28 aprile 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di martedì 28 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Vediamo adesso un ragionamento appena un pelino più complesso di quelli considerati finora.

Vogliamo stabilire se dalle premesse

(i) Chi non è un cane è un gatto;
(ii) Ogni cane insegue qualche gatto;
(iii) Fufi non insegue alcun gatto;

si può dedurre logicamente che

(iv) Fufi è un gatto.

Introduciamo opportuni simboli di predicato:

C(x) traduce “x è un cane”;
G(x) traduce “x è un gatto”;
I(x, y) traduce “x insegue y”.

Inoltre, introduciamo un simbolo di costante f_0 per indicare Fufi.

Come si è visto negli esempi precedenti, se poniamo

$$\alpha \coloneqq (\forall x)(\neg \mathrm{C}(x) \to \mathrm{G}(x))\,;$$
$$\beta \coloneqq (\forall x)(\mathrm{C}(x) \to (\exists y)(\mathrm{G}(y) \wedge \mathrm{I}(x,y)))\,;$$
$$\gamma \coloneqq \neg(\exists x)(\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{I}(f_0,x))\,;$$
$$\delta \coloneqq \mathrm{G}(f_0)\,;$$

dobbiamo dimostrare che

$$\{\alpha,\beta,\gamma\} \vDash \delta$$

ossia che

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \neg\delta \quad \text{non è soddisfacibile.}$$

Posto $\varphi \coloneqq \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \neg\delta$, scriviamo φ in forma normale prenessa in modo che la parte senza quantificatori sia in forma normale congiuntiva.

$$\varphi \equiv (\forall x)\big(\neg \mathrm{C}(x) \to \mathrm{G}(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\mathrm{C}(x) \to (\exists y)\big(\mathrm{G}(y) \wedge \mathrm{I}(x,y)\big)\big) \wedge$$
$$\wedge\, \neg(\exists x)\big(\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{I}(f_0,x)\big) \wedge \neg\mathrm{G}(f_0) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\big(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\neg\mathrm{C}(x) \vee (\exists y)\big(\mathrm{G}(y) \wedge \mathrm{I}(x,y)\big)\big) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall x)\neg\big(\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{I}(f_0,x)\big) \wedge \neg\mathrm{G}(f_0) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\big(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)\big) \wedge (\forall x)(\exists y)\big(\neg\mathrm{C}(x) \vee \big(\mathrm{G}(y) \wedge \mathrm{I}(x,y)\big)\big) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall x)\big(\neg\mathrm{G}(x) \vee \neg\mathrm{I}(f_0,x)\big) \wedge \neg\mathrm{G}(f_0) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\big(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)\big) \wedge (\forall x)(\exists y)\big(\big(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(y)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{I}(x,y)\big)\big) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall x)\big(\neg\mathrm{G}(x) \vee \neg\mathrm{I}(f_0,x)\big) \wedge \neg\mathrm{G}(f_0) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\big(\big(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)\big) \wedge (\exists y)\big(\big(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(y)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{I}(x,y)\big)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{G}(x) \vee \neg\mathrm{I}(f_0,x)\big) \wedge \neg\mathrm{G}(f_0)\big) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\exists y)\big(\big(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(y)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{I}(x,y)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{G}(x) \vee \neg\mathrm{I}(f_0,x)\big) \wedge \neg\mathrm{G}(f_0)\big)$$

Per la skolemizzazione dobbiamo introdurre un simbolo di funzione unaria h e porre $y \coloneqq h(x)$:

$$(\forall x)\big(\big(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(x)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{G}(h(x))\big) \wedge \big(\neg\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{I}(x,h(x))\big) \wedge \big(\neg\mathrm{G}(x) \vee \neg\mathrm{I}(f_0,x)\big) \wedge \neg\mathrm{G}(f_0)\big)$$

ottenendo il seguente schema di “clausole”:

$$\{\{\mathrm{C}(x),\mathrm{G}(x)\},\ \{\neg\mathrm{C}(x),\mathrm{G}(h(x))\},\ \{\neg\mathrm{C}(x),\mathrm{I}(x,h(x))\},\ \{\neg\mathrm{G}(x),\neg\mathrm{I}(f_0,x)\},\ \{\neg\mathrm{G}(f_0)\}\}\,.$$

Questa volta, ahinoi, l’universo di Herbrandt è infinito:

$$\{f_0, h(f_0), h(h(f_0)), h(h(h(f_0))), \ldots\}.$$

Non possiamo dunque utilizzare l’algoritmo di Davis e Putnam, perché l’insieme di clausole su cui dovremmo operare è infinito (in ogni “clausola” dello schema dobbiamo sostituire alla x uno degli elementi dell’universo di Herbrand in tutti i modi possibili!).

L’unica cosa che possiamo fare è tentare una confutazione rapida, assegnando alla x in clausole astutamente scelte elementi scelti in modo altrettanto astuto dell’universo di Herbrand.

Per chiarezza, poniamo:

$$\mathcal{C}_1(x) := \{\mathrm{C}(x), \mathrm{G}(x)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_2(x) := \{\neg\mathrm{C}(x), \mathrm{G}(h(x))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_3(x) := \{\neg\mathrm{C}(x), \mathrm{I}(x, h(x))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_4(x) := \{\neg\mathrm{G}(x), \neg\mathrm{I}(f_0, x)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_5 := \{\neg\mathrm{G}(f_0)\}\,.$$

Una possibile confutazione rapida è:

$$\mathcal{C}_6 := \mathcal{C}_1(f_0) = \{\mathrm{C}(f_0), \mathrm{G}(f_0)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_7 := \mathrm{Res}_{\mathrm{G}(f_0)}(\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6) = \{\mathrm{C}(f_0)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_8 := \mathcal{C}_3(f_0) = \{\neg\mathrm{C}(f_0), \mathrm{I}(f_0, h(f_0))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_9 := \mathrm{Res}_{\mathrm{C}(f_0)}(\mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8) = \{\mathrm{I}(f_0, h(f_0))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{10} := \mathcal{C}_4(h(f_0)) = \{\neg\mathrm{G}(h(f_0)), \neg\mathrm{I}(f_0, h(f_0))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{11} := \mathrm{Res}_{\mathrm{I}(f_0, h(f_0))}(\mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{10}) = \{\neg\mathrm{G}(h(f_0))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{12} := \mathcal{C}_2(f_0) = \{\neg\mathrm{C}(f_0), \mathrm{G}(h(f_0))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{13} := \mathrm{Res}_{\mathrm{G}(h(f_0))}(\mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{12}) = \{\neg\mathrm{C}(f_0)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{14} := \mathrm{Res}_{\mathrm{C}(f_0)}(\mathcal{C}_7, \mathcal{C}_{13}) = [\,]\,.$$

Abbiamo così provato che dalle (i), (ii) e (iii) si può dedurre logicamente la (iv).

Come vedete, la situazione quando l’universo di Herbrand è infinito è radicalmente diversa (e peggiore!): un po’, se mi permettete di fare un esempio in un campo del tutto diverso, come quando dobbiamo vedere se un certo grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati è hamiltoniano: ci vuole un po’ di astuzia per trovare una contraddizione (nessun automatismo!), e se non riusciamo a trovare la contraddizione non sappiamo se siamo noi incapaci di trovare la strada giusta o se il grafo è invece hamiltoniano.

Certo (restando all’esempio dei grafi), se non riusciamo a trovare la strada per giungere a un cantraddizione che dimostri che il grafo non è hamiltoniano possiamo convincerci che invece lo sia e cercare di esibire un ciclo hamiltoniano nel grafo. Così nel caso della logica dei predicati: quando l’universo di Herbrand è infinito e non riusciamo a costruire una confutazione rapida possiamo convincerci che la formula sia invece soddisfacibile e cercare di esibire una struttura adeguata al linguaggio e una interpretazione che la renda vera.

Proviamo ora a stabilire se dalle premesse

(i) Ogni stupido ascolta chiunque gli promette mari e monti;
(ii) Matteo promette mari e monti a tutti;

si può dedurre logicamente che

(iii) C’è qualcuno che è ascoltato da tutti.

Introduciamo opportuni simboli di predicato:

S(x) traduce “x è stupido”;
A(x, y) traduce “x ascolta y”;
P(x, y) traduce “x promette mare e monti a y”.

Inoltre, introduciamo un simbolo di costante m per indicare Matteo.

La premessa (i) si traduce in

$$(\forall x)\big(\mathrm{S}(x) \to (\forall y)\big(\mathrm{P}(y,x) \to \mathrm{A}(x,y)\big)\big)$$

e la premessa (ii) si traduce in

$$(\forall x)\mathrm{P}(m,x)$$

mentre la presunta conclusione (iii) si traduce in

$$(\exists x)(\forall y)\mathrm{A}(y,x)).$$

Ormai avete capito che la (iii) è conseguenza logica della (i) e della (ii) se e soltanto se la formula

$$\varphi := (\forall x)\big(\mathrm{S}(x) \to (\forall y)\big(\mathrm{P}(y,x) \to \mathrm{A}(x,y)\big)\big) \wedge (\forall x)\mathrm{P}(m,x) \wedge \neg(\exists x)(\forall y)\mathrm{A}(y,x))$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa in modo che la parte senza quantificatori sia in forma normale congiuntiva:

$$\varphi := (\forall x)\big(\mathrm{S}(x) \to (\forall y)\big(\mathrm{P}(y,x) \to \mathrm{A}(x,y)\big)\big) \wedge (\forall x)\mathrm{P}(m,x) \wedge \neg(\exists x)(\forall y)\mathrm{A}(y,x) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\big(\mathrm{S}(x) \to (\forall y)\big(\neg\mathrm{P}(y,x) \vee \mathrm{A}(x,y)\big)\big) \wedge (\forall x)\mathrm{P}(m,x) \wedge (\forall x)\neg(\forall y)\mathrm{A}(y,x) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\big(\neg\mathrm{S}(x) \vee (\forall y)\big(\neg\mathrm{P}(y,x) \vee \mathrm{A}(x,y)\big)\big) \wedge (\forall x)\mathrm{P}(m,x) \wedge (\forall x)(\exists y)\neg\mathrm{A}(y,x) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\big(\big(\neg\mathrm{S}(x) \vee (\forall y)\big(\neg\mathrm{P}(y,x) \vee \mathrm{A}(x,y)\big)\big) \wedge \mathrm{P}(m,x) \wedge (\exists z)\neg\mathrm{A}(z,x)\big) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\exists z)(\forall y)\big(\big(\neg\mathrm{S}(x) \vee \big(\neg\mathrm{P}(y,x) \vee \mathrm{A}(x,y)\big)\big) \wedge \mathrm{P}(m,x) \wedge \neg\mathrm{A}(z,x)\big)\,.$$

Per la skolemizzazione dobbiamo introdurre un simbolo di funzione unaria h e porre $z := h(x)$:

$$(\forall x)(\forall y)\big(\big(\neg\mathrm{S}(x) \vee \big(\neg\mathrm{P}(y,x) \vee \mathrm{A}(x,y)\big)\big) \wedge \mathrm{P}(m,x) \wedge \neg\mathrm{A}(h(x),x)\big)\,.$$

ottenendo il seguente schema di “clausole”:

$$\big\{\{\neg\mathrm{S}(x), \neg\mathrm{P}(y,x), \mathrm{A}(x,y)\},\ \{\mathrm{P}(m,x)\},\ \{\neg\mathrm{A}(h(x),x)\}\big\}\,.$$

Anche questa volta l’universo di Herbrandt è infinito:

$$\{m, h(m), h(h(m)), h(h(h(m))), \dots\}.$$

Non possiamo dunque utilizzare l’algoritmo di Davis e Putnam, perché l’insieme di clausole su cui dovremmo operare è infinito (in ogni “clausola” dello schema dobbiamo sostituire alla x e alla y uno degli elementi dell’universo di Herbrand in tutti i modi possibili!). Peggio ancora, tutti i tentativi di confutazione rapida sono destinati a fallire; infatti se considerate l’insieme I $:= \{m\}$ con la funzione h che porta m in se stesso e i predicati S, P, A così definiti

S(m) è falso; P(m, m) è vero; A(m, m) è falso;

vi accorgete subito che l’interpretazione suggerita dai nomi rende vera la formula φ, cosicché φ è soddisfacibile e la (iii) non è conseguenza logica delle (i) e (ii) .

Martedì prossimo 5 maggio 2020 (199simo anniversario della mote di Napoleone Bonaparte) vedremo altri esempi di logica dei predicati. Ma, visto che la parte teorica ormai l’ho svolta tutta (ok, ok, nei limiti consentidi dal COVID-19) nel fattempo voi potete cominciare a fare qualche esercizio per conto vostro. Nella stessa pagina di “Moodle” nella quale avete trovato questo file ci sono adesso altri due *pdf, uno con 17 esercizi di logica dei predicati e l’altro con le relative soluzioni.

Buon lavoro!