L2. – Soluzione degli esercizi su: ***Logica dei predicati***.

Esercizio L2.1

In un opportuno linguaggio della logica dei predicati, siano H, K simboli di predicato e x, y, z variabili individuali. Si stabilisca se

$$((\exists x)\mathrm{H}(x)) \to ((\exists y)\mathrm{K}(y)) \ \vDash \ (\exists z)(\mathrm{H}(z) \to \mathrm{K}(z))$$

Soluzione “*astuta*” (*applicando la definizione*) – Dobbiamo provare che in ogni modello nel quale è vero che

$$((\exists x)\mathrm{H}(x)) \to ((\exists y)\mathrm{K}(y))$$

è anche vero che

$$(\exists z)(\mathrm{H}(z) \to \mathrm{K}(z))\,.$$

Sia allora $\mathcal{M}$ un modello nel quale è vero che $((\exists x)\mathrm{H}(x)) \to ((\exists y)\mathrm{K}(y))$.

Consideriamo in tale modello la formula $(\exists z)\neg\mathrm{H}(z)$. Essa, per il principio di Aristotele, è vera oppure è falsa.

Se è vera, esiste in $\mathcal{M}$ un elemento c per il quale $\neg\mathrm{H}(c)$ e quindi $\mathrm{H}(c) \to \mathrm{K}(c)$; in questo caso, si è provato che in $\mathcal{M}$ è vero che $(\exists z)(\mathrm{H}(z) \to \mathrm{K}(z))$.

Se invece la formula $(\exists z)\neg\mathrm{H}(z)$ è falsa, è vera la sua negazione e quindi è vero in $\mathcal{M}$ che $(\forall x)\mathrm{H}(x)$; scelto un elemento a di $\mathcal{M}$, è in particolare vero in $\mathcal{M}$ che $\mathrm{H}(a)$, quindi in $\mathcal{M}$ è vero che $(\exists x)\mathrm{H}(x)$. Ma per ipotesi in $\mathcal{M}$ è vero che $((\exists x)\mathrm{H}(x)) \to ((\exists y)\mathrm{K}(y))$, dunque in $\mathcal{M}$ esiste un elemento w tale che $\mathrm{K}(w)$ è vera; ma allora in $\mathcal{M}$ è vera la $\mathrm{H}(w) \to \mathrm{K}(w)$ e infine in $\mathcal{M}$ è vero che $(\exists z)(\mathrm{H}(z) \to \mathrm{K}(z))$, come si voleva dimostrare.

Soluzione “*meccanica*” (*applicando le tecniche apprese a lezione*) – Dobbiamo provare che non è soddisfacibile la formula

$$\varphi := (((\exists x)\mathrm{H}(x)) \to ((\exists y)\mathrm{K}(y))) \wedge \neg(\exists z)(\mathrm{H}(z) \to \mathrm{K}(z))\,.$$

A tale scopo la trasformiamo in forma normale prenessa, la skolemizziamo e ne ricaviamo uno schema di clausole.

$$\varphi \equiv (\neg((\exists x)\mathrm{H}(x)) \vee ((\exists y)\mathrm{K}(y))) \wedge (\forall z)(\mathrm{H}(z) \wedge \neg\mathrm{K}(z)) \equiv$$
$$\equiv (((\forall x)\neg\mathrm{H}(x)) \vee ((\exists y)\mathrm{K}(y))) \wedge (\forall z)(\mathrm{H}(z) \wedge \neg\mathrm{K}(z)) \equiv$$
$$\equiv ((\exists y)(\mathrm{K}(y)) \vee (\forall x)(\neg\mathrm{H}(x))) \wedge (\forall x)(\mathrm{H}(x) \wedge \neg\mathrm{K}(x)) \equiv$$
$$\equiv (\exists y)(\forall x)((\mathrm{K}(y)) \vee (\neg\mathrm{H}(x))) \wedge (\mathrm{H}(x) \wedge \neg\mathrm{K}(x))$$

che, in forma di Skolem (con l’introduzione di un simbolo di costante c) e sopprimendo il quantificatore universale per trasformarla in uno schema di clausole diventa

$$\{\{\mathrm{K}(c), \neg\mathrm{H}(x)\}, \{\mathrm{H}(x)\}, \{\neg\mathrm{K}(x)\}\}\,.$$

L’universo di Herbrandt consiste soltanto nella costante c, quindi possiamo lavorare su

$$\{\{\mathrm{K}(c), \neg\mathrm{H}(c)\}, \{\mathrm{H}(c)\}, \{\neg\mathrm{K}(c)\}\}\,.$$

Applicando l’algoritmo di Davis – Putnam con pivot $\mathrm{K}(c)$ si ottiene

$$\{\{\neg\mathrm{H}(c)\}, \{\mathrm{H}(c)\}\}$$

e subito dopo l’insieme che consiste nella sola clausola vuota. Dunque l’insieme di clausole non è soddisfacibile, e si è provata la

$$\big((\exists x)\mathrm{H}(x)\big) \to \big((\exists y)\mathrm{K}(y)\big) \;\vDash\; (\exists z)\big(\mathrm{H}(z) \to \mathrm{K}(z)\big)\,.$$

Esercizio L2.2

Si esprimano le premesse

(i) Ogni numero primo è un numero irriducibile;
(ii) 24 non è un numero primo;

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(iii) 24 non è un numero irriducibile.

Soluzione – Introduciamo due simboli di predicato unario (I, P) e un simbolo di costante (n), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

$\mathrm{I}(x) \coloneqq x$ è un numero irriducibile;

$\mathrm{P}(x) \coloneqq x$ è un numero primo;

$p \coloneqq 24.$

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{I}(x))\,;$

(ii) $\neg\mathrm{P}(n)\,;$

e la supposta conclusione diventa

(iii) $\neg\mathrm{I}(n)\,.$

Dobbiamo pertanto vedere se

$$(\forall x)(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{I}(x)) \wedge \neg\mathrm{P}(n) \vDash \neg\mathrm{I}(n)$$

ossia se la formula ben formata φ definita da

$$(\forall x)(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{I}(x)) \wedge \neg\mathrm{P}(n) \wedge \neg(\neg\mathrm{I}(n))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv (\forall x)((\neg\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{I}(x)) \wedge \neg\mathrm{P}(n) \wedge \mathrm{I}(n))\,.$$

In questa forma, φ è già skolemizzata e possiamo considerare lo schema di clausole ad essa associato

$$\{\{\neg \mathrm{P}(x), \mathrm{I}(x)\},\ \{\neg \mathrm{P}(n)\},\ \{\mathrm{I}(n)\}\}\,.$$

Poiché l'universo di Herbrandt consiste della sola costante n, assegniamo direttamente alla x il valore n e otteniamo il seguente insieme finito di clausole:

$$\{\{\neg \mathrm{P}(n), \mathrm{I}(n)\},\ \{\neg \mathrm{P}(n)\},\ \{\mathrm{I}(n)\}\}\,.$$

Possiamo applicare l'algoritmo di Davis-Putnam! Scegliendo come pivot nell'ordine P(n) e I(n) si giunge rapidamente all'insieme vuoto di clausole: dunque l'insieme di clausole dato è soddisfacibile e la (iii) non è conseguenza logica delle (i) e (ii).

In effetti, interpretando (sempre nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali) P(x) come "x è multiplo di 4", I(x) come "x è pari" e n come il numero 6, le premesse risultano vere (ogni multiplo di 4 è un numero pari, e 6 non è un multiplo di 4) ma la conseguenza è falsa (non è vero infatti che 6 non è pari).

Esercizio L2.3

Si esprimano le premesse

(i) Tutti quelli che devono prendere il treno e sono in ritardo devono correre;
(ii) Paolo deve prendere il treno;
(iii) Paolo non è in ritardo;

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(iv) Paolo non deve correre.

Soluzione – Introduciamo tre simboli di predicato unario (T, R, C) e un simbolo di costante (p), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

T(x) $:=$ x deve prendere il treno;
R(x) $:=$ x è in ritardo;
C(x) $:=$ x deve correre;
$p :=$ Paolo.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)((\mathrm{T}(x) \wedge \mathrm{R}(x)) \rightarrow \mathrm{C}(x))\,;$
(ii) $\mathrm{T}(p)\,;$
(iii) $\neg \mathrm{R}(p)\,;$

e la supposta conclusione diventa

(iv) $\neg \mathrm{C}(p)\,.$

Dobbiamo pertanto vedere se

$$(\forall x)((\mathrm{T}(x) \wedge \mathrm{R}(x)) \to \mathrm{C}(x)) \wedge \mathrm{T}(p) \wedge \neg\mathrm{R}(p) \models \neg\mathrm{C}(p)$$

ossia se la formula ben formata φ definita da

$$(\forall x)((\mathrm{T}(x) \wedge \mathrm{R}(x)) \to \mathrm{C}(x)) \wedge \mathrm{T}(p) \wedge \neg\mathrm{R}(p) \wedge \neg(\neg\mathrm{C}(p))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv (\forall x)((\neg\mathrm{T}(x) \vee \neg\mathrm{R}(x) \vee \mathrm{C}(x)) \wedge \mathrm{T}(p) \wedge \neg\mathrm{R}(p) \wedge \mathrm{C}(p))\,.$$

In questa forma, φ è già skolemizzata e possiamo considerare lo schema di clausole ad essa associato

$$\{\{\neg\mathrm{T}(x), \neg\mathrm{R}(x), \mathrm{C}(x)\},\ \{\mathrm{T}(p)\},\ \{\neg\mathrm{R}(p)\},\ \{\mathrm{C}(p)\}\}\,.$$

Poiché l’universo di Herbrandt consiste della sola costante p, assegniamo direttamente alla x il valore p e otteniamo il seguente insieme finito di clausole:

$$\{\{\neg\mathrm{T}(p), \neg\mathrm{R}(p), \mathrm{C}(p)\},\ \{\mathrm{T}(p)\},\ \{\neg\mathrm{R}(p)\},\ \{\mathrm{C}(p)\}\}\,.$$

Possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot $\mathrm{C}(p)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{C}(p)$ né $\neg\mathrm{C}(p)$: $\{\mathrm{T}(p))\}$, $\{\neg\mathrm{R}(p)\}$;
non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\mathrm{T}(p)\},\ \{\neg\mathrm{R}(p)\}\}$$

È già chiaro a questo punto che l’insieme di clausole è soddisfacibile (chi non è convinto prosegua con l’algoritmo di Davis-Putnam e troverà alla fine l’insieme vuoto di clausole). Dunque non si può concludere che Paolo non deve correre! (In effetti, se ci fosse un leone che lo insegue...)

Esercizio L2.4

Sia

$\varphi :\equiv (\exists x)(\forall y)(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{P}(y))\,;$

$\psi :\equiv (\exists y)(\forall x)(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{P}(y))\,.$

Si dica, motivando la risposta:

(i) se ψ è conseguenza logica di φ;
(ii) se φ e ψ sono logicamente equivalenti.

Soluzione – Sia φ che ψ sono tautologie, quindi ciascuna di esse è conseguenza logica dell’altra e in particolare sono logicamente equivalenti.

Proviamo che φ è una tautologia. Qualunque siano l'ambiente A e l'interpretazione scelta, ci sono soltanto due possibilità: esiste in A un x_0 per quale P(x_0) è falso, opure P(x) è vero per ogni $x \in$ A. Nel primo caso, P(x_0) $\rightarrow$ P(y) per ogni $y \in$ A (perché P(x_0) è falso); nel secondo caso, P(x) $\rightarrow$ P(y) per ogni $y \in$ A (perché P(y) è vero per ogni $y \in$ A) scegliendo x a piacere. Dunque φ è una tautologia.

Analogamente si prova che ψ è una tautologia. Qualunque siano l'ambiente A e l'interpretazione scelta, ci sono soltanto due possibilità: esiste in A un y_0 per quale P(y_0) è vero, opure P(x) è falso per ogni $x \in$ A. Nel primo caso, P(x) $\rightarrow$ P(y_0) per ogni $x \in$ A (perché P(y_0) è vero); nel secondo caso, P(x) $\rightarrow$ P(y) per ogni $x \in$ A (perché P(x) è falso per ogni $x \in$ A) scegliendo y a piacere. Dunque anche ψ è una tautologia.

Esercizio L2.5

Siano x, y, z variabili individuali, P un simbolo di predicato unario e Q un simbolo di predicato binario. Si stabilisca se

$$(\forall x)\neg(\exists z)(\mathrm{Q}(x,z) \rightarrow \mathrm{P}(x)) \vDash (\exists y)(\mathrm{Q}(y,y) \wedge \neg\mathrm{P}(y))\,.$$

Soluzione – Se α e β sono formule, sappiamo in generale che β è conseguenza logica di α se e soltanto se $\alpha \wedge (\neg\beta)$ non è soddisfacibile.

Dunque la formula

$$(\exists y)(\mathrm{Q}(y,y) \wedge \neg\mathrm{P}(y))$$

è conseguenza logica della formula

$$(\forall x)\neg(\exists z)(\mathrm{Q}(x,z) \rightarrow \mathrm{P}(x))$$

se e soltanto se la formula

$$(\forall x)\neg(\exists z)(\mathrm{Q}(x,z) \rightarrow \mathrm{P}(x)) \wedge \neg(\exists y)(\mathrm{Q}(y,y) \wedge \neg\mathrm{P}(y))$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo tale formula in forma normale prenessa in modo che la parte senza quantificatori sia in forma normale congiuntiva.

$$(\forall x)\neg(\exists z)(\mathrm{Q}(x,z) \rightarrow \mathrm{P}(x)) \wedge \neg(\exists y)(\mathrm{Q}(y,y) \wedge \neg\mathrm{P}(y))$$

$$(\forall x)\neg(\exists z)(\neg\mathrm{Q}(x,z) \vee \mathrm{P}(x)) \wedge (\forall y)\neg(\mathrm{Q}(y,y) \wedge \neg\mathrm{P}(y))$$

$$(\forall x)(\forall z)(\mathrm{Q}(x,z) \wedge \neg\mathrm{P}(x)) \wedge (\forall y)(\neg\mathrm{Q}(y,y) \vee \mathrm{P}(y))$$

$$(\forall x)(\forall z)(\forall y)(\mathrm{Q}(x,z) \wedge \neg\mathrm{P}(x) \wedge (\neg\mathrm{Q}(y,y) \vee \mathrm{P}(y))$$

Nella formula così ottenuta non compaiono quantificatori esistenziali, quindi possiamo esprimerla direttamente come uno schema di clausole:

$$\{\{\mathrm{Q}(x,z)\}, \{\neg\mathrm{P}(x)\}, \{\neg\mathrm{Q}(y,y), \mathrm{P}(y)\}\}$$

L'universo di Herbrandt consta di un'unica costante, sia essa c. Ponendo $x := c$, $y := c$ e z $:= c$, si ottiene l'insieme di clausole

$$\{\{\mathrm{Q}(c,c)\}, \{\neg\mathrm{P}(c)\}, \{\neg\mathrm{Q}(c,c), \mathrm{P}(c)\}\}$$

al quale possiamo applicare l'algoritmo di Davis-Putnam.

Pivot P(c):

$$\{\{\mathrm{Q}(c,c)\},\ \{\neg\mathrm{Q}(c,c)\}\}$$

Pivot Q(c,c):

$$\{[\,]\}$$

Dunque la formula considerata non è soddisfacibile, e la $(\exists y)(\mathrm{Q}(y,y) \wedge \neg\mathrm{P}(y))$ è effettivamente conseguenza logica della $(\forall x)\neg(\exists z)(\mathrm{Q}(x,z) \rightarrow \mathrm{P}(x))$.

Esercizio L2.6

Si consideri un linguaggio $\mathcal{L}$ per la logica dei predicati al quale appartengono un simbolo di funzione g di arietà 1, un simbolo di predicato P di arietà 2, un simbolo di predicato Q di arietà 1 e due variabili individuali x, y. Si trasformi la seguente formula ben formata di $\mathcal{L}$ in forma di Skolem:

$$\big((\forall x)\neg\big((\forall y)\mathrm{P}(x,y)\big)\big) \wedge \big(\big((\exists x)\neg\mathrm{Q}(x)\big) \vee ((\forall x)\mathrm{Q}(x) \rightarrow (\exists y)\mathrm{P}(g(y),y))\big).$$

Soluzione – In primo luogo, trasformiamo la formula data in forma normale prenessa. Essa è formata con un “ $\wedge$ ” a partire dalle due formule

$$\alpha := (\forall x)\neg\big((\forall y)\mathrm{P}(x,y)\big) \quad \text{e} \quad \beta := \big((\exists x)\neg\mathrm{Q}(x)\big) \vee ((\forall x)\mathrm{Q}(x) \rightarrow (\exists y)\mathrm{P}(g(y),y))$$

ciascuna delle quali va trasformata in forma normale prenessa.

La forma normale prenessa di α è

$$(\forall x)(\exists y)\neg\mathrm{P}(x,y) \equiv (\forall z)(\exists w)\neg\mathrm{P}(z,w).$$

La formula β è formata con un “ $\vee$ ” a partire dalle due formule

$$\beta_1 := (\exists x)(\neg\mathrm{Q}(x)) \text{ (già in FNP)}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 := (\forall x)\mathrm{Q}(x) \rightarrow (\exists y)\mathrm{P}(g(y),y) &\equiv \neg(\forall x)\mathrm{Q}(x) \vee (\exists y)\mathrm{P}(g(y),y) \equiv \\ &\equiv (\exists x)\neg\mathrm{Q}(x) \vee (\exists y)\mathrm{P}(g(y),y) \equiv (\exists x)\neg\mathrm{Q}(x) \vee (\exists x)\mathrm{P}(g(x),x) \equiv \\ &\equiv (\exists x)\big(\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(g(x),x)\big) \text{ (ora in FNP)}\end{aligned}$$

e dunque la forma normale prenessa di β è

$$(\exists x)\big((\neg Q(x)) \vee \big(\neg Q(x) \vee \mathrm{P}(g(x),x)\big)\big) \equiv (\exists x)\big(\neg Q(x) \vee \mathrm{P}(g(x),x)\big)$$

cosicché la FNP di $\alpha \wedge \beta$ è

$$(\exists x)(\forall z)(\exists w)\big(\neg\mathrm{P}(z,w) \wedge \big(\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(g(x),x)\big)\big).$$

Infine, per la skolemizzazione basterà introdurre un simbolo di costante c in luogo di x e un simbolo di funzione unaria $f(z)$ in luogo di w, ottenendo

$$(\forall z)\big(\neg\mathrm{P}(z,g(z) \wedge \big(\neg\mathrm{Q}(c) \vee \mathrm{P}(g(c),c)\big)\big)\big).$$

Esercizio L2.7

Siano x, y variabili individuali, P un simbolo di predicato binario e Q un simbolo di predicato unario. Si stabilisca se

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x)) \vDash (\exists x)(\mathrm{P}(x,x) \wedge \neg\mathrm{Q}(x))\,.$$

Soluzione – Se α e β sono formule, sappiamo in generale che β è conseguenza logica di α se e soltanto se $\alpha \wedge (\neg\beta)$ non è soddisfacibile.

Dunque la formula

$$(\exists x)(\mathrm{P}(x,x) \wedge \neg\mathrm{Q}(x))$$

è conseguenza logica della formula

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x))$$

se e soltanto se la formula

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x)) \wedge \neg(\exists x)(\mathrm{P}(x,x) \wedge \neg\mathrm{Q}(x))$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo tale formula in forma normale prenessa in modo che la parte senza quantificatori sia in forma normale congiuntiva.

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x)) \wedge \neg(\exists x)(\mathrm{P}(x,x) \wedge \neg\mathrm{Q}(x))$$

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\neg\mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{Q}(x)) \wedge (\forall x)\neg(\mathrm{P}(x,x) \wedge \neg\mathrm{Q}(x))$$

$$(\forall x)(\forall y)(\mathrm{P}(x,y) \wedge \neg\mathrm{Q}(x)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{P}(x,x) \vee \mathrm{Q}(x))$$

$$(\forall x)(\forall y)\big((\mathrm{P}(x,y) \wedge \neg\mathrm{Q}(x) \wedge (\neg\mathrm{P}(x,x) \vee \mathrm{Q}(x))\big)$$

Nella formula così ottenuta non compaiono quantificatori esistenziali, quindi possiamo direttamente esprimerla come uno schema di clausole:

$$\{\{\mathrm{P}(x,y)\},\ \{\neg\mathrm{Q}(x)\},\ \{\neg\mathrm{P}(x,x),\ \mathrm{Q}(x)\}\}$$

L'universo di Herbrandt consta di un'unica costante, sia essa c. Ponendo $x := c$ e $y := c$, si ottiene l'insieme di clausole

$$\{\{\mathrm{P}(c,c)\},\ \{\neg\mathrm{Q}(c)\},\ \{\neg\mathrm{P}(c,c),\ \mathrm{Q}(c)\}\}$$

al quale possiamo applicare l'algoritmo di Davis-Putnam.

Pivot $\mathrm{Q}(c)$:

$$\{\{\mathrm{P}(c,c)\},\ \{\neg\mathrm{P}(c,c)\}\}$$

Pivot $\mathrm{P}(c,c)$:

$$\{[\,]\}$$

Dunque la formula considerata non è soddisfacibile, e la $(\exists x)(\mathrm{P}(x,x) \wedge \neg\mathrm{Q}(x))$ è effettivamente conseguenza logica della $(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x))$.

Esercizio L2.8

Si esprimano le premesse

(i) Tutti quelli che hanno sete e non hanno i soldi per comprarsi una bibita bevono l’acqua del rubinetto;

(ii) Paolo ha sete;

(iii) Paolo ha i soldi per comprarsi una bibita;

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(iv) Paolo non beve l’acqua del rubinetto.

Soluzione – Introduciamo tre simboli di predicato unario (T, S, A) e un simbolo di costante (p), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

$\mathrm{T}(x) \coloneqq x$ ha sete;

$\mathrm{S}(x) \coloneqq x$ ha i soldi per comprarsi una bibita;

$\mathrm{A}(x) \coloneqq x$ beve l’acqua del rubinetto;

$p \coloneqq$ Paolo.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)((\mathrm{T}(x) \wedge \neg\mathrm{S}(x)) \rightarrow \mathrm{A}(x))\,;$

(ii) $\mathrm{T}(p)\,;$

(iii) $\mathrm{S}(p)\,;$

e la supposta conclusione diventa

(iv) $\neg\mathrm{A}(p)\,.$

Dobbiamo pertanto vedere se

$$(\forall x)((\mathrm{T}(x) \wedge \neg\mathrm{S}(x)) \rightarrow \mathrm{A}(x)) \wedge \mathrm{T}(p) \wedge \mathrm{S}(p) \vDash \neg\mathrm{A}(p)$$

ossia se la formula ben formata φ definita da

$$(\forall x)((\mathrm{T}(x) \wedge \neg\mathrm{S}(x)) \rightarrow \mathrm{A}(x)) \wedge \mathrm{T}(p) \wedge \mathrm{S}(p) \wedge \neg(\neg\mathrm{A}(p))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv (\forall x)((\neg\mathrm{T}(x) \vee \mathrm{S}(x) \vee \mathrm{A}(x)) \wedge \mathrm{T}(p) \wedge \mathrm{S}(p) \wedge \mathrm{A}(p))\,.$$

In questa forma, φ è già skolemizzata e possiamo considerare lo schema di clausole ad essa associato

$$\{\{\neg\mathrm{T}(x), \mathrm{S}(x), \mathrm{A}(x)\},\ \{\mathrm{T}(p)\},\ \{\mathrm{S}(p)\},\ \{\mathrm{A}(p)\}\}\,.$$

Poiché l’universo di Herbrandt consiste della sola costante p, assegniamo direttamente alla x il valore p e otteniamo l'insieme

$$\{\{\neg\mathrm{T}(p), \mathrm{S}(p), \mathrm{A}(p)\},\ \{\mathrm{T}(p)\},\ \{\mathrm{S}(p)\},\ \{\mathrm{A}(p)\}\}\,.$$

Possiamo applicare l'algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot A(p):

clausole non contenenti né A(p) né ¬A(p): {T(p))}, {S(p)} ;
non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\mathrm{T}(p)\}, \{\mathrm{S}(p)\}\}$$

È già chiaro a questo punto che l'insieme di clausole è soddisfacibile (chi non è convinto prosegua con l'algoritmo di Davis-Putnam e troverà alla fine l'insieme vuoto di clausole). Dunque non si può concludere che Paolo non beve l'acqua del rubinetto! (In effetti, se non c'è in giro nessuno che vende bibite...)

Esercizio L2.9

Si esprimano le premesse

(i) Tutti gli aderenti al "Club dei Cattivi Soggetti" sono ladri o mentitori;
(ii) Chi è iscritto alle "Giovani Marmotte" non mente mai;
(iii) Lupetto è iscritto alle "Giovani Marmotte" e aderisce al "Club dei Cattivi Soggetti";

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(iv) Lupetto è un ladro.

Soluzione – Introduciamo quattro simboli di predicato unario (C, G, L, M) e un simbolo di costante (ℓ), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

C(x) := x aderisce al "Club dei Cattivi Soggetti";

G(x) := x è iscritto alle "Giovani Marmotte";

L(x) := x è un ladro;

M(x) := x è un mentitore;

ℓ := Lupetto.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)(\mathrm{C}(x) \rightarrow (\mathrm{L}(x) \vee \mathrm{M}(x)))$;

(ii) $(\forall x)(\mathrm{G}(x) \rightarrow \neg\mathrm{M}(x))$;

(iii) $\mathrm{C}(\ell) \wedge \mathrm{G}(\ell)$;

e la desiderata conclusione diventa

(iv) $\mathrm{L}(\ell)$.

Dobbiamo pertanto dimostrare che

$$(\forall x)(\mathrm{C}(x) \to (\mathrm{L}(x) \lor \mathrm{M}(x))) \land (\forall x)(\mathrm{G}(x) \to \neg\mathrm{M}(x)) \land \mathrm{C}(\ell) \land \mathrm{G}(\ell) \vDash \mathrm{L}(\ell)$$

ossia che la formula ben formata φ definita da

$$(\forall x)(\mathrm{C}(x) \to (\mathrm{L}(x) \lor \mathrm{M}(x))) \land (\forall x)(\mathrm{G}(x) \to \neg\mathrm{M}(x)) \land \mathrm{C}(\ell) \land \mathrm{G}(\ell) \land \neg\mathrm{L}(\ell)$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv (\forall x)\big(\neg\mathrm{C}(x) \lor (\mathrm{L}(x) \lor \mathrm{M}(x)) \land (\neg\mathrm{G}(x) \lor \neg\mathrm{M}(x)) \land \mathrm{C}(\ell) \land \mathrm{G}(\ell) \land \neg\mathrm{L}(\ell)\big)\,.$$

In questa forma, φ è già skolemizzata e possiamo considerare lo schema di clausole ad essa associato

$$\{\{\neg\mathrm{C}(x), \mathrm{L}(x), \mathrm{M}(x)\},\ \{\neg\mathrm{G}(x), \neg\mathrm{M}(x)\},\ \{\mathrm{C}(\ell)\},\ \{\mathrm{G}(\ell)\},\ \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}\}\,.$$

Poiché l’universo di Herbrandt consiste della sola costante ℓ, assegniamo direttamente alla x il valore ℓ e otteniamo l'insieme finito di clausole

$$\{\{\neg\mathrm{C}(\ell), \mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\},\ \{\neg\mathrm{G}(\ell), \neg\mathrm{M}(\ell)\},\ \{\mathrm{C}(\ell)\},\ \{\mathrm{G}(\ell)\},\ \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}\}\,.$$

Possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot $\mathrm{C}(\ell)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{C}(\ell)$ né $\neg\mathrm{C}(\ell)$: $\{\neg\mathrm{G}(\ell), \neg\mathrm{M}(\ell)\}$, $\{\mathrm{G}(\ell)\}$, $\{\neg\mathrm{L}(\ell)\}$;

$\mathrm{Res}_{\mathrm{C}(\ell)}(\{\neg\mathrm{C}(\ell), \mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{C}(\ell)\}) = \{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}$;

$$\{\{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\},\ \{\neg\mathrm{G}(\ell), \neg\mathrm{M}(\ell)\},\ \{\mathrm{G}(\ell)\},\ \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}\}$$

Pivot $\mathrm{G}(\ell)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{G}(\ell)$ né $\neg\mathrm{G}(\ell)$: $\{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}$, $\{\neg\mathrm{L}(\ell)\}$;

$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}(\ell)}(\{\neg\mathrm{G}(\ell), \neg\mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{G}(\ell)\}) = \{\neg\mathrm{M}(\ell)\}$;

$$\{\{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\},\ \{\neg\mathrm{L}(\ell)\},\ \{\neg\mathrm{M}(\ell)\}\}$$

Pivot $\mathrm{L}(\ell)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{L}(\ell)$ né $\neg\mathrm{L}(\ell)$: $\{\neg\mathrm{M}(\ell)\}$;

$\mathrm{Res}_{\mathrm{L}(\ell)}(\{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}) = \{\mathrm{M}(\ell)\}$;

$$\{\{\neg\mathrm{M}(\ell)\},\ \{\mathrm{M}(\ell)\}\}$$

Pivot $\mathrm{M}(\ell)$:

$\mathrm{Res}_{\mathrm{M}(\ell)}(\{\neg\mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{M}(\ell)\}) = [\,]$;

$$\{[\,]\}$$

Poiché abbiamo ottenuto la clausola vuota, l’insieme di clausole considerato non è soddisfacibile; dunque nemmeno la formula φ è soddisfacibile, e possiamo concludere che la (iv) è conseguenza logica delle (i), (ii) e (iii).

Esercizio L2.10

In un opportuno linguaggio della logica dei predicati, siano P, Q simboli di predicato e a, b, c variabili individuali. Si stabilisca se

$$((\exists a)\mathrm{P}(a)) \to ((\exists b)\mathrm{Q}(b)) \vDash (\exists c)(\mathrm{P}(c) \to \mathrm{Q}(c))$$

Soluzione "*astuta*" (*applicando la definizione*) – Dobbiamo provare che in ogni modello nel quale è vero che

$$((\exists a)\mathrm{P}(a)) \to ((\exists b)\mathrm{Q}(b))$$

è anche vero che

$$(\exists c)(\mathrm{P}(c) \to \mathrm{Q}(c)) .$$

Sia allora $\mathcal{M}$ un modello nel quale è vero che $((\exists a)\mathrm{P}(a)) \to ((\exists b)\mathrm{Q}(b))$.

Consideriamo in tale modello la formula $(\exists c)\neg\mathrm{P}(c)$. Essa, per il principio di Aristotele, è vera oppure è falsa.

Se è vera, esiste in $\mathcal{M}$ un elemento k per il quale $\neg\mathrm{P}(k)$ e quindi $\mathrm{P}(k) \to \mathrm{Q}(k)$; in questo caso, si è provato che in $\mathcal{M}$ è vero che $(\exists c)(\mathrm{P}(c) \to \mathrm{Q}(c))$.

Se invece la formula $(\exists c)\neg\mathrm{P}(c)$ è falsa, è vera la sua negazione e quindi è vero in $\mathcal{M}$ che $(\forall a)\mathrm{P}(a)$; scelto un elemento a di $\mathcal{M}$, è in particolare vero in $\mathcal{M}$ che $\mathrm{P}(a)$, quindi in $\mathcal{M}$ è vero che $(\exists a)\mathrm{P}(a)$. Ma per ipotesi in $\mathcal{M}$ è vero che $((\exists a)\mathrm{P}(a)) \to ((\exists b)\mathrm{Q}(b))$, dunque in $\mathcal{M}$ esiste un elemento w tale che $\mathrm{Q}(w)$ è vera; ma allora in $\mathcal{M}$ è vera la $\mathrm{P}(w) \to \mathrm{Q}(w)$ e infine in $\mathcal{M}$ è vero che $(\exists c)(\mathrm{P}(c) \to \mathrm{Q}(c))$, come si voleva dimostrare.

Soluzione "*meccanica*" (*applicando le tecniche apprese a lezione*) – Dobbiamo provare che non è soddisfacibile la formula

$$\varphi := (((\exists a)\mathrm{P}(a)) \to ((\exists b)\mathrm{Q}(b))) \wedge \neg(\exists c)(\mathrm{P}(c) \to \mathrm{Q}(c)) .$$

A tale scopo la trasformiamo in forma normale prenessa, la skolemizziamo e la trasformiamo ancora in uno schema di clausole.

$$\varphi \equiv (\neg((\exists a)\mathrm{P}(a)) \vee ((\exists b)\mathrm{Q}(b))) \wedge (\forall c)(\mathrm{P}(c) \wedge \neg\mathrm{Q}(c)) \equiv$$

$$\equiv (((\forall a)\neg\mathrm{P}(a)) \vee ((\exists b)\mathrm{Q}(b))) \wedge (\forall c)(\mathrm{P}(c) \wedge \neg\mathrm{Q}(c)) \equiv$$

$$\equiv ((\exists b)(\mathrm{Q}(b)) \vee (\forall a)(\neg\mathrm{P}(a))) \wedge (\forall a)(\mathrm{P}(a) \wedge \neg\mathrm{Q}(a)) \equiv$$

$$\equiv (\exists b)(\forall a)((\mathrm{Q}(b)) \vee (\neg\mathrm{P}(a))) \wedge (\mathrm{P}(a) \wedge \neg\mathrm{Q}(a))$$

che, in forma di Skolem (con l'introduzione di un simbolo di costante k) e sopprimendo il quantificatore universale per trasformarla ino schema di clausole diventa

$$\{\{\mathrm{Q}(k), \neg\mathrm{P}(a)\}, \{\mathrm{P}(a)\}, \{\neg\mathrm{Q}(a)\}\} .$$

L'universo di Herbrandt consiste soltanto nella costante k, quindi possiamo lavorare su

$$\{\{\mathrm{Q}(k), \neg\mathrm{P}(k)\}, \{\mathrm{P}(k)\}, \{\neg\mathrm{Q}(k)\}\} .$$

Applicando l'algoritmo di Davis – Putnam con pivot $\mathrm{Q}(k)$ si ottiene

$$\{\{\neg\mathrm{P}(k)\}, \{\mathrm{P}(k)\}\}$$

e subito dopo l'insieme che consiste nella sola clausola vuota. Dunque l'insieme di clausole non è soddisfacibile, e si è provata la

$$((\exists a)\mathrm{P}(a)) \to ((\exists b)\mathrm{Q}(b)) \vDash (\exists c)(\mathrm{P}(c) \to \mathrm{Q}(c)) .$$

Esercizio L2.11

Siano

$$\varphi := (\exists x)(\forall y)(\mathrm{Q}(x) \to \mathrm{Q}(y))\,; \qquad \psi := (\exists y)(\forall x)(\mathrm{Q}(x) \to \mathrm{Q}(y))\,.$$

Si dica, motivando la risposta:

(i) se ψ è conseguenza logica di φ;
(ii) se φ e ψ sono logicamente equivalenti.

Soluzione – Sia φ che ψ sono tautologie, quindi ciascuna di esse è conseguenza logica dell'altra e in particolare sono logicamente equivalenti.

Proviamo che φ è una tautologia. Qualunque siano l'ambiente A e l'interpretazione scelta, ci sono soltanto due possibilità: esiste in A un x_0 per quale $\mathrm{Q}(x_0)$ è falso, opure $\mathrm{Q}(x)$ è vero per ogni $x \in \mathrm{A}$. Nel primo caso, $\mathrm{Q}(x_0) \to \mathrm{Q}(y)$ per ogni $y \in \mathrm{A}$ (perché $\mathrm{Q}(x_0)$ è falso); nel secondo caso, $\mathrm{Q}(x) \to \mathrm{Q}(y)$ per ogni $y \in \mathrm{A}$ (perché $\mathrm{Q}(y)$ è vero per ogni $y \in \mathrm{A}$) scegliendo x a piacere. Dunque φ è una tautologia.

Analogamente si prova che ψ è una tautologia. Qualunque siano l'ambiente A e l'interpretazione scelta, ci sono soltanto due possibilità: esiste in A un y_0 per il quale $\mathrm{Q}(y_0)$ è vero, opure $\mathrm{Q}(x)$ è falso per ogni $x \in \mathrm{A}$. Nel primo caso, $\mathrm{Q}(x) \to \mathrm{Q}(y_0)$ per ogni $x \in \mathrm{A}$ (perché $\mathrm{Q}(y_0)$ è vero); nel secondo caso, $\mathrm{Q}(x) \to \mathrm{Q}(y)$ per ogni $x \in \mathrm{A}$ (perché $\mathrm{Q}(x)$ è falso per ogni $x \in \mathrm{A}$) scegliendo y a piacere. Dunque anche ψ è una tautologia.

Esercizio L2.12

Siano x, y, z variabili individuali, P un simbolo di predicato unario e R un simbolo di predicato binario. Si stabilisca se

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{R}(x,y) \to \mathrm{P}(x)) \vDash (\exists x)(\mathrm{R}(x,x) \wedge \neg\mathrm{P}(x))\,.$$

Soluzione – Se α e β sono formule, sappiamo in generale che β è conseguenza logica di α se e soltanto se $\alpha \wedge (\neg\beta)$ non è soddisfacibile.

Dunque la formula

$$(\exists x)(\mathrm{R}(x,x) \wedge \neg\mathrm{P}(x))$$

è conseguenza logica della formula

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{R}(x,y) \to \mathrm{P}(x))$$

se e soltanto se la formula

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{R}(x,y) \to \mathrm{P}(x)) \wedge \neg(\exists x)(\mathrm{R}(x,x) \wedge \neg\mathrm{P}(x))$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo tale formula in forma normale prenessa in modo che la parte senza quantificatori sia in forma normale congiuntiva.

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{R}(x,y) \to \mathrm{P}(x)) \wedge \neg(\exists x)(\mathrm{R}(x,x) \wedge \neg\mathrm{P}(x))$$

$$(\forall x)\neg(\exists y)(\neg\mathrm{R}(x,y) \vee \mathrm{P}(x)) \wedge (\forall x)\neg(\mathrm{R}(x,x) \wedge \neg\mathrm{P}(x))$$

$$(\forall x)(\forall y)(\mathrm{R}(x,y) \wedge \neg\mathrm{P}(x)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{R}(x,x) \vee \mathrm{P}(x))$$

$$(\forall x)(\forall y)\big((\mathrm{R}(x,y) \wedge \neg\mathrm{P}(x) \wedge (\neg\mathrm{R}(x,x) \vee \mathrm{P}(x))\big)$$

Nella formula così ottenuta non compaiono quantificatori esistenziali, quindi possiamo direttamente ricavarne uno schema di clausole:

$$\{\{\mathrm{R}(x,y)\}, \{\neg\mathrm{P}(x)\}, \{\neg\mathrm{R}(x,x), \mathrm{P}(x)\}\}$$

L’universo di Herbrandt consta di un’unica costante, sia essa c. Ponendo $x := c$, $y := c$ e z $:= c$, si ottiene l’insieme finito di clausole

$$\{\{\mathrm{R}(c,c)\}, \{\neg\mathrm{P}(c)\}, \{\neg\mathrm{R}(c,c), \mathrm{P}(c)\}\}$$

al quale possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam.

Pivot P(c):

$$\{\{\mathrm{R}(c,c)\}, \{\neg\mathrm{R}(c,c)\}\}$$

Pivot R(c, c):

$$\{[]\}$$

Dunque la formula considerata non è soddisfacibile, e la $(\exists z)(\mathrm{R}(z,z) \wedge \neg\mathrm{P}(z))$ è effettivamente conseguenza logica della $(\forall x)\neg(\exists y)(\mathrm{R}(x,y) \rightarrow \mathrm{P}(x))$.

Esercizio L2.13

Si esprimano le premesse

(i) Chi non è maschio è femmina;
(ii) Ogni maschio invidia qualche femmina;
(iii) Andrea non invidia alcuna femmina;

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(iv) Andrea è una femmina.

Soluzione – Introduciamo opportuni simboli di predicato:

M(x) traduce “x è un maschio”;
F(x) traduce “x è una femmina”;
I(x, y) traduce “x invidia y”.

Inoltre, introduciamo un simbolo di costante a che interpreteremo con Andrea. Posto allora

$$\alpha := (\forall x)(\neg\mathrm{M}(x) \rightarrow \mathrm{F}(x))\,;$$

$$\beta := (\forall x)(\mathrm{M}(x) \rightarrow (\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{I}(x,y)))\,;$$

$$\gamma := \neg(\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{I}(a,x))\,;$$

$$\delta := \mathrm{F}(a)\,;$$

dobbiamo dimostrare che $\{\alpha, \beta, \gamma\} \vDash \delta$ ossia che

$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge (\neg\delta)$ non è soddisfacibile.

Posto $\varphi := \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge (\neg\delta)$, scriviamo φ in forma normale prenessa in modo che la parte senza quantificatori sia in forma normale congiuntiva.

$$(\forall x)(\neg \mathrm{M}(x) \to \mathrm{F}(x)) \wedge (\forall x)(\mathrm{M}(x) \to (\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{I}(x,y))) \wedge \neg(\exists x)(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{I}(a,x)) \wedge \neg \mathrm{F}(a)$$

$$(\forall x)(\mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(x)) \wedge (\forall x)(\neg \mathrm{M}(x) \vee (\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{I}(x,y))) \wedge (\forall x)\neg(\mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{I}(a,x)) \wedge \neg \mathrm{F}(a)$$

$$(\forall x)(\mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(x)) \wedge (\forall x)(\exists y)(\neg \mathrm{M}(x) \vee (\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{I}(x,y))) \wedge (\forall x)(\neg \mathrm{F}(x) \vee \neg \mathrm{I}(a,x)) \wedge \neg \mathrm{F}(a)$$

$$(\forall x)(\mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(x)) \wedge (\forall x)(\exists y)((\neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(y)) \wedge (\neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{I}(x,y))) \wedge (\forall x)(\neg \mathrm{F}(x) \vee \neg \mathrm{I}(a,x)) \wedge \neg \mathrm{F}(a)$$

$$(\forall x)\big((\mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(x)) \wedge (\exists y)((\neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(y)) \wedge (\neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{I}(x,y))) \wedge (\neg \mathrm{F}(x) \vee \neg \mathrm{I}(a,x)) \wedge \neg \mathrm{F}(a)\big)$$

$$(\forall x)(\exists y)\big((\mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(x)) \wedge ((\neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(y)) \wedge (\neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{I}(x,y))) \wedge (\neg \mathrm{F}(x) \vee \neg \mathrm{I}(a,x)) \wedge \neg \mathrm{F}(a)\big)$$

Adesso introduciamo un simbolo di funzione h e poniamo $y := h(x)$ per ottenere la “forma di Skolem”:

$$(\forall x)\big((\mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(x)) \wedge ((\neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{F}(h(x))) \wedge (\neg \mathrm{M}(x) \vee \mathrm{I}(x,h(x)))) \wedge (\neg \mathrm{F}(x) \vee \neg \mathrm{I}(a,x)) \wedge \neg \mathrm{F}(a)\big).$$

L’universo di Herbrandt associato è $\{a, h(a), h(h(a)), h(h(h(a))), \dots\}$.

Trasformiamo infine la formula così ottenuta in uno schema di clausole

$$\{\{\mathrm{M}(x), \mathrm{F}(x)\},\ \{\neg \mathrm{M}(x), \mathrm{F}(h(x))\},\ \{\neg \mathrm{M}(x), \mathrm{I}(x,h(x))\},\ \{\neg \mathrm{F}(x), \neg \mathrm{I}(a,x)\},\ \{\neg \mathrm{F}(a)\}\}$$

e cerchiamo di trovare una confutazione rapida del corrispondente insieme di clausole assegnando alla x opportuni valori scelti nell’universo di Herbrandt.

Per chiarezza, poniamo:

$\mathcal{C}_1(x) := \{\mathrm{M}(x), \mathrm{F}(x)\}$;

$\mathcal{C}_2(x) := \{\neg \mathrm{M}(x), \mathrm{F}(h(x))\}$;

$\mathcal{C}_3(x) := \{\neg \mathrm{M}(x), \mathrm{I}(x,h(x))\}$;

$\mathcal{C}_4(x) := \{\neg \mathrm{F}(x), \neg \mathrm{I}(a,x)\}$;

$\mathcal{C}_5 := \{\neg \mathrm{F}(a)\}$.

Una possibile confutazione rapida è:

$\mathcal{C}_6 := \mathcal{C}_1(a) = \{\mathrm{M}(a), \mathrm{F}(a)\}$;

$\mathcal{C}_7 := \mathrm{Res}_{\mathrm{F}(a)}(\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6) = \{\mathrm{M}(a)\}$;

$\mathcal{C}_8 := \mathcal{C}_3(a) = \{\neg \mathrm{M}(a), \mathrm{I}(a,h(a))\}$;

$\mathcal{C}_9 := \mathrm{Res}_{\mathrm{M}(a)}(\mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8) = \{\mathrm{I}(a,h(a))\}$;

$\mathcal{C}_{10} := \mathcal{C}_4(h(a)) = \{\neg \mathrm{F}(h(a)), \neg \mathrm{I}(a,h(a))\}$;

$\mathcal{C}_{11} := \mathrm{Res}_{\mathrm{I}(a,h(a))}(\mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{10}) = \{\neg \mathrm{F}(h(a))\}$;

$\mathcal{C}_{12} := \mathcal{C}_2(a) = \{\neg \mathrm{M}(a), \mathrm{F}(h(a))\}$;

$\mathcal{C}_{13} := \mathrm{Res}_{\mathrm{G}(h(a))}(\mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{12}) = \{\neg \mathrm{M}(a)\}$;

$\mathcal{C}_{14} := \mathrm{Res}_{\mathrm{M}(a)}(\mathcal{C}_7, \mathcal{C}_{13}) = []$.

Si è così provato che dalle (i), (ii) e (iii) si può dedurre logicamente la (iv).

Esercizio L2.14

Si esprimano le premesse

(i) Tutti gli aderenti al “Club dei Cattivi Soggetti” sono ladri o mentitori;

(ii) Chi è iscritto alle “Giovani Marmotte” non mente mai;

(iii) Lupetto è iscritto alle “Giovani Marmotte” e non è un ladro;

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(iii) Lupetto non aderisce al “Club dei Cattivi Soggetti”.

Soluzione – Introduciamo quattro simboli di predicato unario (C, G, L, M) e un simbolo di costante (ℓ), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

$\mathrm{C}(x) := x$ aderisce al “Club dei Cattivi Soggetti”;

$\mathrm{G}(x) := x$ è iscritto alle “Giovani Marmotte”;

$\mathrm{L}(x) := x$ è un ladro;

$\mathrm{M}(x) := x$ è un mentitore;

$\ell :=$ Lupetto.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)(\mathrm{C}(x) \to (\mathrm{L}(x) \vee \mathrm{M}(x)))\,;$

(ii) $(\forall x)(\mathrm{G}(x) \to \neg\mathrm{M}(x))\,;$

(iii) $\mathrm{G}(\ell) \wedge \neg\mathrm{L}(\ell)\,;$

e la desiderata conclusione diventa

(iv) $\neg\mathrm{C}(\ell)\,.$

Dobbiamo pertanto dimostrare che

$$(\forall x)(\mathrm{C}(x) \to (\mathrm{L}(x) \vee \mathrm{M}(x))) \wedge (\forall x)(\mathrm{G}(x) \to \neg\mathrm{M}(x)) \wedge \mathrm{G}(\ell) \wedge \neg\mathrm{L}(\ell) \models \neg\mathrm{C}(\ell)$$

ossia che la formula ben formata φ definita da

$$(\forall x)(\mathrm{C}(x) \to (\mathrm{L}(x) \vee \mathrm{M}(x))) \wedge (\forall x)(\mathrm{G}(x) \to \neg\mathrm{M}(x)) \wedge \mathrm{G}(\ell) \wedge \neg\mathrm{L}(\ell) \wedge \mathrm{C}(\ell)$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv (\forall x)\big(\neg\mathrm{C}(x) \vee (\mathrm{L}(x) \vee \mathrm{M}(x)) \wedge (\neg\mathrm{G}(x) \vee \neg\mathrm{M}(x)) \wedge \mathrm{G}(\ell) \wedge \neg\mathrm{L}(\ell) \wedge \mathrm{C}(\ell)\big)\,.$$

In questa forma, φ è già skolemizzata e possiamo considerare lo schema di clausole ad essa associato

$$\{\{\neg\mathrm{C}(x), \mathrm{L}(x), \mathrm{M}(x)\},\ \{\neg\mathrm{G}(x), \neg\mathrm{M}(x)\},\ \{\mathrm{G}(\ell)\},\ \{\neg\mathrm{L}(\ell)\},\ \{\mathrm{C}(\ell)\}\}\,.$$

Poiché l’universo di Herbrandt consiste della sola costante ℓ, assegniamo direttamente alla x il valore ℓ e otteniamo il seguente insieme finito di clausole:

$$\{\{\neg\mathrm{C}(\ell), \mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{G}(\ell), \neg\mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{G}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}, \{\mathrm{C}(\ell)\}\}\,.$$

Possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot $\mathrm{C}(\ell)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{C}(\ell)$ né $\neg\mathrm{C}(\ell)$: $\{\neg\mathrm{G}(\ell), \neg\mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{G}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}$;

$\mathrm{Res}_{\mathrm{C}(\ell)}(\{\neg\mathrm{C}(\ell), \mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{C}(\ell)\}) = \{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}$;

$$\{\{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{G}(\ell), \neg\mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{G}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}\}$$

Pivot $\mathrm{G}(\ell)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{G}(\ell)$ né $\neg\mathrm{G}(\ell)$: $\{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}$;

$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}(\ell)}(\{\neg\mathrm{G}(\ell), \neg\mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{G}(\ell)\}) = \{\neg\mathrm{M}(\ell)\}$;

$$\{\{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{M}(\ell)\}\}$$

Pivot $\mathrm{L}(\ell)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{L}(\ell)$ né $\neg\mathrm{L}(\ell)$: $\{\neg\mathrm{M}(\ell)\}$;

$\mathrm{Res}_{\mathrm{L}(\ell)}(\{\mathrm{L}(\ell), \mathrm{M}(\ell)\}, \{\neg\mathrm{L}(\ell)\}) = \{\mathrm{M}(\ell)\}$;

$$\{\{\neg\mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{M}(\ell)\}\}$$

Pivot $\mathrm{M}(\ell)$:

$\mathrm{Res}_{\mathrm{M}(\ell)}(\{\neg\mathrm{M}(\ell)\}, \{\mathrm{M}(\ell)\}) = [\,]$;

$$\{[\,]\}$$

Poiché abbiamo ottenuto la clausola vuota, l’insieme di clausole considerato non è soddisfacibile; dunque nemmeno la formula φ è soddisfacibile, e possiamo concludere che la (iv) è conseguenza logica delle (i), (ii) e (iii) .

Esercizio L2.15

Si esprimano le premesse

(i) Tutti quelli che hanno sostenuto l’esame e hanno sbagliato l’esercizio di logica sono stati respinti;

(ii) Paolo ha sostenuto l’esame;

(iii) Paolo non ha sbagliato l’esercizio di logica;

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(iv) Paolo non è stato respinto.

Soluzione – Introduciamo tre simboli di predicato unario (E, S, R) e un simbolo di costante (p), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

E(x) := x ha sostenuto l'esame;

S(x) := x ha sbagliato l'esercizio di logica;

R(x) := x è stato respinto;

p := Paolo.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)((\mathrm{E}(x) \wedge \mathrm{S}(x)) \to \mathrm{R}(x))$;

(ii) $\mathrm{E}(p)$;

(iii) $\neg\mathrm{S}(p)$;

e la supposta conclusione diventa

(iv) $\neg\mathrm{R}(p)$.

Dobbiamo pertanto vedere se

$$(\forall x)((\mathrm{E}(x) \wedge \mathrm{S}(x)) \to \mathrm{R}(x)) \wedge \mathrm{E}(p) \wedge \neg\mathrm{S}(p) \models \neg\mathrm{R}(p)$$

ossia se la formula ben formata φ definita da

$$(\forall x)((\mathrm{E}(x) \wedge \mathrm{S}(x)) \to \mathrm{R}(x)) \wedge \mathrm{E}(p) \wedge \neg\mathrm{S}(p) \wedge \neg(\neg\mathrm{R}(p))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv (\forall x)((\neg\mathrm{E}(x) \vee \neg\mathrm{S}(x) \vee \mathrm{R}(x)) \wedge \mathrm{E}(p) \wedge \neg\mathrm{S}(p) \wedge \mathrm{R}(p)) .$$

In questa forma, φ è già skolemizzata e possiamo considerare lo schema di clausole ad essa associato

$$\{\{\neg\mathrm{E}(x), \neg\mathrm{S}(x), \mathrm{R}(x)\}, \{\mathrm{E}(p)\}, \{\neg\mathrm{S}(p)\}, \{\mathrm{R}(p)\}\} .$$

Poiché l'universo di Herbrandt consiste della sola costante p, assegniamo direttamente alla x il valore p e otteniamo il seguente insieme finito di clausole:

$$\{\{\neg\mathrm{E}(p), \neg\mathrm{S}(p), \mathrm{R}(p)\}, \{\mathrm{E}(p)\}, \{\neg\mathrm{S}(p)\}, \{\mathrm{R}(p)\}\} .$$

Possiamo applicare l'algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot R(p):

clausole non contenenti né R(p) né $\neg$R(p): $\{\mathrm{E}(p))\}$, $\{\neg\mathrm{S}(p)\}$;
non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\mathrm{E}(p)\}, \{\neg\mathrm{S}(p)\}\}$$

È già chiaro a questo punto che l’insieme di clausole è soddisfacibile (chi non è convinto prosegua con l’algoritmo di Davis-Putnam e troverà alla fine l’insieme vuoto di clausole). Dunque non si può concludere che Paolo non è stato respinto! (In effetti, se ha fatto “scena muta” alle domande di algebra...)

Esercizio L2.16

Si esprimano le premesse

(i) Tutti quelli che salgono sull’autobus e non hanno un valido titolo di viaggio devono comprare un biglietto dal guidatore;

(ii) Paolo sale sull’autobus;

(iii) Paolo ha un valido titolo di viaggio;

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(iv) Paolo non deve comprare alcun biglietto dal guidatore.

Soluzione – Introduciamo tre simboli di predicato unario (S, T, C) e un simbolo di costante (p), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

$\mathrm{S}(x) \coloneqq x$ sale sull’autobus;

$\mathrm{T}(x) \coloneqq x$ ha un valido titolo di viaggio;

$\mathrm{C}(x) \coloneqq x$ deve comprare un biglietto dal guidatore;

$p \coloneqq$ Paolo.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)((\mathrm{S}(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x)) \to \mathrm{C}(x))\,;$

(ii) $\mathrm{S}(p)\,;$

(iii) $\mathrm{T}(p)\,;$

e la supposta conclusione diventa

(iv) $\neg\mathrm{C}(p)\,.$

Dobbiamo pertanto vedere se

$$(\forall x)((\mathrm{S}(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x)) \to \mathrm{C}(x)) \wedge \mathrm{S}(p) \wedge \mathrm{T}(p) \models \neg\mathrm{C}(p)$$

ossia se la formula ben formata φ definita da

$$(\forall x)((\mathrm{S}(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x)) \to \mathrm{C}(x)) \wedge \mathrm{S}(p) \wedge \mathrm{T}(p) \wedge \neg(\neg\mathrm{C}(p))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv (\forall x)((\neg \mathrm{S}(x) \vee \mathrm{T}(x) \vee \mathrm{C}(x)) \wedge \mathrm{S}(p) \wedge \mathrm{T}(p) \wedge \mathrm{C}(p))\,.$$

In questa forma, φ è già skolemizzata e possiamo considerare lo schema di clausole ad essa associato

$$\{\{\neg \mathrm{S}(x), \mathrm{T}(x), \mathrm{C}(x)\},\ \{\mathrm{S}(p)\},\ \{\mathrm{T}(p)\},\ \{\mathrm{C}(p)\}\}\,.$$

Poiché l'universo di Herbrandt consiste della sola costante p, assegniamo direttamente alla x il valore p e otteniamo il seguente insieme finito di clausole:

$$\{\{\neg \mathrm{S}(p), \mathrm{T}(p), \mathrm{C}(p)\},\ \{\mathrm{S}(p)\},\ \{\mathrm{T}(p)\},\ \{\mathrm{C}(p)\}\}\,.$$

Possiamo applicare l'algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot C(p):

clausole non contenenti né C(p) né ¬C(p): {S(p))}, {T(p)} ;
non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\mathrm{S}(p)\},\ \{\mathrm{T}(p)\}\}$$

È già chiaro a questo punto che l'insieme di clausole è soddisfacibile (chi non è convinto prosegua con l'algoritmo di Davis-Putnam e troverà alla fine l'insieme vuoto di clausole). Dunque non si può concludere che Paolo non deve comprare alcun biglietto dal guidatore! (In effetti, se Paolo sale sull'autobus assieme a un altro passeggero che è sotto la sua tutela, e non ha con sé biglietti oltre al proprio abbonamento, deve comprare un biglietto dal guidatore per l'altro passeggero...)

Esercizio L2.17

Si esprimano le premesse

(i) Ogni numero irriducibile è un numero primo;

(ii) 24 non è un numero irriducibile;

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(iii) 24 non è un numero primo.

Soluzione – Introduciamo due simboli di predicato unario (I, P) e un simbolo di costante (n), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

I(x) $:=$ x è un numero irriducibile;

P(x) $:=$ x è un numero irriducibile;

$p := 24$.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)(\mathrm{I}(x) \to \mathrm{P}(x))\,;$

(ii) $\neg\mathrm{I}(n)\,;$

e la supposta conclusione diventa

(iii) $\neg\mathrm{P}(n)\,.$

Dobbiamo pertanto vedere se

$$(\forall x)(\mathrm{I}(x) \to \mathrm{P}(x)) \wedge \neg\mathrm{I}(n) \vDash \neg\mathrm{P}(n)$$

ossia se la formula ben formata φ definita da

$$(\forall x)(\mathrm{I}(x) \to \mathrm{P}(x)) \wedge \neg\mathrm{I}(n) \wedge \neg(\neg\mathrm{P}(n))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\varphi \equiv (\forall x)((\neg\mathrm{I}(x) \vee \mathrm{P}(x)) \wedge \neg\mathrm{I}(n) \wedge \mathrm{P}(n))\,.$$

In questa forma, φ è già skolemizzata e possiamo considerare lo schema di clausole ad essa associato

$$\{\{\neg\mathrm{I}(x), \mathrm{P}(x)\}, \{\neg\mathrm{I}(n)\}, \{\mathrm{P}(n)\}\}\,.$$

Poiché l'universo di Herbrandt consiste della sola costante n, assegniamo direttamente alla x il valore n e otteniamo il seguente insieme finito di clausole:

$$\{\{\neg\mathrm{I}(n), \mathrm{P}(n)\}, \{\neg\mathrm{I}(n)\}, \{\mathrm{P}(n)\}\}\,.$$

Possiamo applicare l'algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot $\mathrm{P}(n)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{P}(n)$ né $\neg\mathrm{P}(n)$: $\{\neg\mathrm{I}(n)\}$;
non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\neg\mathrm{I}(n)\}\}$$

Pivot $\mathrm{I}(n)$:

$$\{\ \}$$

Dunque l'insieme di clausole è soddisfacibile e la (iii) non è conseguenza logica delle (i) e (ii).

In effetti, interpretando (sempre nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali) $\mathrm{I}(x)$ come "x è multiplo di 4", $\mathrm{P}(x)$ come "x è pari" e n come il numero 6, le premesse risultano vere (ogni multiplo di 4 è un numero pari, e 6 non è un multiplo di 4) ma la conseguenza è falsa (non è vero infatti che 6 non è pari).