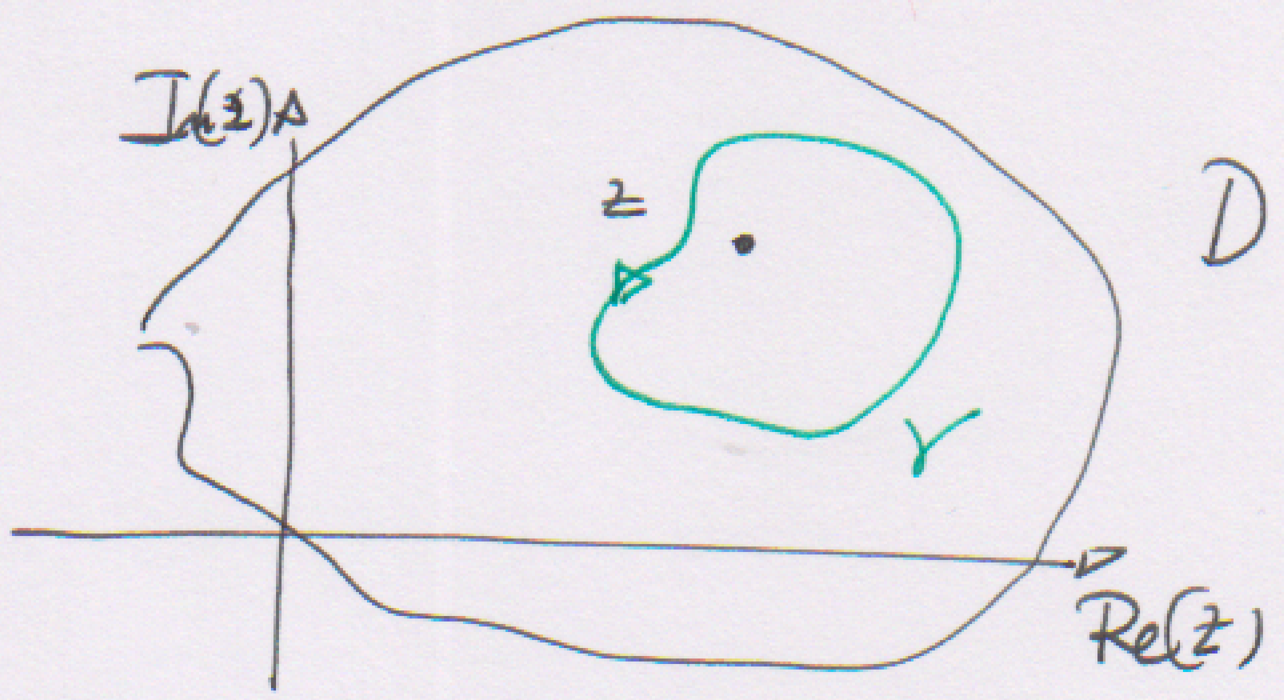
Un risultato di analisi complessa: formula di Cauchy

Sia $f(z): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una f. analitica in un insieme $D \in \mathbb{C}$

f è infinitamente differenziabile in D e vale la seguente formula

$$\frac{d^{(k)}f}{dz}(z) = \frac{k!}{(2\pi i)} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z'-z)^{k+1}} dz'$$

dove γ è una curva chiusa contenuta in D che circonda il punto z ed è percorsa in senso antiorario

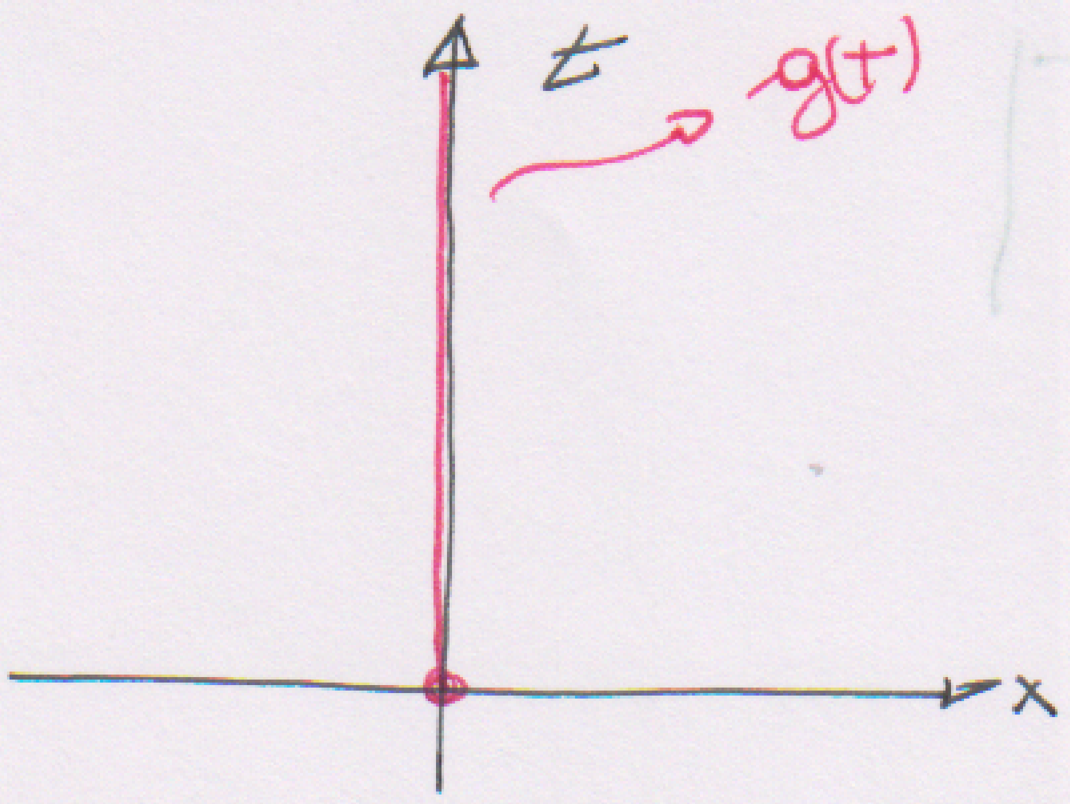


Non unicità del problema del calore, soluzione di Tychonoff

Cerchiamo una soluzione non banale dell'eq. del calore in 1 dimensione spaziale con c.I nulle

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_t u - \partial^2_{x^2} u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = 0 & \text{c.I.} \end{cases}$$

Tychonoff costruisce una soluzione u che è nulla per $t=0$ e $\neq 0$ per $t>0$



Immaginiamo di fornire una funz. $g(t)$ t.c. $g(t)=0$ per $t \leq 0$ e per cui $u(0,t) = g(t)$: g è una restrizione di u ~~[illegible]~~ $x=0$

Consideriamo lo sv. in serie della u attorno a $x=0$

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)\, x^j \quad \Rightarrow \text{sviluppo formale}$$

imponiamo che u sia sol. eq. calore e che $\partial_x u(t,0) = 0$

$$\partial_t w(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \partial_t w_j(t)\, x^j$$

$$\partial_x w(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(t)\, j\, x^{(j-1)}$$

$$\partial_x^2 w(x,t) = \sum_{j=2}^{\infty} w_j(t)\, j\,(j-1)\, x^{(j-2)} \overset{j'=j-2}{=}$$

$$= \sum_{j'=0}^{\infty} w_{j'+2}\, (j'+2)(j'+1)\, x^{j'}$$

$$\partial_t - \partial_x w = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\partial_t w_j - (j+2)(j+1) \overbrace{}^{w_{j+2}} \Big) x^j = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t w_j = (j+2)(j+1)\, w_{j+2}}$$

In particolare per $x=0$

$$w(0,t) = w_0(t) = g(t)$$

$$\partial_x w(0,t) = w_1(t) = 0$$

Conoscendo w_0 e w_1 posso trovare tutti gli altri coefficienti per ricorsione

$$w_{j+2} = \frac{1}{(j+2)(j+1)}\, \partial_t w_j$$

Parto da $j=1 \Rightarrow w_3 = 0$

$w_3 = 0 \Rightarrow w_5 = 0 \Rightarrow \ldots$ tutti i coeff dispari si annullano

Coeff. pari

$j=0 \Rightarrow \quad u_2(t) = \frac{1}{2}\partial_t u_0 = \frac{1}{2}\partial_t g(t)$

$j=2 \Rightarrow \quad u_4 = \frac{1}{4\cdot 3}\partial_t u_2 = \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}\partial^2 g(t)$

$j=4 \Rightarrow \quad u_6 = \frac{1}{6\cdot 5}\partial_t u_4 = \frac{1}{6!}\partial^3 g(t)$

$\Rightarrow \quad u_j = \frac{1}{j!}\partial_t^{j/2} g(t)$

Poiché j è pari scriviamo $j=2k$ $\quad u_{2k}(t) = \frac{1}{(2k)!}\partial_t^{(k)} g(t)$

Otteniamo l'espansione

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)\, x^{2k}}{(2k)!}$$

che è una funzione che per costruzione formalmente è soluz. eq. del calore e si annulla per $t \leq 0$

Ma se non verifichiamo la convergenza lo sviluppo non ha nessun senso!

Verifichiamo la conv. per una funzione $g(t)$ specifica

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t>0 \\ 0 & t\leq 0 \end{cases}$$

Utilizziamo la formula di Cauchy per stimare la crescita delle derivate di $g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t>0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Si verifica che $g(t)$ è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow g(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ / ovvio per $t>0$, per $t \to 0$

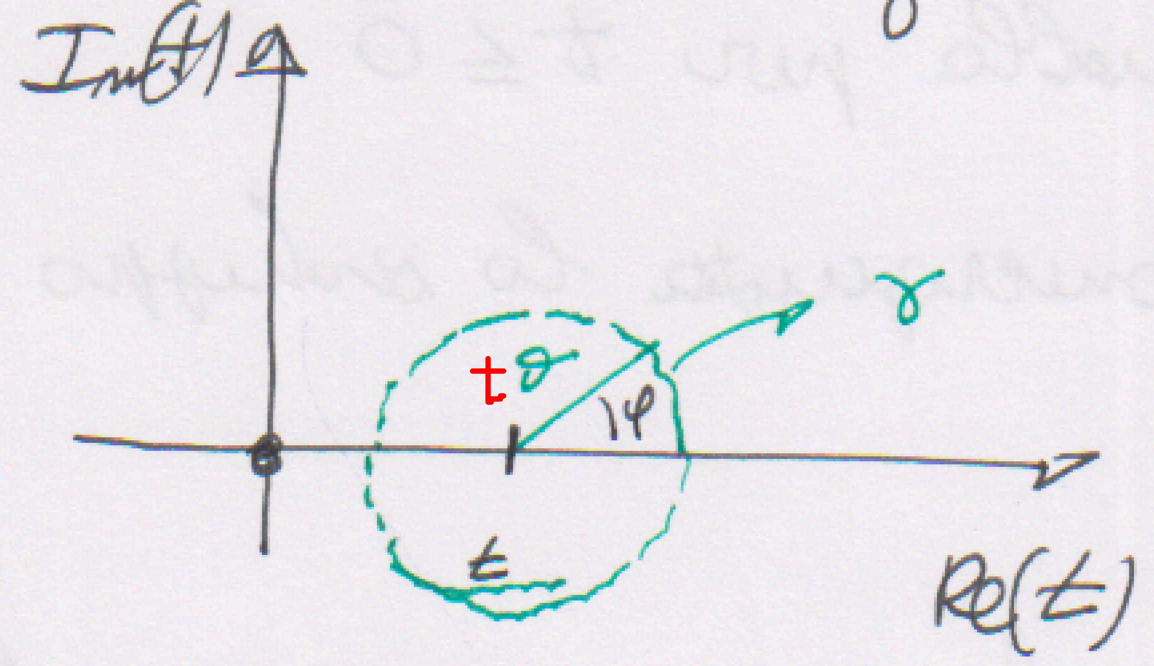
si verifica che e^{-1/t^2} è sempre il termine

dominante $\frac{d^n}{dt^n} e^{-1/t^2} = \underbrace{P(t)}_{\text{polinomio frazionario}} e^{-1/t^2} \xrightarrow{t\to 0} 0$

Si ha che g è analitica in $\mathbb{C} - \{0\}$

Applichiamo la f. di Cauchy

$$\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} g(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(t')}{(t'-t)^{k+1}}\, dt'$$



γ: cerchio di centro t e raggio θt con θ da assegnare

$$\gamma = t + t\theta e^{i\varphi} \equiv t'$$

Otteniamo

$$\frac{d^k}{dt^k} g(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{1}{(t+t\theta e^{i\varphi})^2}}}{(t\theta e^{i\varphi})^{k+1}} (+i) e^{i\varphi} \theta t \, d\varphi$$

$$dt' = d(t + t\theta e^{i\varphi}) = i t\theta e^{i\varphi} d\varphi$$

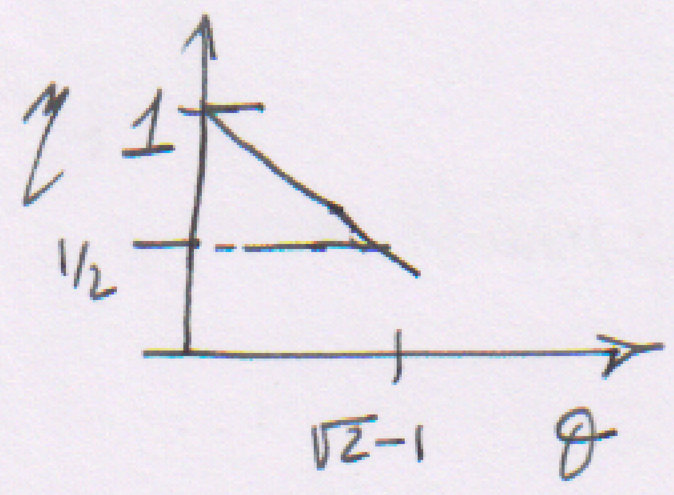
$$\frac{d^k g}{dt^k} = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{1}{t^2(1+\theta e^{i\varphi})^2}}}{(t\theta)^k e^{ik\varphi}} d\varphi$$

$$\left| \frac{d^k g}{dt} \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{(t\theta)^k} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{t^2} \mathrm{Re} \left(\frac{1}{1+\theta e^{i\varphi}} \right)^2} d\varphi$$

$$|e^{\alpha}| = e^{\mathrm{Re}\,\alpha} \quad e \ t \ \text{è reale positivo}$$

Posto $\eta(\theta) = \min\limits_{\varphi \in [0, 2\pi)} \mathrm{Re} \left(\frac{1}{1+\theta e^{i\varphi}} \right)^2 \xrightarrow{\varphi = 0} \eta(\theta) = \frac{1}{(1+\theta)^2}$

$\eta(0) = 1 \Rightarrow \eta$ è regolare, $\exists\ \theta$ suff piccolo t.c. $\eta(\theta) \geq \frac{1}{2}$



$$\mathrm{Re} \frac{1}{(1+\theta e^{i\varphi})^2} \geq \eta(\theta) \underset{\theta \text{ suff piccolo}}{\geq} \frac{1}{2} \Rightarrow -\mathrm{Re} \frac{1}{(1+\theta e^{i\varphi})^2} \leq -\frac{1}{2}$$

Otteniamo

$$\left| \frac{d^{(k)} g}{dt^k} \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{(\theta t)^k} \int_0^{2\pi} e^{-t/2} = e^{-\frac{1}{2t^2}} \frac{k!}{(\theta t)^k}$$

Questo permette di stimare il valore assoluto della serie

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{(k)} g}{dt}(t) \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$$|u(x,t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \left| \frac{d^{(k)} g}{dt^k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{k!\,(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2t^2}}$$

dove $\frac{k!}{(2k)!} = \frac{k!}{2k \cdot (2k-1) \cdots (k+1)\,k\,(k-1) \cdots 1} =$

$$\frac{1}{(2k)(2k-1)(2k-2) \cdots (k+1)} \leq \frac{1}{k!}$$

quindi $|u(x,t)| \leq e^{-\frac{1}{2t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{\theta t} \right)^k \frac{1}{k!} = e^{\left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{\theta}\right) \frac{1}{t}}$

La serie che def. $u(x,t)$ è assolutamente convergente

$\Rightarrow$ converge

Inoltre la stima precedente mostra che, fissato x

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = 0$$

Nota sulla condizione di crescita. Il Th di unicità di sol. richiede $|u(x,t)| \le A e^{\alpha |x|^2}$ II

La stima che abbiamo fatto, per $t>0$ è in accordo con

$t = t_0 > 0 \qquad |u(x,t)| \le e^{\left(-\frac{1}{2t_0} + \frac{x^2}{8}\right)\frac{1}{t_0}}$

Solo che la nostra stima diverge quando $t \to 0$

quindi, <u>non so</u> come si comporta u per $t=0$, quindi

non posso garantire che (II) sia soddisfatta (ed infatto non lo è).

Dovrei trovare un minorante tipo $|u(x,t)| \ge e^{\frac{x^2}{t}\alpha} A$