28 aprile 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di martedì 28 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Il modo migliore per capire come si applica il teorema di Herbrand per valutare la correttezza dei ragionamenti è fare qualche esempio.

Consideriamo le premesse

(i) nessun corvo è un fiore;
(ii) alcuni fiori sono gigli.

Vediamo se possiamo trarne come conseguenza logica il fatto che

(iii) alcuni gigli non sono corvi.

La scelta degli argomenti non è casuale: voi conoscete bene i fiori e i volatili, sapete che nessun fiore è un volatile e nessun volatile è un fiore (mmmhhh… se ci pensate un attimo, questi due fatti sono equivalenti…) e quindi vi sembra ovvio concludere che “alcuni gigli non sono corvi”; se è per questo, dite la verità, vi verrebbe addirittura voglia di osservare che *ogni* giglio (altro che “alcuni”!) non è un corvo, e che anche “alcuni corvi non sono gigli”. Ma se mi seguirete scoprirete presto che ***dalle premesse*** (i) e (ii) si può dedurre soltanto la (iii), e non si può dedurre né che “ogni giglio non è un corvo” né che “alcuni corvi non sono gigli”. Ricordate sempre le regole del gioco! A noi interessa ***la correttezza del ragionamento deduttivo***, non la correttezza della conclusione!

Gli enunciati del nostro ragionamento vanno “tradotti” in formule di un opportuno linguaggio della logica, e sarà certamente un linguaggio di logica dei predicati perché nei nostri enunciati compaiono le espressioni “nessuno” e “alcuni”. Questo linguaggio ce lo costruiamo ovviamente in economia, cercando di introdurre quanti meno oggetti possibile; non servono quindi simboli di costanti, e nemmeno servono simboli di funzione, ma soltanto simboli di predicato da interpretare nei predicati “essere un corvo”, “essere un fiore”, “essere un giglio”.

Introduciamo dunque tre simboli di predicato unario (C, F, G), che interpretiamo come segue:

C$(x) :=$ x è un corvo;
F$(x) :=$ x è un fiore;
G$(x) :=$ x è un giglio.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $\neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x))$;

(ii) $(\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x))$;

e la supposta conclusione diventa

(iii) $(\exists x)(\mathrm{G}(x) \wedge \neg\mathrm{C}(x))$.

Dobbiamo pertanto vedere se

$$\{\neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)),\ (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x))\} \vDash (\exists x)(\mathrm{G}(x) \wedge \neg\mathrm{C}(x))$$

ossia se la formula φ definita da

$$\neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge \neg(\exists x)(\mathrm{G}(x) \wedge \neg\mathrm{C}(x))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv \neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge \neg(\exists x)(\mathrm{G}(x) \wedge \neg\mathrm{C}(x)) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\neg(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge (\forall x)\neg(\mathrm{G}(x) \wedge \neg\mathrm{C}(x)) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\neg\mathrm{C}(x) \vee \neg\mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{G}(x) \vee \mathrm{C}(x)) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\neg\mathrm{C}(x) \vee \neg\mathrm{F}(x)) \wedge (\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{G}(x) \vee \mathrm{C}(x)) \equiv$$
$$\equiv (\exists y)(\forall x)((\neg\mathrm{C}(x) \vee \neg\mathrm{F}(x)) \wedge (\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y)) \wedge (\neg\mathrm{G}(x) \vee \mathrm{C}(x)))$$

La forma di Skolem di questa formula si ottiene sopprimendo il quantificatore esistenziale e sostituendo la variabile individuale y da esso vincolata con un simbolo di costante c :

$$(\forall x)((\neg\mathrm{C}(x) \vee \neg\mathrm{F}(x)) \wedge (\mathrm{F}(c) \wedge \mathrm{G}(c)) \wedge (\neg\mathrm{G}(x) \vee \mathrm{C}(x)))$$

In questa formula, la parte che segue il quantificatore universale $\forall$ è in forma normale congiuntiva, quindi possiamo associarle uno “schema di clausole”:

$$\{\{\neg\mathrm{C}(x), \neg\mathrm{F}(x)\}, \{\mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{G}(c)\}, \{\neg\mathrm{G}(x), \mathrm{C}(x)\}\} .$$

Poiché l’universo di Herbrand consiste della sola costante c, assegniamo direttamente alla y il valore c e otteniamo un insieme finito di clausole, precisamente il seguente insieme di quattro clausole:

$$\{\{\neg \mathrm{C}(c), \neg \mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{G}(c)\}, \{\neg \mathrm{G}(c), \mathrm{C}(c)\}\} .$$

Possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot $\mathrm{F}(c)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{F}(c)$ né $\neg\mathrm{F}(c)$: $\{\mathrm{G}(c)\}, \{\neg \mathrm{G}(c), \mathrm{C}(c)\}$;

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{F}(c)}(\{\neg \mathrm{C}(c), \neg \mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{F}(c)\}) = \{\neg \mathrm{C}(c)\}$;

$$\{\{\mathrm{G}(c)\}, \{\neg \mathrm{G}(c), \mathrm{C}(c)\}, \{\neg \mathrm{C}(c)\}\} .$$

Pivot $\mathrm{G}(c)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{G}(c)$ né $\neg\mathrm{G}(c)$: $\{\neg \mathrm{C}(c)\}$;

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{G}(c)}(\{\mathrm{G}(c)\}, \{\neg \mathrm{G}(c), \mathrm{C}(c)\}) = \{\mathrm{C}(c)\}$;

$$\{\{\neg \mathrm{C}(c)\}, \{\mathrm{C}(c)\}\} .$$

Pivot $\mathrm{C}(c)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{C}(c)$ né $\neg\mathrm{C}(c)$: non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{C}(c)}(\{\neg \mathrm{C}(c)\}, \{\mathrm{C}(c)\}) = \{[\,]\}$;

$$\{[\,]\} .$$

Poiché abbiamo ottenuto la clausola vuota, l’insieme di clausole considerato non è soddisfacibile ed abbiamo dunque dimostrato che la (iii) è conseguenza logica delle (i) e (ii).

Vediamo adesso che cosa accade quando cerchiamo di capire se dalle stesse premesse è lecito dedurre che

(iv) alcuni corvi non sono gigli.

Possiamo utilizzare lo stesso linguaggio di logica dei predicati e la stessa formalizzazione delle premesse; la (iv) si formalizza con

$$(\exists x)\big(\mathrm{C}(x) \wedge \neg \mathrm{G}(x)\big) .$$

Dobbiamo pertanto vedere se

$$\{\neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)),\ (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x))\} \vDash (\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \neg\mathrm{G}(x))$$

ossia se la formula φ definita da

$$\neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge \neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \neg\mathrm{G}(x))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv \neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge \neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \neg\mathrm{G}(x)) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)\neg(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge (\forall x)\neg(\mathrm{C}(x) \wedge \neg\mathrm{G}(x)) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)(\neg\mathrm{C}(x) \vee \neg\mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)(\neg\mathrm{C}(x) \vee \neg\mathrm{F}(x)) \wedge (\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)) \equiv$$

$$\equiv (\exists y)(\forall x)((\neg\mathrm{C}(x) \vee \neg\mathrm{F}(x)) \wedge (\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y)) \wedge (\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)))$$

La forma di Skolem si ottiene anche in questo caso sopprimendo il quantificatore esistenziale e sostituendo la variabile individuale y da esso vincolata con un simbolo di costante c :

$$(\forall x)((\neg\mathrm{C}(x) \vee \neg\mathrm{F}(x)) \wedge (\mathrm{F}(c) \wedge \mathrm{G}(c)) \wedge (\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)))$$

A questa formula resta associato il seguente schema di clausole:

$$\{\{\neg\mathrm{C}(x), \neg\mathrm{F}(x)\}, \{\mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{G}(c)\}, \{\neg\mathrm{C}(x), \mathrm{G}(x)\}\}\ .$$

Poiché l’universo di Herbrand consiste della sola costante c, assegniamo direttamente alla x il valore c e otteniamo

$$\{\{\neg\mathrm{C}(c), \neg\mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{G}(c)\}, \{\neg\mathrm{C}(c), \mathrm{G}(c)\}\}\ .$$

Possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot $\mathrm{F}(c)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{F}(c)$ né $\neg\mathrm{F}(c)$: $\{\mathrm{G}(c)\}, \{\neg\mathrm{C}(c), \mathrm{G}(c)\}$;

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{F}(c)}(\{\neg\mathrm{C}(c), \neg\mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{F}(c)\}) = \{\neg\mathrm{C}(c)\}$;

$$\{\{\mathrm{G}(c)\}, \{\neg\mathrm{C}(c), \mathrm{G}(c)\}, \{\neg\mathrm{C}(c)\}\}\ .$$

Pivot $\mathrm{C}(c)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{C}(c)$ né $\neg\mathrm{C}(c)$: $\{\mathrm{G}(c)\}$;
non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\mathrm{G}(c)\}\}\ .$$

Pivot $\mathrm{G}(c)$:

$$\{\}\ .$$

Poiché abbiamo ottenuto l’insieme vuoto, l’insieme di clausole considerato è soddisfacibile e dunque la (iii) non è conseguenza logica delle (i) e (ii).

Vediamo se avete capito. Il mondo reale con i fiori e i volatili e le loro proprietà è ***soltanto una delle possibili strutture*** adeguate al nostro linguaggio. In tale struttura, effettivamente, come ben sappiamo, non soltanto le premesse (i) e (ii) sono vere ma anche la “conseguenza” (iv) è vera. Però ci sono altre strutture nelle quali, con opportuna interpretazione, le (i) e (ii) sono vere mentre la (iv) è falsa. Una di tali strutture è l’universo di Herbrand con ***un solo elemento*** c e una interpretazione dei simboli di predicato tale che G(c) è vero, F(c) è vero ma C(c) è falso (questi valori di verità sono ricavabili procedendo “a ritroso” nei vari insiemi di clausole, esattamente come abbiamo imparato a fare nella logica proposizionale!). Potete pensare a una persona c che è *malata grave* (G(c) è vero), ha la febbre (F(c) è vero) ma non ha il COVID-19 (C(c) è falso): in questo “universo”, composto da una sola persona con le caratteristiche sopra descritte, è vero che (i) nessuna persona col COVID-19 ha la febbre (ovvio, non ci sono persone col COVID-19), (ii) c’è almeno una persona con la febbre che è un malato grave (tale è l’unico personaggio, c, dell’universo che stiamo considerando) ma è falso che (iv) c’è almeno una persona col COVID-19 che non è un malato grave (infatti in quell’universo non c’è proprio nessuno col COVID-19… bella cosa, eh?).

Vediamo adesso che cosa accade quando cerchiamo di capire se dalle stesse premesse è lecito dedurre che

(v) nessun giglio è un corvo.

Veramente quando abbiamo affrontato le premesse (i) e (ii) all’inizio di questa lezione ci era venuto naturale valutare come conseguenza l’enunciato

(vi) ogni giglio non è un corvo.

Io dico però che (v) e (vi) sono logicamente equivalenti; possiamo rendercene conto formalizzando sia la (v) che la (vi) nello stesso linguaggio di logica dei predicati che abbiamo usato finora: la (v) si formalizza con

$$\neg(\exists x)(\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{C}(x))$$

mentre la (vi) si formalizza con

$$(\forall x)(\mathrm{G}(x) \rightarrow \neg\mathrm{C}(x)) .$$

Se trasformiamo queste due formule in altre ad esse logicamente equivalenti che siano in forma normale prenessa con la parte che segue i quantificatori in forma normale congiuntiva, la $\neg(\exists x)(\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{C}(x))$ diventa

$$(\forall x)\neg(\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{C}(x)) \equiv (\forall x)(\neg\mathrm{G}(x) \vee \neg\mathrm{C}(x))$$

mentre la $(\forall x)(\mathrm{G}(x) \rightarrow \neg\mathrm{C}(x))$ (che è già in forma normale prenessa) diventa

$$(\forall x)(\neg\mathrm{G}(x) \vee \neg\mathrm{C}(x))$$

e ciò prova che la (v) e la (vi) sono logicamente equivalenti.

Utilizzando ancora una volta lo stesso linguaggio di logica dei predicati (non c'è motivo di cambiare!) abbiamo la stessa formalizzazione delle premesse, mentre la (v) (o, equivalentemente, la (vi)) abbiamo visto che si formalizza con

$$(\forall x)(\neg \mathrm{G}(x) \vee \neg \mathrm{C}(x)) \,.$$

Dobbiamo pertanto vedere se

$$\{\neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)),\ (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x))\} \vDash (\forall x)(\neg \mathrm{G}(x) \vee \neg \mathrm{C}(x))$$

ossia se la formula φ definita da

$$\neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge \neg(\forall x)(\neg \mathrm{G}(x) \vee \neg \mathrm{C}(x))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv \neg(\exists x)(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge \neg(\forall x)(\neg \mathrm{G}(x) \vee \neg \mathrm{C}(x)) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\neg(\mathrm{C}(x) \wedge \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge (\exists x)\neg(\neg \mathrm{G}(x) \vee \neg \mathrm{C}(x)) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\neg \mathrm{C}(x) \vee \neg \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{C}(x)) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\neg \mathrm{C}(x) \vee \neg \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y)) \wedge (\exists z)(\mathrm{G}(z) \wedge \mathrm{C}(z)) \equiv$$
$$\equiv (\exists y)(\exists z)(\forall x)\big((\neg \mathrm{C}(x) \vee \neg \mathrm{F}(x)) \wedge (\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y)) \wedge (\mathrm{G}(z) \wedge \mathrm{C}(z))\big)$$

La forma di Skolem si ottiene anche in questo caso sopprimendo i quantificatori esistenziali e sostituendo le due variabili individuali y e z da essi vincolate con due simboli di costante, rispettivamente c e d:

$$(\forall x)\big((\neg \mathrm{C}(x) \vee \neg \mathrm{F}(x)) \wedge (\mathrm{F}(c) \wedge \mathrm{G}(c)) \wedge (\mathrm{G}(d) \wedge \mathrm{C}(d))\big)$$

A questa formula resta associato il seguente schema di clausole:

$$\{\{\neg \mathrm{C}(x), \neg \mathrm{F}(x)\}, \{\mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{G}(c)\}, \{\mathrm{G}(d)\}, \{\mathrm{C}(d)\}\} \,.$$

Poiché l'universo di Herbrand consiste delle due costanti c e d, assegniamo alla x nella varie "clausole" i valori c e d in tutti i modi possibili (che sono poi soltanto due, perché c'è una sola "clausola" con la variabile individuale x) e otteniamo

$$\{\{\neg \mathrm{C}(c), \neg \mathrm{F}(c)\}, \{\neg \mathrm{C}(d), \neg \mathrm{F}(d)\}, \{\mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{G(c)}\}, \{\mathrm{G}(d)\}, \{\mathrm{C}(d)\}\} \,.$$

Possiamo applicare l'algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot $\mathrm{F}(c)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{F}(c)$ né $\neg\mathrm{F}(c)$: $\{\neg \mathrm{C}(d), \neg \mathrm{F}(d)\}, \{\mathrm{G}(c)\}, \{\mathrm{G}(d)\}, \{\mathrm{C}(d)\}$;

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{F}(c)}(\{\neg \mathrm{C}(c), \neg \mathrm{F}(c)\}, \{\mathrm{F}(c)\}) = \{\neg \mathrm{C}(c)\}$;

$$\{\{\neg \mathrm{C}(d), \neg \mathrm{F}(d)\}, \{\mathrm{G}(c)\}, \{\mathrm{G}(d)\}, \{\mathrm{C}(d)\}, \{\neg \mathrm{C}(c)\}\} \,.$$

Pivot C(d):

clausole non contenenti né C(d) né ¬C(d): {G(c)}, {G(d)}, {¬C(c)} ;
$\mathrm{Ris}_{\mathrm{C}(d)}(\{\neg \mathrm{C}(d), \neg \mathrm{F}(d)\}, \{\mathrm{C}(d)\}) = \{\neg \mathrm{F}(d)\}$;

$$\{\{\mathrm{G}(c)\}, \{\mathrm{G}(d)\}, \{\neg \mathrm{C}(c)\}, \{\neg \mathrm{F}(d)\}\}\,.$$

Pivot G(c):

clausole non contenenti né G(c) né ¬G(c): {G(d)}, {¬C(c)}, {¬F(d)} ;
non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\mathrm{G}(d)\}, \{\neg \mathrm{C}(c)\}, \{\neg \mathrm{F}(d)\}\}\,.$$

Pivot G(d):

clausole non contenenti né G(d) né ¬G(d): {¬C(c)}, {¬F(d)} ;
non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\neg \mathrm{C}(c)\}, \{\neg \mathrm{F}(d)\}\}\,.$$

Pivot C(c):

clausole non contenenti né C(c) né ¬C(c): {¬F(d)} ;
non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\neg \mathrm{F}(d)\}\}\,.$$

Pivot F(d):

$$\{\}\,.$$

Poiché abbiamo ottenuto l’insieme vuoto, l’insieme di clausole considerato è soddisfacibile e dunque la (v) non è conseguenza logica delle (i) e (ii).

Vi lascio come esercizio la costruzione di una struttura (un insieme con due elementi c e d e tre predicati unari, C, F e G) nella quale le (i), (ii) e (iii) sono vere ma la (v) è falsa. Intendiamoci: una struttura astratta come quella che abbiamo visto sopra viene suggerita dall’algoritmo di Davis e Putnam, ma dà poca soddisfazione; se siete un po’ svegli, potete costruire una struttura “familiare” nella quale interpretare le (i), (ii) e (v) in modo che la (i) e la (ii) risultino vere mentre la (v) risulta falsa.

Nell’insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, interpretiamo i simboli di predicato unario F, G e C come segue:

F(x) $:=$ x è un numero pari;
G(x) $:=$ x è un multiplo di 3;
C(x) $:=$ x è una potenza di 3.

Con questa interpretazione in $\mathbb{N}$ valgono la (i) (nessuna potenza di 3 è un numero pari) e la (ii) (alcuni numeri pari sono multipli di 3, ad esempio 6 è pari ed è multiplo di 3), ma non vale la (v) (infatti esistono numeri che sono multipli di 3 e anche potenza di 3...).

Bene, a questo punto dovrebbe essere chiaro come ci possiamo comportare se abbiamo abbastanza ~~culo~~ fortuna da trovarci a considerare un universo di Herbrand con un numero ***finito*** di elementi (ricordiamo che ciò avviene se e soltanto se nel nostro linguaggio non ci sono simboli di funzione, che potrebbero “essere nativi” oppure essere stati introdotti nella skolemizzazione). Nella prossima ora (virtuale) di lezione di oggi martedì 28 aprile 2020 vedremo che cosa possiamo fare quando non siamo così fortunati…