Equazione alle onde caso non omogeneo

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \quad n=1\dots,3 \\ u=0 \quad \partial_t u = 0 & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Metodo di Duhamel: consideriamo la funzione $u(x,t;s)$ soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u=0 \quad \partial_t u = f(x,s) & \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{cases}$$

consideriamo $u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)\,ds$

che fornisce la soluzione di (1)

Verifichiamo che u così definita soddisfa il sistema (1)

Consideriamo $\partial_t u(x,t) = \underbrace{u(x,t,t)}_{=0} + \int_0^t \partial_t u(x,t,s)\,ds$

$$\partial_t^2 u(x,t) = \underbrace{\partial_t u(x,t,t)}_{=f(x,t)} + \int_0^t \partial_t^2 u(x,t;s)\,ds$$

$$\partial_t^2 u(x,t) = f(x,t) + \int_0^t \partial_t^2 u(x,t;s)\,ds$$

$$\Delta u(x,t) = \int_0^t \Delta_x u(x,t;s)\,ds = \int_0^t \partial_t^2 u(x,t;s)\,ds$$

Le C.I. sono immediate

Applichiamo il metodo Duhamel per $n=1$ e $n=3$

$n=1$
$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x,t) & \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u=0 \quad \partial_t u = 0 & t=0 \end{cases}$$

Equazione per $u(x,t;s)$
$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t,s) - \partial_x^2 u(x,t,s) = 0 & \mathbb{R}\times(0,s) \\ u=0 \qquad \partial_t u = f(x,t) & t=s \end{cases}$$

Formula d'Alambert
$$u(x,t,s) = \frac{1}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+t-s} f(y,s)\,dy$$

Soluzione Duhamel
$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t,s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\,ds$$

$s' = t-s$
$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-s'}^{x+s'} f(y,t-s')\,dy\,ds'}$$

Caso $n=3$

Formula di Kirchhoff. per $g=0$ $h=f(x,s)$

$$u(x,t,s) = (t-s) \fint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)\, dS(y)$$

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{(t-s)}{4\pi (t-s)^2} \int_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)\, dS(y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left(\int_{\partial B(x,t-s)} \frac{f(y,s)}{t-s}\, dS(y) \right) ds$$

$$r = t-s \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_0^t \int_{\partial B(x,r)}}_{\text{Formule coarea}} \frac{f(y,t-r)}{r}\, dS(y)\, dr \qquad r = |y-x|$$

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{f(y, t-|y-x|)}{|y-x|}\, dV(y)}_{\text{Formula del potenziale ritardato}}$$

Equazione delle onde: unicità di soluzione

Metodo dell'energia

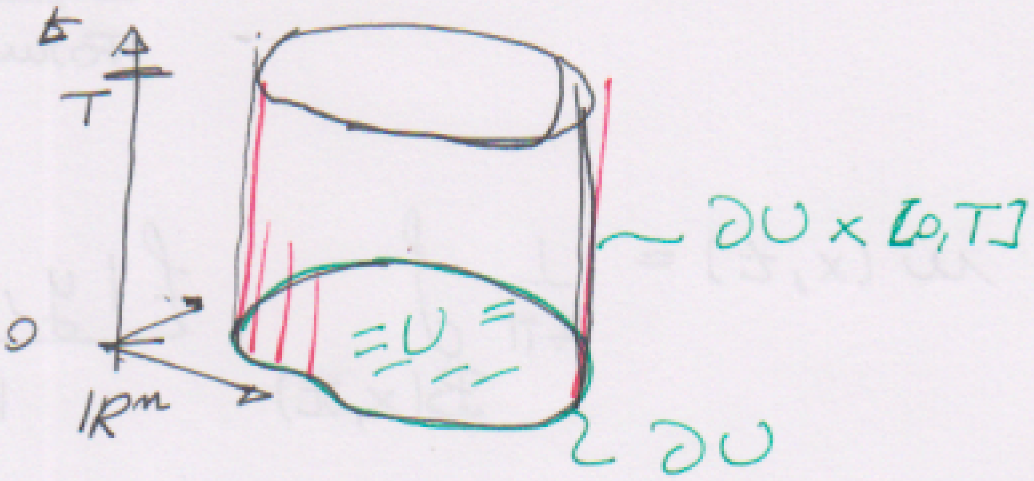
definiamo Energia di u in $U \in \mathbb{R}^n$ la quantità

$$E(u,t) = \frac{1}{2} \int_U \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \right) dV(x)$$

Th unicità:

Esiste al più una soluzione del prob. onde in $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$(1) \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & U \times (0,T) \\ u = g & \partial U \times [0,T] \\ u = g \quad \partial_t u = h & U \times \{t=0\} \end{cases}$$



Dimostraz.

siano u, v 2 diverse soluz. di (1)

$\Rightarrow w = u - v$

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & U \times (0,T) \\ w = 0 & \partial U \times [0,T] \\ w = 0 \quad \partial_t w = 0 & U \times \{t=0\} \end{cases}$$

Valutiamo l'energia relat. a w

$$E(w,t) = \frac{1}{2}\int_U \left((\partial_t w)^2 + |\nabla w|^2 \right) dV(x)$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_U \left(\partial_t w\, \partial_t^2 w + \nabla w \cdot \nabla \partial_t w \right) dV$$

$w=0$ in ∂U

$$\int_U \nabla w \cdot \nabla \partial_t w \, dV(x) = \int_{\partial U} \partial_t w \,(\nabla w)\cdot \nu \, dS(x)$$

$$- \int_U \partial_t w \, \Delta w \, dV(x)$$

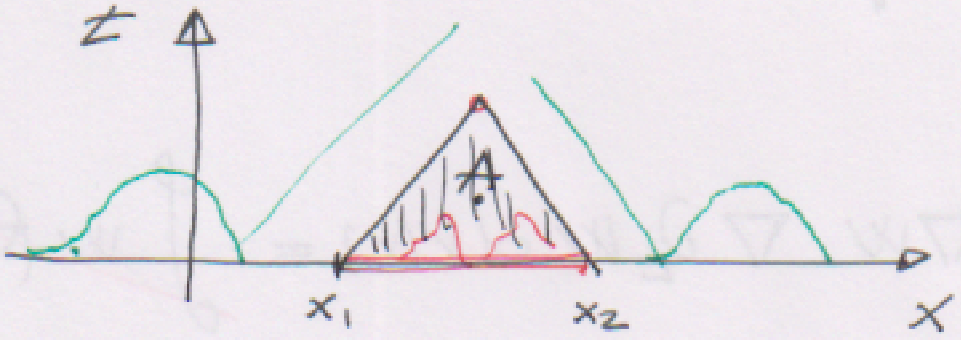
$$\frac{dE}{dt} = \int_U \partial_t w \left(\partial_t^2 w - \Delta w \right) dV(x) = 0$$

$E(0) = 0 \Rightarrow w = 0$ a.e. $\Rightarrow u = v$

Eq. onde: propagazione a velocità finita di un segnale

Definizione: dominio di influenza

Ex caso 1D

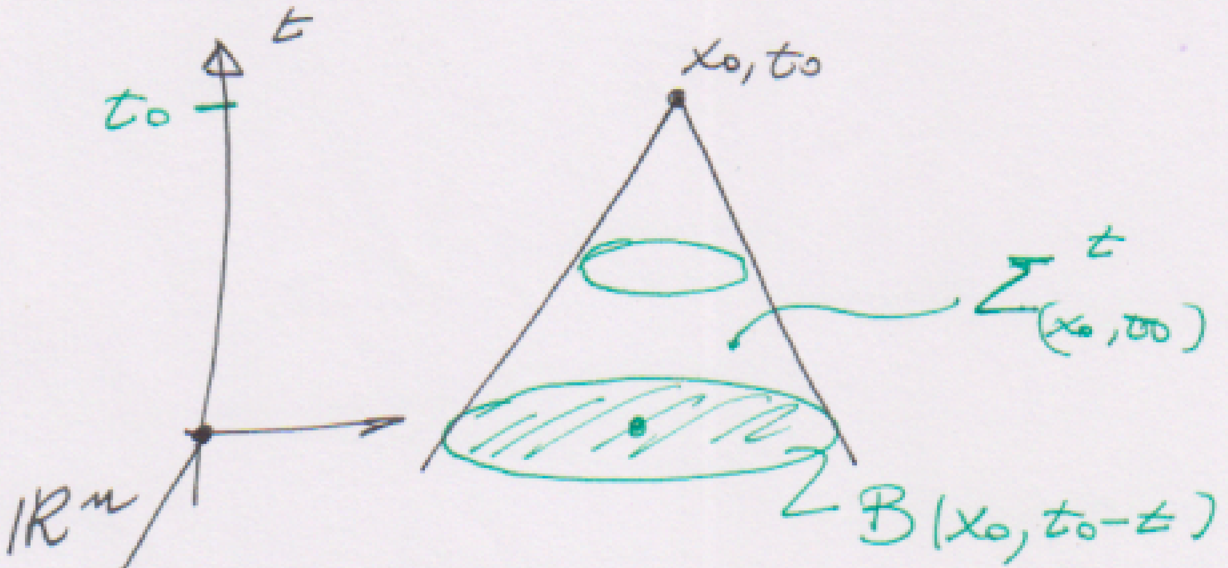


Zona del dominio spazio-tempo influenzata da un certo sottoinsieme del dato iniziale

Per conoscere la soluz. in A è sufficiente conoscere il dato iniziale in $[x_1, x_2]$

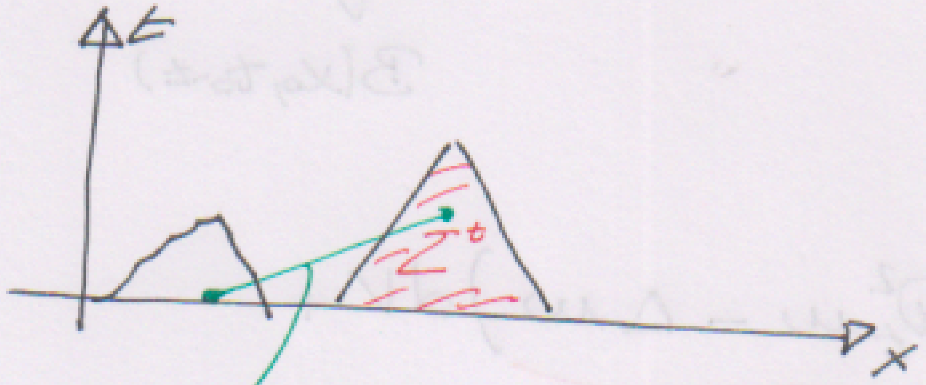
Defin. in $\mathbb{R}^n$ di cono di influenza

$$\Sigma^t_{(x_0,t_0)} = B(x_0, t_0 - t)$$



Th. Se $u = \partial_t u = 0$ in $B(x_0, t_0) \Rightarrow$
$u = 0$ in $\Sigma^t_{(x_0,t_0)}$

NOTA $B(x_0,t_0) = \Sigma^0_{(x_0,t_0)}$ ("base" del cono)



$\triangleright$ non esistono traiettorie spazio-tempo di questo tipo: posso cambiare arbitrariamente le c. I. fuori dalla base del cono e questo non avrà influenza dentro il cono di influenza

Dimostrazione

Utilizzo la def. di Energia e la valuto dentro il c.d.inf.

$$E(u,t) = \frac{1}{2}\int_{B(x_0,t_0-t)} \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \right) dV(x)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^{t_0-t} d\rho \left(\int_{\partial B(x_0,\rho)} \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \right) dS(x) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(-)\int_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 \right) dS(x) +$$

$$+ \int_{B(x_0,t_0-t)} \left(\partial_t u \, \partial_t^2 u + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \partial_t u \right) dV(x)$$

Usiamo $\displaystyle\int_{B(x_0,t_0-t)} (\nabla u \cdot \nabla \partial_t u)\, dV(x) =$

$$= \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} \partial_t u \,(\nabla u)\cdot \vec{\nu}\, dS - \int_{B(x_0,t_0-t)} \Delta u \cdot \partial_t u \, dV$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_{B(x_0,t_0-t)} \partial_t u \,\big(\underbrace{\partial_t^2 u - \Delta u}_{=0}\big)\, dV +$$

$$+ \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} \Big[\underbrace{(\nabla u \cdot \vec{\nu})\, \partial_t u}_{A} - \underbrace{\tfrac{1}{2}\big((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \big)}_{B} \Big] dS$$

Notiamo

$$|(\bar{\nabla} u \cdot \bar{\nu})\, \partial_t u| = |\nabla u \cdot \nu|\, |\partial_t u| \leq$$

$$\leq |\bar{\nabla} u|\, \underbrace{|\bar{\nu}|}_{=1}\, |\partial_t u| \leq \frac{1}{2} \left(|\nabla u|^2 + |\partial_t u|^2 \right)$$

Cauchy

$\Rightarrow |A| \leq |B|$ poiché $B \geq 0 \Rightarrow A - B \leq 0$

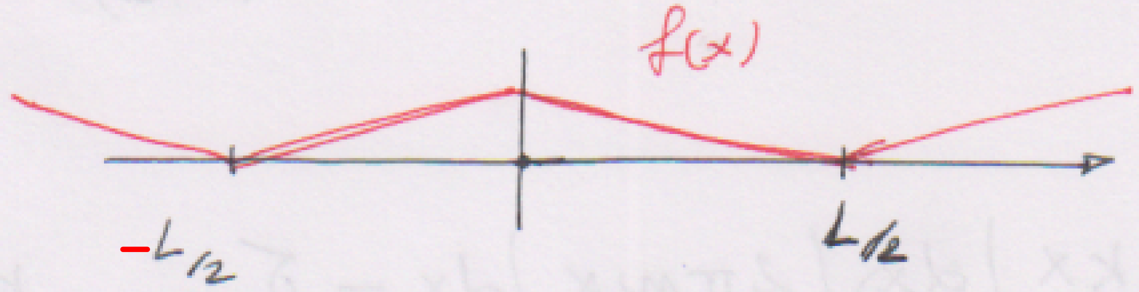
$\Rightarrow \dfrac{dE}{dt} \leq 0$ $\quad \underbrace{E(0) = 0}_{\text{Energia alla base del cono}}$ $\quad$ E def. pos. $\Rightarrow E(t) = 0$ $\quad t \in [0,T]$

$\Rightarrow u(x,t) = 0 \quad \forall\, t \in [0,T]$

Sviluppo in serie di Fourier

Consideriamo una funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

periodica con periodo L



assumiamo $f(x)$ continua. Si dimostra che $f(x)$ può

essere espressa come una serie in seni e coseni

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n 2\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n 2\pi x}{L}\right)\right)$$

in cui $$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$$

Verifichiamo alcune proprietà elementari delle f. seno e cos

1) $$\int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)dx = \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)dx = 0$$

$\forall\ k \in N^+$

2) $$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \delta_{k,m} \qquad k,m \in N^+$$

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \delta_{k,m}$$

3) $$\int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) = 0$$

Verifichiamo prop. 1)

$$\int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)dx = -\frac{L}{2\pi k}\cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)\Bigg|_{-L/2}^{L/2} =$$

$$= -\frac{L}{2\pi k}\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{L}\frac{L}{2}\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{L}k\frac{L}{2}\right)\right) = 0$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)dx = \frac{L}{2\pi k}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = 0$$

Prop 2

usiamo $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x(k-m)\right)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x(k+m)\right)dx$$

se $k \neq m$ per prop. 1 entrambi gli integ. si annullano

se $k = m$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left(1 + \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{L}2k\right)}_{0}\right)dx = \frac{L}{2}$$

analogo per il termine seno - seno e seno-coseno

usando $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

Utilizzando queste proprietà possiamo verificare la coerenza della s. d. FOURIER

1

Sia $f(x) = A + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)\right)$

allora $a_m = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(2\frac{\pi m}{L}x\right)dx$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx \qquad A = \frac{a_0}{2}$$

Verifica. Moltip. ① per $\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)$ $m \in \mathbb{N}^+$

ed integriamo

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)dx = A\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)dx}_{=0} +$$

$$+\sum_n \left\{ a_n \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx}_{\frac{L}{2}\delta_{nm}} + \right.$$

$$\left. \underbrace{b_n\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx}_{=0} \right\}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)dx = a_m\frac{L}{2}$$

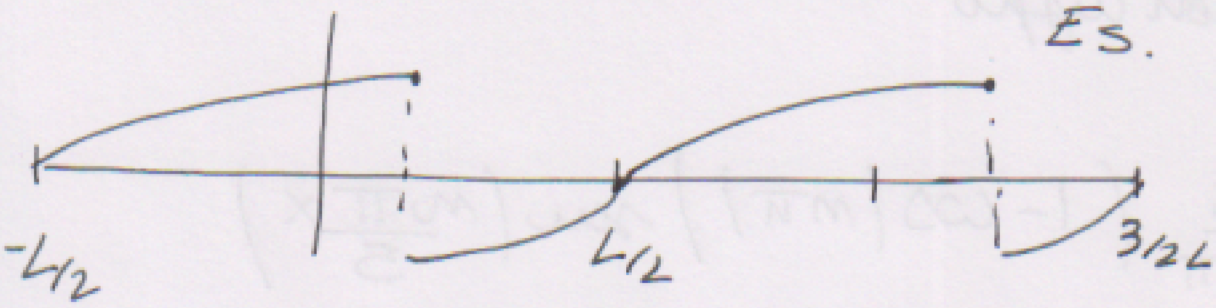
analogo risultato se moltiplico per $\sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right)$

per il termine a_0 integro ①

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,dx = A\int_{-L/2}^{L/2} dx + \sum_n \left\{ \underbrace{a_n\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx + b_n\int_{-L/2}^{L/2}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx}_{=0} \right.$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,dx = L\,A = L\,\frac{a_0}{2}$$

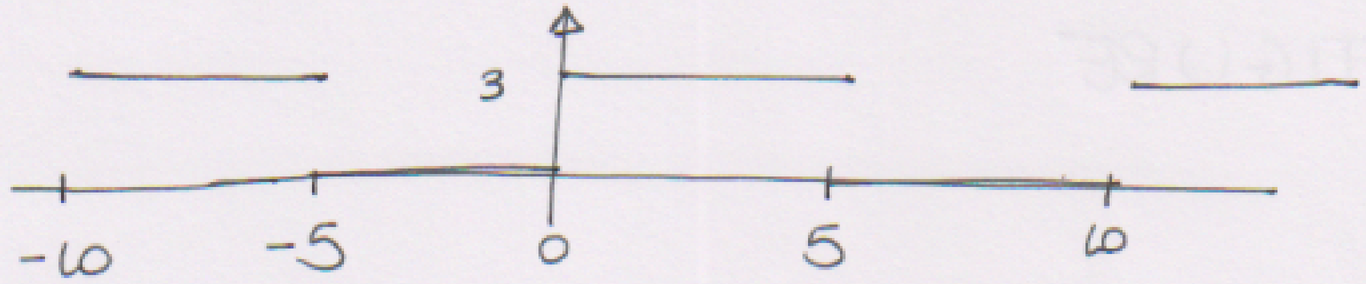
Sorprendentemente, si può dimostrare che lo S.S.F. resta valido anche per funzioni periodiche continue a tratti: (continue in $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ eccetto un numero finito di punti in corrispondenza dei quali però esiste il lim. destro e lim. sinistro)



Si dimostra che la serie F. converge puntualmente alla media fra lim dx e lim sx.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5<x<0 \\ 3 & 0<x<5 \end{cases} \quad \text{periodo } L=10$$



Calcoliamo i coeff. $a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$

$$= \frac{1}{5}\int_0^5 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)dx = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)\Big|_0^5 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx = \frac{1}{5}\,3\int_0^5 \sin\left(\frac{\pi x}{5}n\right)dx =$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{5}{\pi n}(-)\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_0^5 = \frac{3}{\pi n}\left(-\cos(n\pi)+1\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\,3\int_0^5 1\,dx = 3$$

otteniamo il seguente sviluppo

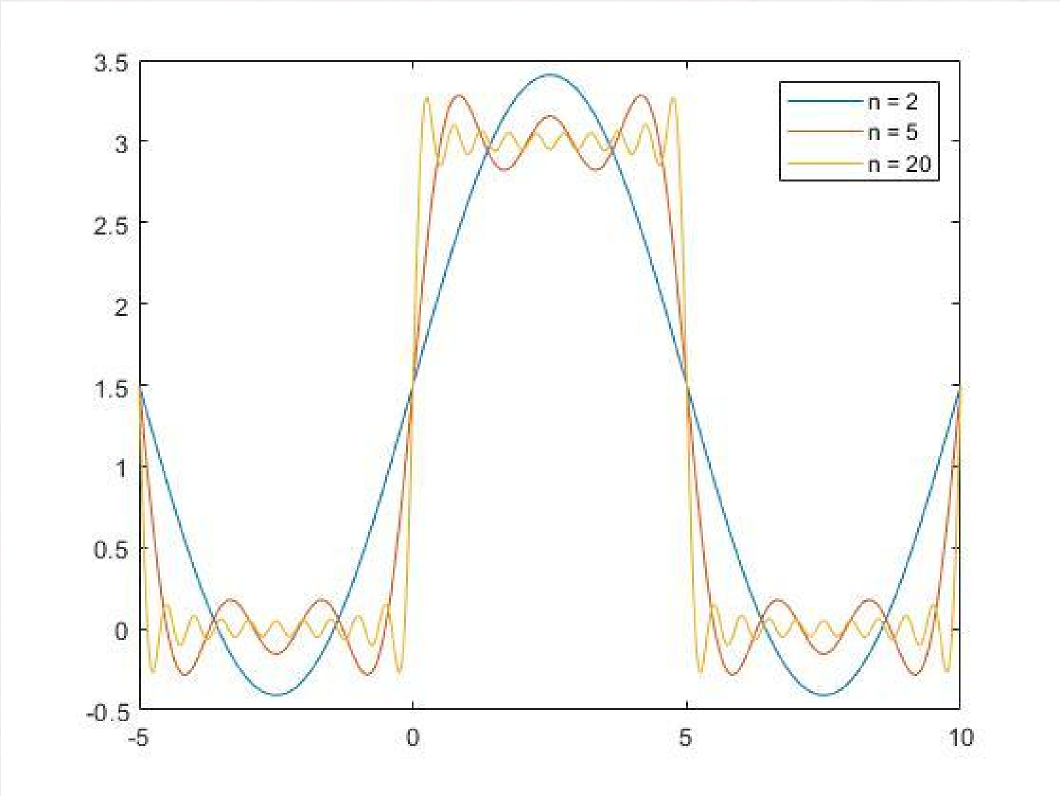
$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{5}x\right)$$

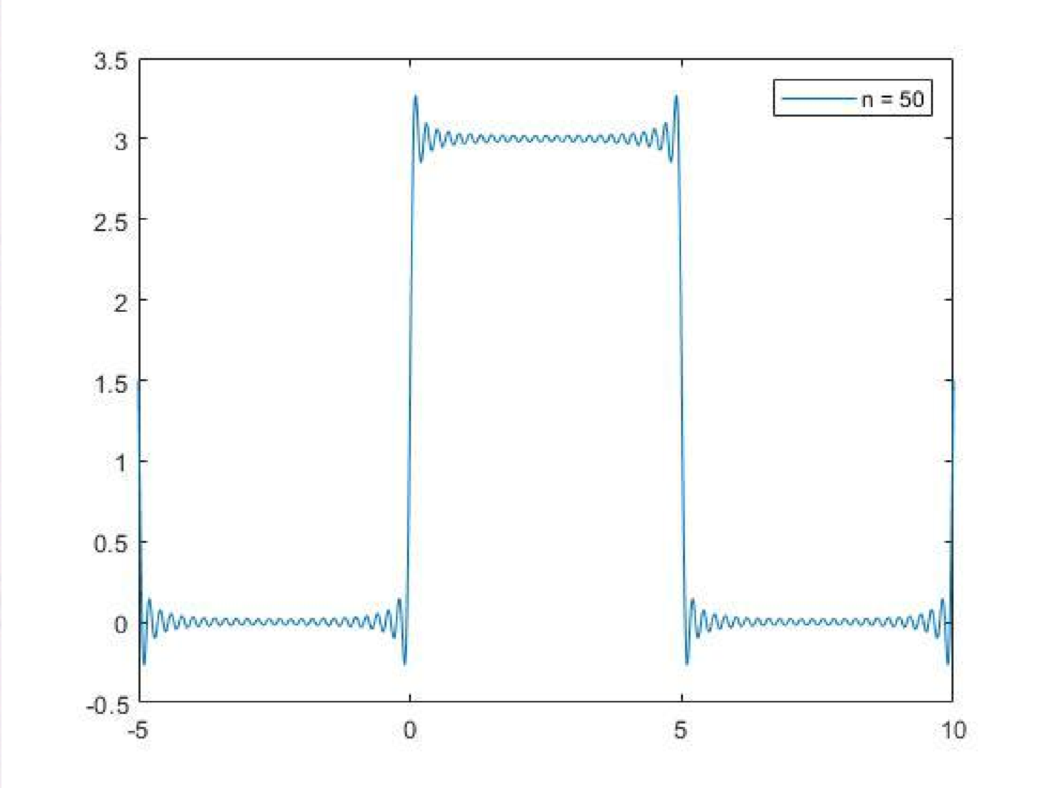
Notiamo che per $x=0$ $\quad f(0) = \frac{3}{2} = f(\pm 5)$

Inoltre $\quad f(x) = \sum f_n(x)$

$$n \to \infty$$

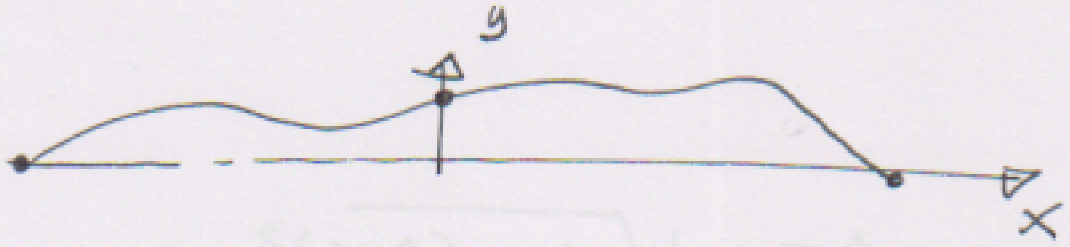
e vale $\quad |f_n(x)| \leq K\,\frac{1}{n} \to 0$





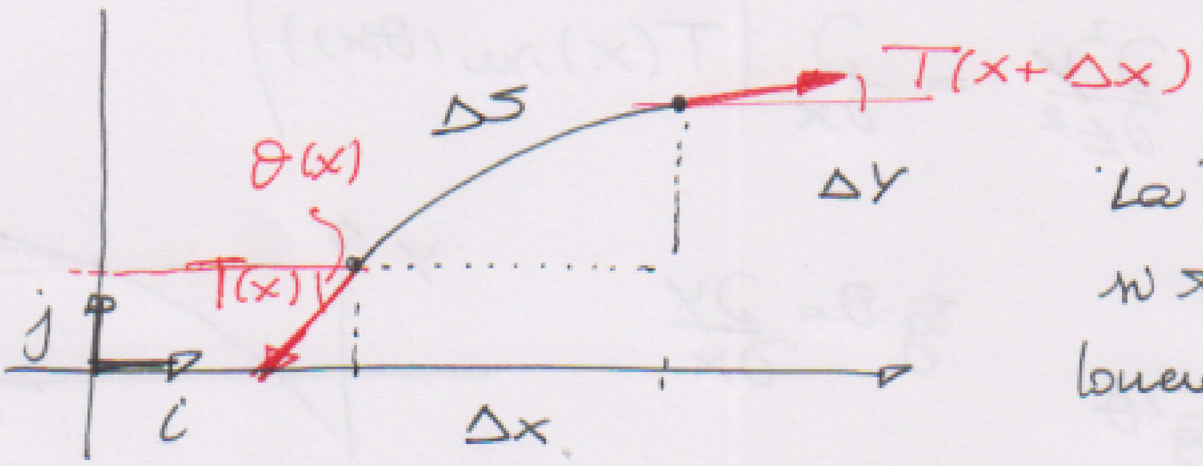
Equazione della corda vibrante: derivazione

Equazione che riproduce le vibrazioni trasverse di una corda tesa



$u(x,t)$ = spostamento verticale rispetto a orizz. dei punti della corda

Scriviamo l'equaz. di moto di un pezzettino di corda di lungh. ΔS



La Forza di Tensione si trasmette longitudinalmente (ovvero lungo la tg della corda)

$T(x)$: Tensione (Forza) trasmessa dal resto della corda

Il contributo netto delle Forze esterne su ΔS è

$$T(x+\Delta x) - T(x)$$

in direzione $\hat{j} \Rightarrow \left(T(x+\Delta x) - T(x)\right)\cdot\hat{j} =$

$$\Delta F_y = T(x+\Delta x)\sin(\theta(x+\Delta x)) - T(x)\sin(\theta(x))$$

$$\hat{i} \Rightarrow \Delta F_x = T(x+\Delta x)\cos(\theta(x+\Delta x)) - T(x)\cos(\theta(x))$$

Consideriamo solo lo spost. verticale della corda

La seconda legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ si scrive

$$\sigma \frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{T(x+\Delta x)\sin(\theta(x+\Delta x)) - T(x)\sin\theta(x)}{\Delta x}$$

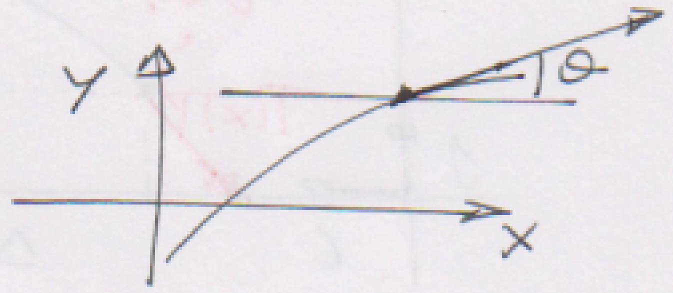
$\downarrow$
densità di massa
longit.

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Nel limite $\Delta_x \to 0$

$$\sigma \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x)\sin(\theta(x))\Big)$$

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$



Otteniamo

$$\sigma \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T\, \partial y/\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\right)$$

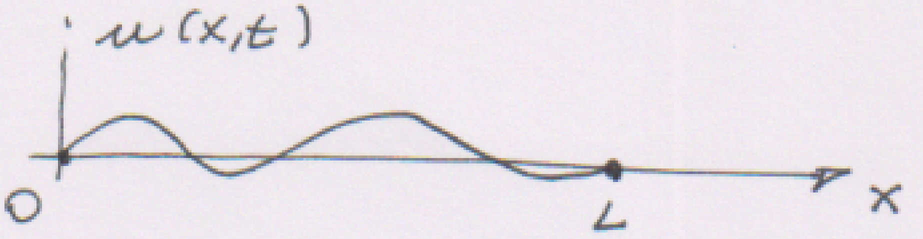
Assumiamo 2 Hp semplificatrici

- Piccole vibrazioni $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$
- Tensione costante lungo la corda

Trascuriamo $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ risp. a 1 e otteniamo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{T}{\sigma}$$

Problema della corda vibrante



$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & (0,L) \times (0,\infty) \\ u(0) = u(L) = 0 & \\ u = g(x) \quad \partial_t u = h(x) & [0,L] \times \{t=0\} \end{cases}$$

E' utile considerare 2 sotto casi e scrivere

$u = u_b + u_p$

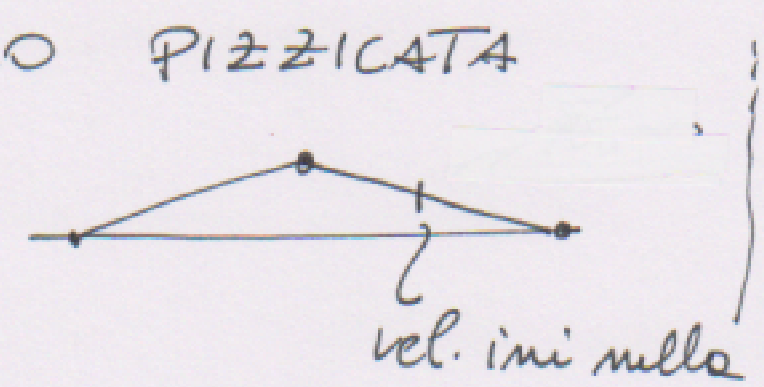
dove u_b è soluz. di (1) con $g=0$

sol. CORDA BATTUTA $\Rightarrow$ Posizione iniziale fuori Eq.: vel. iniz $=0$

u_p è sol. di (1) con $h=0$ $\Rightarrow$ Pos. iniz. in eq. veloc. iniz $\neq 0$

sol. CORDA PIZZICATA

$t=0$ PIZZICATA



BATTUTA