t f|} + \underset{\le \|\Delta f\|_{L^\infty}}{|\Delta f|}}_{\text{Esistono xchè } f \text{ è } C^2_1 \text{ e supp. lim.}}\Big)\, dV(y)\, ds$$

$$|B| \le \left( \|\partial_t f\|_{L^\infty} + \|\Delta f\|_{L^\infty} \right) \underbrace{\int_0^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s)\, dV(y)}_{=1}\, d\varepsilon =$$

$$= \left( \|\partial_t f\|_{L^\infty} + \|\Delta f\|_{L^\infty} \right) \varepsilon$$

Consideriamo $A$

$$\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s)(-)\partial_s f(x-y, t-s)\, dV(y)\, ds$$

Integ. per parti rispetto a $s$

$$= \int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_s \psi(y,s)\, f(x-y, t-s)\, dV(y)\, ds$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s) f(x-y, t-s) \Big|_{s=\varepsilon}^{s=t} =$$

$$\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_s \psi\, f(x-y, t-s) - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,t) f(x-y, 0)\, dV(y) + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,\varepsilon) f(x-y, t-\varepsilon)\, dV(y)$$

Analogamente, l'altro termine

$$\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s)\,(-)\,\Delta_y f(x-y,t-s)\,dV(y)\,ds =$$

$$= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \vec{\nabla}_y \psi(y,s) \cdot \vec{\nabla}_y f(x-y,t-s)\,dV(y)\,ds =$$

$$= -\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y \psi(y,s)\, f(x-y,t-s)\,dV(y)\,ds$$

Otteniamo

$$A = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left( +\partial_s \psi(y,s) - \Delta_y \psi(y,s) \right)}_{\substack{= 0 \\ \text{qui } s>0}} f(x-y,t-s)\,dV(y)\,ds$$

$$- \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,t)\, f(x-y,0)\,dV(y)} + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,\varepsilon)\, f(x-y,t-\varepsilon)\,dV(y)$$

$$+\partial_t u - \Delta_x u = A + B = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,\varepsilon)\, f(x-y,t-\varepsilon)\,dy + o(\varepsilon)$$

nel limite $\varepsilon \to 0$, $f$ è regolare, quindi otteniamo

$$\partial_t - \Delta_x u = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,\varepsilon)\, f(x-y,t)\,dy}_{\text{identico al valore delle CI del prob. calore omogeneo}} = f(x,t)$$

Infine, per le c. I.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |w(x,t)| \le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x-y, t-s)| \, \psi(y,s) \, dV(y) \, ds$$

$$= \|f\|_{L^\infty} \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,s) \, dV(y)}_{\shortparallel \atop 1} \, ds = \|f\|_{L^\infty} \, t$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} w(x,t) = 0$$

Formula risolutiva per l'eq. del calore inomogenea con c. I. assegnate

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = f & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & t=0 \end{cases}$$

Sfruttiamo la linearità dell'equazione e sommiamo le soluz. ~~ottenute~~ per l'eq. om. e per la non omog.

$$u(x,t) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t) g(y) \, dV(y)}_{v \,:\, (\partial_t - \Delta) v = 0 \atop v(0) = g} + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y, t-s) f(y,s) \, dV(y) \, ds}_{w \,:\, (\partial_t - \Delta) w = f \atop w(0) = 0}$$

## Unicità della soluz. dell'eq. del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$

Problema non banale: si dimostra che al massimo può esistere una soluzione fisicamente accettabile, ovvero con condizioni di crescita ragionevoli (nello spazio può crescere al max. esponenzialmente)

Si ha il seguente

Teorema: Sia $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ allora esiste al più una soluzione $u \in C^2_1(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ dell'eq. calore non omog. con CI assegnate

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = f(x,t) & \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u(x,0) = g(x) & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

che soddisfi la seguente maggiorazione

$$|u(x,t)| \leq A e^{\alpha |x|^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \; t \in [0,T]$$

per qualche $A, \alpha \in \mathbb{R}^+$

E' interessante trovare un controesempio: solut. di Tychonoff.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & t > 0 \\ u = 0 & t = 0 \end{cases}$$

Solut. "fisica" $u = 0$ temperat. iniz. nulla e assenza di sorgenti di calore

Sol. Tychonoff. $u(x,t) = 0 \quad t < 0$

$u(x,t) \neq 0 \quad t > 0$

ma con crescita estremamente rapida per $t = 0$