

## CRITERI DI DISCRETIZZAZIONE DELLE STRUTTURE

Se il moto di un sistema dinamico è descrivibile mediante un'unica coordinata di spostamento, lo schema di riferimento, come visto in precedenza, è quello di un oscillatore semplice, generalmente contraddistinto dalla sigla SDOF. Se, per contro, richiede l'analisi di più coordinate di spostamento, il sistema viene identificato come "sistema a più gradi di libertà" (Multi-Degree Of Freedom – MDOF). Idealmente un corpo continuo può essere pensato come un sistema dinamico ad infiniti gradi di libertà. Esistono tuttavia dei metodi di discretizzazione che, applicati adeguatamente, possono consentire d'analizzare la dinamica di strutture comunque complesse ricorrendo ad un numero finito, peraltro solitamente contenuto, di gradi di libertà.

I principali metodi di discretizzazione sono i seguenti:

1. metodo di concentrazione delle caratteristiche;
2. metodo delle coordinate generalizzate;
3. metodo degli elementi finiti.

- *Metodo di concentrazione delle caratteristiche*

Il metodo di concentrazione delle caratteristiche consiste nel concentrare le masse e lo smorzamento di un sistema in un numero finito di punti i cui spostamenti costituiscono l'insieme dei gradi di libertà (Figura 1). La scelta degli stessi punti deve essere tale da rappresentare in maniera adeguata le forze d'inerzia e dissipative che si sviluppano nel sistema durante il fenomeno dinamico.

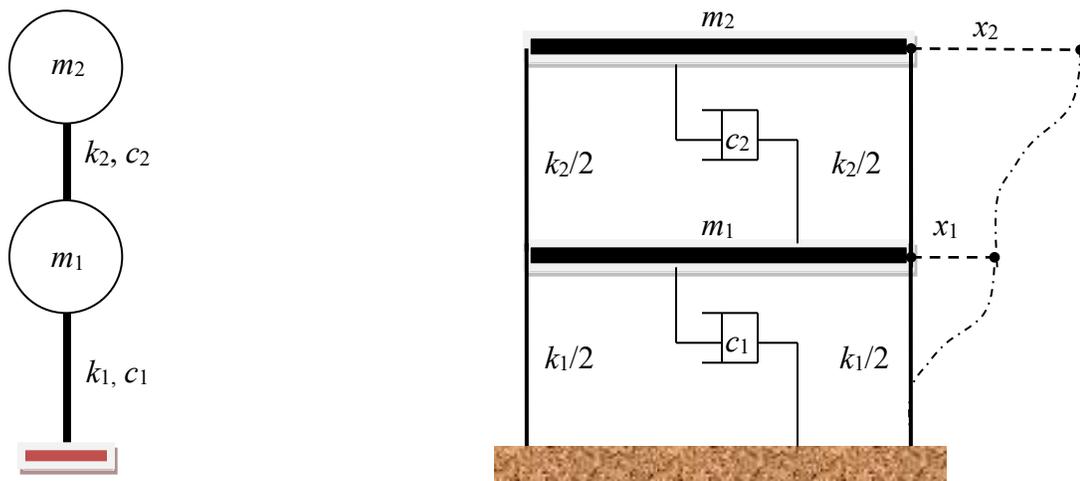


Figura 1 – Esempio d'applicazione del metodo di concentrazione delle caratteristiche

- *Metodo delle coordinate generalizzate*

Secondo questo metodo si assume che le configurazioni del sistema durante il fenomeno dinamico possano essere rappresentate mediante sovrapposizione di un

numero finito di forme di spostamento prefissate (Figura 2). Definite  $\phi_i(z)$  le funzioni descrittive delle varie forme di deformazione ed  $x_i(t)$  le leggi delle relative ampiezze, la deformata globale  $u(z,t)$  della struttura può pertanto essere così valutata:

$$u(z,t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(z)x_i(t) \quad (1)$$

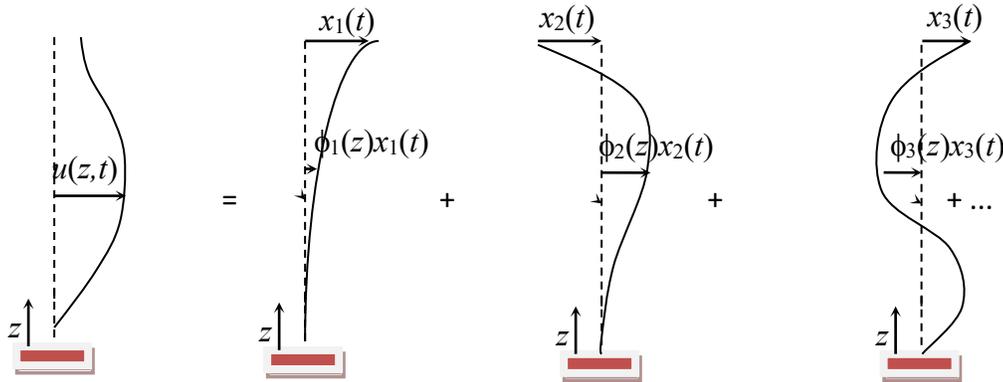


Figura 2 – Esempio d’applicazione del metodo delle coordinate generalizzate

- Metodo degli elementi finiti

È il metodo più versatile e facilmente codificabile in programmi di calcolo. La struttura viene discretizzata in un numero finito di domini, o “elementi”, all’interno di ognuno dei quali il campo di spostamento è descritto da opportune funzioni di forma, la cui ampiezza è determinata dagli spostamenti e dalle rotazioni di punti prefissati detti “nodi”.

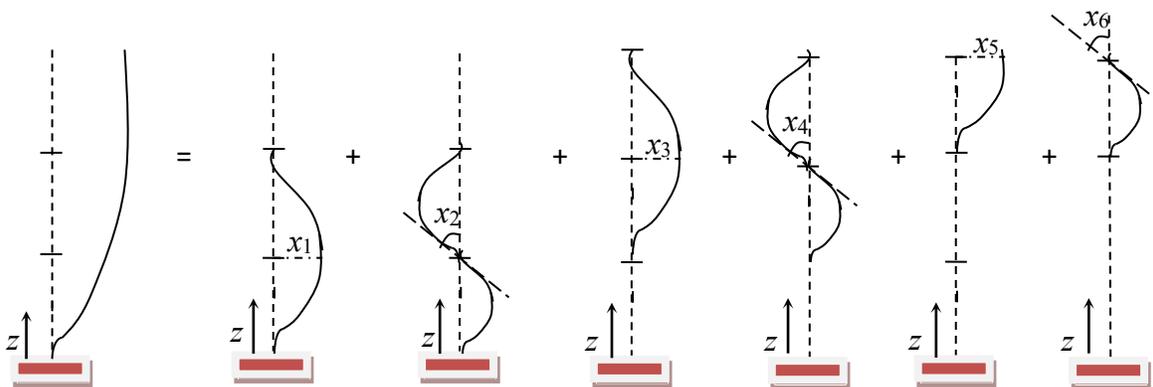


Figura 3 – Esempio d’applicazione del metodo degli elementi finiti

- Definizione delle equazioni del moto mediante il principio di D'Alembert

Anche per sistemi a più gradi di libertà le equazioni del moto possono essere definite ricorrendo ad uno dei tre procedimenti già esaminati in relazione ad oscillatori semplici, ovvero applicando il principio di D'Alembert, il teorema dei lavori virtuali od il teorema di Hamilton. Nel seguito i tre metodi verranno impiegati per la definizione delle equazioni del moto del telaio con due impalcati infinitamente rigidi già mostrato in Figura 1.

Per arrivare alla scrittura delle stesse sulla base dell'asserto del principio di D'Alembert, devono essere definite le equazioni di equilibrio delle forze agenti su ciascun sistema inerziale presente, in questo caso rappresentati dai due impalcati.

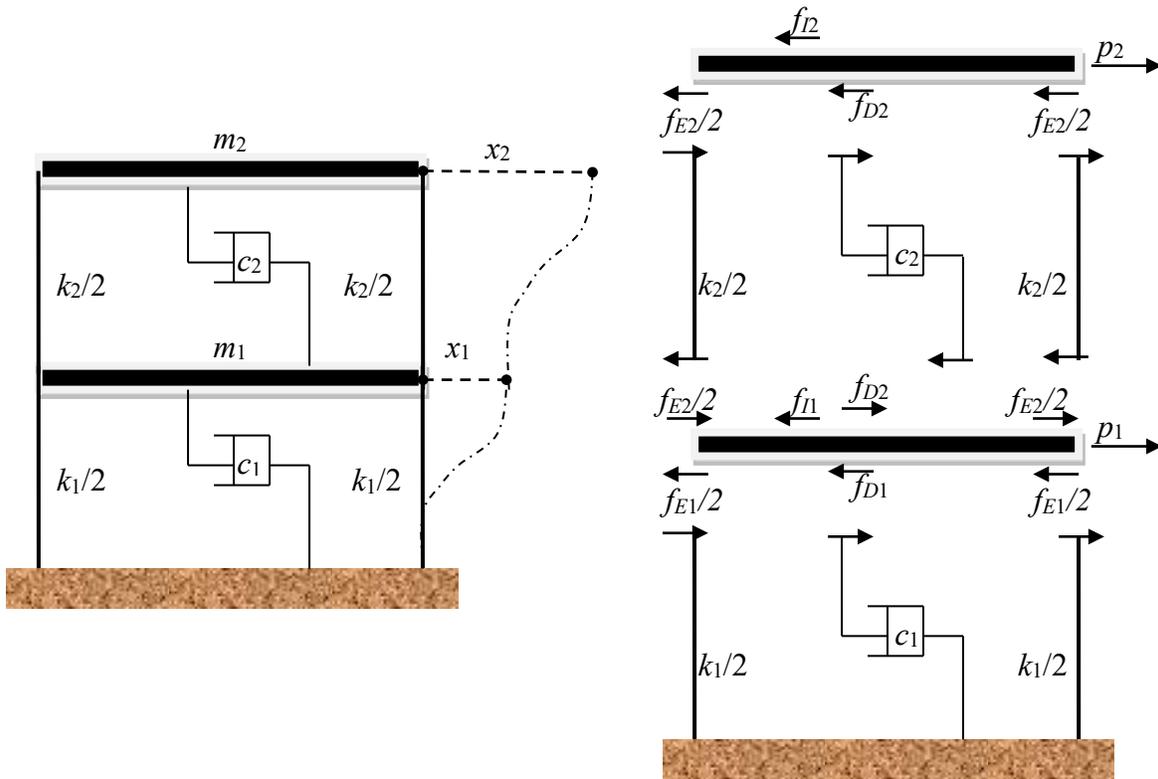


Figura 4 – Definizione delle condizioni di equilibrio dei sistemi inerziali secondo il principio di D'Alembert

Avendo posto:

$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$ ;  $\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$ ;  $\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$  e  $\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$  rispettivamente i vettori di accelerazione,

velocità, spostamento e delle azioni esterne applicate, dall'individuazione delle equazioni di equilibrio per i due traversi:

$$m_1 a_1 + c_1 v_1 - c_2 (v_2 - v_1) + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = p_1 \quad (2a)$$

$$m_2 a_2 + c_2 (v_2 - v_1) + k_2 (x_2 - x_1) = p_2 \quad (2b)$$

il sistema rappresentativo dell'equazione del moto in forma matriciale diventa il seguente:

$$M\mathbf{a} + C\mathbf{v} + K\mathbf{x} = \mathbf{P} \quad (3)$$

essendo M la matrice di massa:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix};$$

C la matrice di smorzamento:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

e K la matrice di rigidità:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Le stesse matrici M e K godono della proprietà di essere simmetriche e definite positive, mentre C, nel caso di sistemi viscosi lineari, è sempre simmetrica ma semidefinita positiva perché può essere nulla anche per valori delle velocità diversi da zero.

E' possibile arrivare alla scrittura della (3) partendo anche dall'applicazione del teorema dei lavori virtuali. Definiti infatti i seguenti lavori virtuali compiuti dalle forze d'inerzia:

$$\delta L_I = \delta L_{I1} + \delta L_{I2} = -m_1 a_1 \delta x_1 - m_2 a_2 \delta x_2$$

dalle forze dissipative:

$$\delta L_D = \delta L_{D1} + \delta L_{D2} = -c_1 v_1 \delta x_1 - c_2 (v_2 - v_1) \delta (x_2 - x_1)$$

e dalle forze elastiche:

$$\delta L_E = \delta L_{E1} + \delta L_{E2} = -k_1 x_1 \delta x_1 - k_2 (x_2 - x_1) \delta (x_2 - x_1)$$

poiché per il teorema dei lavori virtuali deve risultare:

$$\delta L_I + \delta L_D + \delta L_E + \delta L_p = 0$$

e valendo la condizione di compatibilità:

$$\delta(x_2 - x_1) = \delta x_2 - \delta x_1$$

si ricava:

$$\begin{aligned} -m_1 a_1 \delta x_1 - m_2 a_2 \delta x_2 - k_1 x_1 \delta x_1 - k_2 (x_2 - x_1) (\delta x_2 - \delta x_1) - c_1 v_1 \delta x_1 + \\ -c_2 (v_2 - v_1) (\delta x_2 - \delta x_1) + p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Implicando l'annullamento congiunto della somma dei lavori virtuali compiuti rispetto agli spostamenti  $\delta x_1$  e  $\delta x_2$ , la (4) porta alla scrittura del seguente sistema:

$$[-m_1 a_1 - c_1 v_1 + c_2 (v_2 - v_1) - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + p_1] \delta x_1 = 0 \quad (5a)$$

$$[-m_2 a_2 - c_2 (v_2 - v_1) - k_2 (x_2 - x_1) + p_2] \delta x_2 = 0 \quad (5b)$$

in forma matriciale coincidente con la (3).

Al medesimo risultato si sarebbe pervenuti anche applicando il teorema di Hamilton.

Definite con  $T$ ,  $V'$ ,  $\partial D/\partial t$ ,  $W_c$  e  $\partial W_n/\partial t$  rispettivamente l'energia cinetica:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (6)$$

l'energia potenziale elastica:

$$V' = V'_1 + V'_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 x_2) \quad (7)$$

la derivata parziale nel tempo della funzione di dissipazione:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial (D_1 + D_2)}{\partial t} = \frac{1}{2} c_1 v_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (v_2 - v_1)^2 \quad (8)$$

il lavoro delle forze conservative:

$$W_c = -p_{c1} x_1 - p_{c2} x_2 \quad (9)$$

e la potenza delle forze non conservative agenti sul sistema:

$$\frac{\partial W_n}{\partial t} = \frac{\partial(W_{n1} + W_{n2})}{\partial t} = -p_{n1}v_1 - p_{n2}v_2 \quad (10)$$

come già visto per il caso di un portale ad un solo grado di libertà, la stima della soluzione dell'equazione differenziale di Eulero:

$$\frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(T - V + W_n + D)}{\partial v} = 0 \quad (11)$$

porta ad ottenere la soluzione del problema dinamico.

Ponendo le stesse grandezze  $T$ ,  $V'$  e  $\partial D/\partial \dot{\alpha}$  in notazione matriciale:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}; \quad V' = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}; \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (12)$$

viene ribadita la proprietà di simmetria delle matrici di massa, rigidezza e smorzamento. Le quantità scalari  $T$ ,  $V'$  e  $\partial D/\partial \dot{\alpha}$  sono infatti tali da verificare quanto segue:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v_i \partial v_j} = m_{ij}; \quad \frac{\partial^2 V'}{\partial x_i \partial x_j} = k_{ij}; \quad \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial D}{\partial t} = c_{ij} \quad (13)$$

$T$ ,  $V'$  e  $\partial D/\partial \dot{\alpha}$  sono pertanto delle forme quadratiche nello spostamento e nella velocità e per la proprietà d'invertibilità dell'ordine di derivazione vale:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 V'}{\partial x_i \partial x_j} = k_{ji} = \frac{\partial^2 V'}{\partial x_j \partial x_i} \quad (14a)$$

$$c_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial D}{\partial t} = c_{ji} = \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_i} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (14b)$$

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial v_i \partial v_j} = m_{ji} = \frac{\partial^2 T}{\partial v_j \partial v_i} \quad (14c)$$

Dalle (14) emerge come condizione necessaria e sufficiente per la simmetria delle matrici  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  sia l'esistenza delle forme quadratiche (12).

Inoltre, come già osservato le matrici  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  sono definite positive:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0; \quad \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} > 0,$$

mentre la matrice  $\mathbf{C}$  è semidefinita positiva, in quanto può essere nulla anche se il vettore di velocità non è nullo:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Cv} \geq 0$$

Per arrivare alla soluzione del problema dinamico mediante la (11) devono essere effettuate delle derivate di scalari rispetto a vettori. Ad esempio:

$$\frac{\partial V'}{\partial \mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V'}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V'}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{Kx} = \begin{Bmatrix} \sum_j k_{1j} x_j \\ \sum_j k_{2j} x_j \end{Bmatrix}$$

Dalla definizione delle quantità scalari  $T$ ,  $V$ ,  $\partial D/\partial t$ ,  $W_c$  e  $\partial W_n/\partial t$  per il caso di studio proposto in Figura 4 ed indicando con  $V$  l'energia potenziale totale, somma dell'energia potenziale elastica e del lavoro, cambiato di segno, compiuto dalle forze conservative, si ha:

$$\frac{\partial(T)}{\partial \mathbf{x}} = 0; \quad \frac{\partial(T)}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{Mv}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(T)}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{Ma} \quad (15a)$$

$$\frac{\partial(V)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Kx} - \mathbf{p}_c; \quad \frac{\partial(V)}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (15b)$$

$$\frac{\partial(D)}{\partial \mathbf{x}} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(D)}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{Cv} \quad (15c)$$

$$\frac{\partial(W_n)}{\partial \mathbf{x}} = 0; \quad \frac{\partial(W_n)}{\partial \mathbf{v}} = -\int_{-\infty}^t \mathbf{p}_n d\tau; \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(W_n)}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{p}_n \quad (15d)$$

da cui si ottiene ancora la (3), avendo assunto:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_n$$

## SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO

- Sistema non smorzato e privo di azioni esterne

Si consideri un sistema dinamico a più gradi di libertà idealmente non smorzato e se ne definisca l'equazione del moto in assenza di forzanti esterne:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (16)$$

La (16) rappresenta un sistema di equazioni le cui caratteristiche dipendono da quelle delle matrici  $M$  e  $K$ .

Si supponga che le stesse matrici siano simmetriche e definite positive come precedentemente visto e si ricerchino soluzioni del tipo:

$$x(t) = \phi f(t) \quad (17)$$

Nella (17)  $\phi$  rappresenti un vettore di componenti costanti nel tempo. Tale soluzione non varia la forma della deformata nel tempo, ma solo la sua ampiezza, tramite il vettore  $f(t)$ . Dalla sostituzione della (17) nella (16) si ottiene:

$$M\phi \frac{d^2 f}{dt^2} + K\phi f = 0 \quad (18)$$

Premoltiplicando per  $\phi^T$ :

$$\phi^T M\phi \frac{d^2 f}{dt^2} + \phi^T K\phi f = 0 \quad (19)$$

ed essendo le quantità  $\phi^T M\phi$  e  $\phi^T K\phi$  degli scalari, la (19) può essere riscritta come segue:

$$-\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\phi^T K\phi}{\phi^T M\phi} \quad (20)$$

Il rapporto al secondo membro è una quantità costante nel tempo,  $\lambda$ . Imponendo la condizione di normalizzazione:

$$\phi^T M\phi = 1 \quad (21)$$

valida in ragione del fatto che  $M$  è una matrice definita positiva, essendo:

$$\phi^T M\phi > 0$$

per qualunque  $\phi$  diverso da zero, risulta:

$$\phi^T K \phi = \lambda \quad (22)$$

Dalla (20) si ottiene:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \lambda f = 0 \quad (23)$$

Se da essa si ricava la derivata seconda della funzione  $f$  e la si sostituisce nella (18) si ha:

$$(-\lambda M + K)\phi f = 0 \quad (24)$$

Poiché  $f$  è una funzione del tempo, affinché la (24) sia identicamente nulla deve risultare:

$$(-\lambda M + K)\phi = 0 \quad (25)$$

La (25) rappresenta un sistema di equazioni algebriche nel vettore incognito  $\phi$ . Esso è soddisfatto dalla soluzione banale  $\phi=0$ , corrispondente alla configurazione indeformata, e dalla soluzione dinamica variata corrispondente all'annullarsi del determinante della matrice  $[-\lambda M + K]$ :

$$|-\lambda M + K| = 0 \quad (26)$$

Tale equazione prende il nome di "equazione caratteristica" del sistema. E' di tipo algebrico di grado pari al numero  $N$  dei gradi di libertà. Ammette  $N$  radici che costituiscono gli autovalori del sistema ( $\lambda_i$ ), tutti reali in ragione della simmetria delle matrici  $M$  e  $K$ .

I vettori  $\phi$ , determinabili dalla (25) sono anch'essi reali e costituiscono gli autovettori del sistema in esame. Gli autovettori godono della proprietà di ortogonalità, ovvero:

$$\phi_i^T K \phi_j = 0; \quad \phi_i^T M \phi_j = 0 \quad (27)$$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali (23) e lo si riferisca ad un generico autovalore  $\lambda_i$ :

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + \omega_i^2 f_i = 0 \quad (28)$$

Nella (28)  $f_i$  sia una funzione del tempo che descriva l'andamento dell'ampiezza della deformata corrispondente all'autovettore  $\phi_i$ . Poiché  $\lambda_i > 0$ , si può porre  $\lambda_i = \omega_i^2$ .

La (28) è analoga all'equazione del moto di un sistema ad un solo grado di libertà, la cui soluzione può esprimersi nelle due forme tra loro equivalenti:

$$f_i(t) = A_i \cdot \cos \omega_i t + B_i \cdot \sin \omega_i t = \rho_i \cos(\omega_i t - \theta_i) \quad (29)$$

Il moto  $x_i$  corrispondente al generico autovettore  $\phi_i$  ha pertanto l'espressione:

$$x_i(t) = \phi_i (A_i \cdot \cos \omega_i t + B_i \cdot \sin \omega_i t) = \phi_i \rho_i \cos(\omega_i t - \theta_i) \quad (30)$$

Tale funzione rappresenta un moto la cui forma, invariante nel tempo, coincide con l'autovettore  $\phi_i$  e la cui ampiezza varia secondo una legge armonica.

Gli autovettori vengono pertanto denominati "modi di vibrazione" e le  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$  "pulsazioni proprie" del sistema. Tenendo conto delle considerazioni precedenti, le oscillazioni libere della struttura possono quindi essere espresse come segue, eseguendo una sovrapposizione dei diversi modi  $x_i$ :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i (A_i \cdot \cos \omega_i t + B_i \cdot \sin \omega_i t) = \sum_{i=1}^N \phi_i \rho_i \cos(\omega_i t - \theta_i) \quad (31)$$

da cui:

$$v(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i \phi_i (-A_i \cdot \sin \omega_i t + B_i \cdot \cos \omega_i t) = -\sum_{i=1}^N \omega_i \phi_i \rho_i \sin(\omega_i t - \theta_i) \quad (32)$$

Se  $x_0$  e  $v_0$  sono le condizioni iniziali:

$$x_0 = \sum_{i=1}^N \phi_i A_i$$

$$v_0 = \sum_{i=1}^N \omega_i \phi_i B_i$$

premultiplicando entrambi i membri di tali espressioni per  $\phi_j^T M$ , in base alle proprietà di ortogonalità ed alla condizione (21) di normalizzazione, le costanti  $A_i$  e  $B_i$  si ottengono

$$\phi_i^T M x_0 = A_i$$

$$\phi_i^T M v_0 = \omega_i B_i$$

Risulta inoltre:

$$\rho_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}; \theta_i = \arctg\left(\frac{B_i}{A_i}\right)$$

S'introduca la matrice modale  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_N]$ . Dalle proprietà di ortogonalità degli autovettori e dalle condizioni di normalizzazione si ha:

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_i^T \\ \phi_N^T \end{bmatrix} M [\phi_1 \ \phi_i \ \phi_N] = I \quad (33a)$$

$$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_i^T \\ \phi_N^T \end{bmatrix} K [\phi_1 \ \phi_i \ \phi_N] = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_i \dots \lambda_N) = \Lambda \quad (33b)$$

S'introducano quindi delle nuove coordinate  $y$ , legate alla  $x$  mediante la trasformazione lineare omogenea seguente:

$$x = \Phi y \quad (34)$$

Le coordinate  $y$  possono essere ottenute dalla  $x$  premoltiplicando entrambi i membri per  $\Phi^T M$ :

$$\Phi^T M x = \Phi^T M \Phi y = I y = y$$

Le coordinate  $y$  prendono il nome di "coordinate normali". In funzione di esse l'equazione del moto assume la forma:

$$M \Phi \frac{d^2 y}{dt^2} + K \Phi y = 0$$

Se si premoltiplica per  $\Phi^T$  si ha:

$$\Phi^T M \Phi \frac{d^2 y}{dt^2} + \Phi^T K \Phi y = 0$$

ovvero:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \Lambda y = 0 \quad (35)$$

La (35) rappresenta un sistema di N equazioni disaccoppiate nelle incognite  $y_i(t)$ . Il moto del sistema è descritto dalla sommatoria dei moti:

$$x_i(t) = \phi_i y_i(t) \quad (36)$$

- *Metodo di sovrapposizione dei modi*

La procedura per il calcolo della risposta mediante l'analisi delle coordinate normali si articola nei seguenti passi procedurali:

a) trasformazione dell'equazione del moto in coordinate normali da cui:

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \omega_i^2 y_i = 0$$

b) calcolo della soluzione per ciascuna equazione disaccoppiata (eq. 29 per cui  $f_i(t)=y_i(t)$ );

c) calcolo delle funzioni di spostamento dei nodi a partire dalle coordinate normali e loro sovrapposizione per somma vettoriale delle funzioni ottenute al passo precedente:

$$x = \Phi y = \sum_i \phi_i y_i$$

- *Sistema MDOF smorzato*

Nel caso in cui il sistema sia smorzato e la matrice di smorzamento C sia ortogonale è ancora possibile l'interpretazione del moto per sovrapposizione dei modi. Infatti, in tale condizione, C può essere diagonalizzata.

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = 0 \quad (37)$$

Operando la trasformazione in coordinate normali e premoltiplicando per  $\Phi^T$  la (37) diventa:

$$\Phi^T M \Phi \frac{d^2 y}{dt^2} + \Phi^T C \Phi \frac{dy}{dt} + \Phi^T K \Phi y = 0 \quad (38)$$

Ove C sia riconducibile ad una combinazione lineare delle matrici di massa e rigidità, conformemente alla formulazione di Rayleigh:

$$C = \alpha M + \beta K$$

oppure sia definibile come segue:

$$C = M\Phi\Gamma\Phi^T M$$

anche la matrice di smorzamento è diagonalizzabile, assumendo la seguente forma:

$$\Gamma = [\text{diag}(\gamma_1 \ \gamma_i \ \gamma_N)] \quad (39)$$

In cui il generico termine è dato da  $\gamma_i = 2\omega_i \xi_i$ .

La soluzione generale del problema dinamico relativo alla condizione di oscillazione libera è la seguente:

$$x(t) = \sum_i \phi_i e^{-\xi_i \omega_i t} (A_i \cdot \cos \omega_{id} t + B_i \cdot \sin \omega_{id} t) = \sum_i \phi_i \rho_i \cdot e^{-\xi_i \omega_i t} \cos(\omega_{id} t - \theta_i) \quad (40)$$

Nel caso in cui le condizioni iniziali siano  $x(0)=x_0$  e  $v(0)=v_0$ , nella (40) le costanti  $A_i$  e  $B_i$  diventano:

$$\phi_i^T M x_0 = A_i$$

$$\phi_i^T M (v_0 + \xi_i \omega_i x_0) = \omega_{id} B_i$$

In presenza di una forzante qualsiasi la soluzione generale è invece data da:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i \phi_j^T \left\{ M \left[ e^{-\xi_i \omega_i t} \left( x_0 \cos \omega_{id} t + \frac{v_0 + \xi_i \omega_i x_0}{\omega_{id}} \sin \omega_{id} t \right) + \frac{1}{\omega_{id}} \int_0^t e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{id} (t-\tau) p(\tau) d\tau \right] \right\} \quad (41)$$

- *Risposta di un sistema MDOF alle azioni sismiche*

L'azione di un sisma su di una struttura può essere descritta dall'equazione:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = -MRa_g \quad (42)$$

Dove  $x$  rappresenta il vettore degli spostamenti relativi tra i nodi e la base, supposta rigida, e  $a_g$  indica il vettore delle tre componenti traslatorie delle accelerazioni alla base:

$$\mathbf{a}_g = \begin{Bmatrix} a_{gx} \\ a_{gy} \\ a_{gz} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

La matrice di trascinamento R è ottenuta dall'assemblaggio dei tre vettori di trascinamento  $r_x, r_y, r_z$ :

$$R = [r_x \ r_y \ r_z] \quad (44)$$

in cui la generica componente  $r_{xi}$  è uguale ad 1 ( $r_{yi}=1; r_{zi}=1$ ) se l'i-esimo grado di libertà è una traslazione in direzione  $x$  ( $y$  o  $z$ ), 0 negli altri casi.

Per capire meglio tale definizione si esamini l'esempio di telaio riprodotto in Figura 5; per esso i vettori di trascinamento sono i seguenti:

$$\mathbf{r}_x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{r}_y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{r}_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

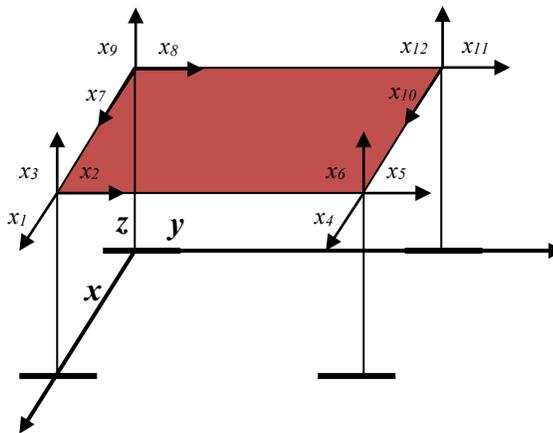


Figura 5 – Esempio di definizione dei vettori di trascinamento

La trasformazione in coordinate normali produce:

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\mathbf{y}}{dt} + \Lambda \mathbf{y} = -\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{R} \mathbf{a}_g \quad (45)$$

la cui  $i$ -esima equazione ha la forma:

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + 2\omega_i \xi_i \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 y_i = -\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{R} \mathbf{a}_g \quad (46)$$

Per un sisma ondulatorio in direzione  $x$  ( $a_{gy} = a_{gz} = 0$ ), si ha:

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + 2\omega_i \xi_i \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 y_i = -\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{r}_x a_{gx} \quad (47)$$

La quantità scalare  $\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{r}_x$ , normalizzata mediante il fattore  $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i$  e moltiplicata per il termine  $-a_{gx}$ , rappresenta l'azione sismica operante sul modo  $i$ -esimo; ad essa va quindi il nome di "coefficiente di partecipazione" del modo  $i$ -esimo in direzione  $x$ :

$$\pi_{ix} = \frac{\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{r}_x}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} \quad (48a)$$

In modo analogo possono essere definiti i coefficienti di partecipazione relativi alle altre due direzioni  $y$  e  $z$ :

$$\pi_{iy} = \frac{\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{r}_y}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} \quad (48b)$$

$$\pi_{iz} = \frac{\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{r}_z}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} \quad (48c)$$

La risposta del modo  $i$ -esimo ad un sisma diretto, ad esempio, secondo  $x$  è determinata dall'entità dell'azione, rappresentata dal prodotto del coefficiente di partecipazione  $\pi_{ix}$  per l'accelerazione  $-a_{gx}$ , e dalle caratteristiche  $\omega_i$  e  $\xi_i$  del modo  $i$ -esimo, le quali sono sintetizzate nella funzione di risposta  $h_i$  o, equivalentemente, nella funzione di risposta in frequenza complessa  $H_i$ . Si può osservare come il coefficiente di partecipazione rappresenti, a meno del segno, il lavoro compiuto dalle forze equivalenti  $-\mathbf{M} \mathbf{r}_x / (\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i)$ , corrispondenti ad un'accelerazione alla base  $a_{gx}$  unitaria, in un sistema di spostamenti definito dall'autovettore  $\phi_i$ . In maniera analoga possono essere interpretati i coefficienti di partecipazione  $\pi_{iy}$  e  $\pi_{iz}$ .

Nelle strutture usuali, sottoposte ad un sisma ondulatorio, si ha che solamente i primi modi di vibrazione hanno un'influenza significativa sulla risposta. Ciò dipende fondamentalmente da due fattori:

- 1) gli autovettori dei modi superiori esibiscono forme progressivamente sempre più intrecciate; i corrispondenti coefficienti di partecipazione assumono pertanto valori che, per distribuzioni di massa sufficientemente uniformi, divengono, in valore assoluto, più piccoli;
- 2) le prime frequenze proprie delle strutture usuali sono, in generale, comprese nell'intervallo 1÷10 Hz ( $T_1=0,1\div 1$  s). In tale intervallo si localizza anche la quota più significativa delle componenti armoniche del sisma, che risultano quindi notevolmente amplificate nella risposta strutturale. Le frequenze proprie dei modi superiori, per contro, assumono valori cui corrisponde un modesto contenuto in frequenza del sisma. Si ha inoltre che i modi superiori esibiscono un comportamento pressoché statico rispetto alle componenti più significative del sisma. Tali circostanze, unitamente ai bassi valori dei coefficienti di partecipazione, fanno sì che i modi superiori risultino scarsamente eccitati e che quindi contribuiscano in maniera trascurabile alla risposta complessiva del sistema.

Una valutazione quantitativa dell'importanza dei diversi modi di vibrare è fornita dal concetto di massa efficace. Sia  $r$  il generico vettore di trascinamento ( $r_x, r_y, r_z$ ),  $a_g$  la corrispondente componente di accelerazione alla base ( $a_{gx}, a_{gy}, a_{gz}$ ) e  $\pi_i$  il relativo coefficiente di partecipazione  $i$ -esimo ( $\pi_{ix}, \pi_{iy}, \pi_{iz}$ ). L'equazione del moto per il modo  $i$ -esimo assume la forma:

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + 2\omega_i \xi_i \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 y_i = -\pi_i a_g \quad (49)$$

Sia  $S_D$  il valore massimo, in modulo, dello spostamento di un oscillatore di massa unitaria, smorzamento  $2\omega_i \xi_i$  e rigidezza  $\omega_i^2$  ad una forza applicata  $a_g$ . Esso è ricavabile dallo spettro di risposta della pseudo-accelerazione  $S_A$ , essendo  $S_D = S_A / \omega_i^2$ . Il valore massimo, in modulo, della funzione  $y_i$  nel caso di forzante  $-\pi_i a_g$  è quindi il seguente:

$$y_{i,\max} = \pi_i S_D \quad (50)$$

Il contributo  $x_i$  del modo  $i$ -esimo al vettore degli spostamenti  $x$  ha l'espressione:

$$x_i = \phi_i y_i \quad (51)$$

ed il corrispondente vettore massimo  $x_{i,\max}$  assume la forma:

$$x_{i,\max} = \phi_i y_{i,\max} = \phi_i \pi_i S_D \quad (52)$$

Si considerino quindi le componenti di forza elastica  $f_{Ei,max}$  ad esso correlate:

$$f_{Ei,max} = Kx_{i,max} = K\phi_i\pi_i S_D = \omega_i^2 M\phi_i\pi_i S_D \quad (53)$$

L'ultima uguaglianza vale in virtù della (25), per il generico  $\lambda_i = \omega_i^2$ . La risultante di tali forze nella direzione  $r$  del sisma è conseguentemente esprimibile come segue:

$$R_i = f_{Ei,max}^T r = \omega_i^2 \phi_i^T M r \pi_i S_D = \omega_i^2 \bar{\pi}_i \pi_i S_D = m_i^* S_A \quad (54)$$

avendo posto:

$$\phi_i^T M r = \bar{\pi}_i ;$$

$$\bar{\pi}_i \pi_i = m_i^* .$$

Poiché il prodotto  $\omega_i^2 S_D$  coincide con la pseudo-accelerazione  $S_A$ , si ha che il termine  $m_i^*$  rappresenta la massa efficace del modo  $i$ -esimo nella direzione considerata.

La "massa modale efficace" gode di particolari proprietà. Definita come "massa totale efficace" la quantità scalare  $r^T M r$ , si può dimostrare come la somma delle masse modali sia circa uguale ad essa. La definizione di massa totale efficace può essere innanzitutto giustificata a partire dalla scrittura dell'energia cinetica  $T$  di un sistema ad  $N$  gradi di libertà:

$$T = \frac{1}{2} v^T M v \quad (55)$$

Se il vettore  $v$  delle velocità è tale che le componenti parallele alla direzione considerata seguano tutte la stessa legge  $v'$  del tempo, e che le altre siano identicamente nulle, ovvero:

$$v(t) = r v'(t) \quad (56)$$

l'energia cinetica assume l'espressione:

$$T(t) = \frac{1}{2} [r^T M r] v'^2(t) \quad (57)$$

in cui il termine  $[r^T M r]$  gioca il ruolo di massa efficace. Il fatto poi che la somma delle masse modali efficaci  $\bar{\pi}_i^2$  sia uguale alla massa totale efficace è dimostrabile come segue. Sia  $\bar{\pi}$  il vettore dei coefficienti di partecipazione, non normalizzati, nella direzione considerata:

$$\bar{\pi} = \begin{Bmatrix} \bar{\pi}_1 \\ \dots \\ \bar{\pi}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1^T \\ \dots \\ \phi_N^T \end{Bmatrix} \mathbf{Mr} = \Phi^T \mathbf{Mr} \quad (58)$$

Si ha:

$$\sum_{i=1}^N \bar{\pi}_i^2 = \bar{\pi}^T \bar{\pi} = \mathbf{r}^T \mathbf{M} \Phi \Phi^T \mathbf{Mr} \quad (59)$$

Dalla (33a), premoltiplicando entrambi i membri per  $\Phi$  si ottiene:

$$\Phi \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \Phi \quad (60)$$

che, postmoltiplicando per  $(\mathbf{M}\Phi)^{-1} = \Phi^{-1} \mathbf{M}^{-1}$  diviene:

$$\Phi \Phi^T \mathbf{M} \Phi (\mathbf{M}\Phi)^{-1} = \Phi \Phi^{-1} \mathbf{M}^{-1} \quad (61)$$

ovvero:

$$\Phi \Phi^T = \mathbf{M}^{-1} \quad (62)$$

Sostituendo la (62) nella (59) si ha:

$$\sum_{i=1}^N \bar{\pi}_i^2 = \bar{\pi}^T \bar{\pi} = \mathbf{r}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Mr} = \mathbf{r}^T \mathbf{Mr} \quad (63)$$

da cui viene confermato l'asserto. Una valutazione dell'importanza dei diversi modi di vibrare può essere pertanto ottenuta dai rapporti  $\alpha_i$  tra le masse efficaci modali  $\pi_i^2$  e la massa totale efficace  $\mathbf{r}^T \mathbf{Mr}$ :

$$\alpha_i = \frac{\pi_i^2}{\mathbf{r}^T \mathbf{Mr}} \quad (64)$$

Per tali rapporti vale la seguente ovvia proprietà:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (65)$$

Essi consentono di effettuare una semplice valutazione a posteriori della validità dell'analisi dinamica compiuta e, in particolare, dell'accuratezza con cui i modi calcolati, generalmente in numero molto minore del totale  $N$ , descrivono il comportamento dinamico della struttura. E' opportuno peraltro fare le seguenti osservazioni:

- la valutazione della massa efficace è di tipo globale; essa può pertanto essere correttamente utilizzata se la distribuzione di masse e rigidezze nella struttura è sufficientemente regolare. Se, per contro, la struttura presenta significative variazioni di massa e/o rigidezza, i valori delle masse efficaci descrivono semplicemente il comportamento d'insieme e possono dare indicazioni erranee sul comportamento locale;
- le masse efficaci prescindono totalmente dall'azione applicata. Per strutture di tipo usuale sottoposte ad azione sismica si ha che le prime frequenze proprie sono comprese nell'intervallo in cui sono più significative le componenti armoniche dell'azione. Per strutture diverse, ad esempio con frequenze proprie più piccole, occorre tener presente che il sisma eccita i modi superiori, che non possono quindi essere trascurati pur presentando bassi valori della massa efficace. A quest'ultimo riguardo è certamente significativo l'esempio riportato nel capitolo "Metodi di analisi di strutture in zona sismica", nel paragrafo dedicato all'analisi statica lineare (Fig. 3).

Il calcolo della risposta strutturale per un sisma assegnato può essere effettuato per integrazione della (42), seguendo il già discusso procedimento di sovrapposizione dei modi. E' tuttavia da ritenersi in termini di tempo più conveniente utilizzare la tecnica di seguito presentata, denominata "analisi dinamica lineare con uso dello spettro di progetto".

L'equazione del moto dell' $i$ -esimo modo di vibrazione (eq. 49) per un sisma diretto secondo una direzione generica è analoga a quella di un sistema ad un solo grado di libertà, sottoposto ad un'accelerazione alla base pari a  $\pi_i a_g$ , in cui  $\pi_i$  e  $a_g$  sono, rispettivamente, il coefficiente di partecipazione e l'accelerazione alla base secondo la direzione considerata. Se si fa l'ipotesi che il comportamento non lineare della struttura possa continuare ad essere rappresentato, per ogni modo di vibrazione, mediante lo spettro di progetto introdotto per i sistemi ad un grado di libertà, si ha che l'accelerazione massima del modo  $i$ -esimo, in valore assoluto, per un sisma parallelo ad una direzione generica, è pari a  $\pi_i S_A$ . Il corrispondente valore assoluto dello spostamento massimo  $y_{i,\max}$  è conseguentemente definito come segue:

$$y_{i,\max} = \pi_i \frac{S_A}{\omega_i^2} \quad (66)$$

Da tale espressione si possono ricavare gli spostamenti massimi  $x_{i,\max}$  e da questi ultimi, mediante un'opportuna combinazione lineare, si può ottenere il massimo contributo del modo  $i$ -esimo al generico effetto  $\eta$ :

$$\eta_{i,\max} = s^T x_{i,\max} \quad (67)$$

Nella (67)  $\eta$  può essere una caratteristica di sollecitazione, uno spostamento relativo, una forza interna, etc. Il vettore  $s$  che compare in essa dipende dal tipo di effetto considerato (ad esempio, se  $\eta$  è la differenza dei contributi corrispondenti ai gradi di libertà  $h$  e  $k$ , il vettore  $s$  ha l'elemento  $h$ -esimo pari ad 1, il  $k$ -esimo pari a -1 e tutti gli altri nulli).

Nei sistemi a più gradi di libertà nasce il problema di combinare, per ogni effetto considerato, i contributi dovuti ai diversi modi di vibrazione. I più accreditati sono quelli di seguito riepilogati.

- Somma diretta dei valori assoluti:

$$|\eta_{\max}| = |\eta_{1,\max}| + |\eta_{2,\max}| + \dots + |\eta_{N,\max}| \quad (68)$$

Oltre ad essere eccessivamente conservativa, la (68) richiederebbe, per essere giustificata, che le coordinate normali raggiungano contemporaneamente i valori massimi, e ciò, in generale, non si verifica.

- Combinazione SRSS (radice quadrata della somma dei quadrati delle quantità considerate):

$$|\eta_{\max}| = [\eta_{1,\max}^2 + \eta_{2,\max}^2 + \dots + \eta_{N,\max}^2]^{1/2} \quad (69)$$

La (69) può essere giustificata in base a considerazioni di dinamica aleatoria. Si osserva come la corretta applicazione di questa formula richieda che i periodi propri della struttura siano ben separati, così da poter assumere che i massimi delle diverse coordinate normali si verifichino in istanti sufficientemente distanti tra loro. Ciò si ha generalmente per le strutture piane. In strutture spaziali, tuttavia, è abbastanza frequente che alcuni modi di vibrazione presentino periodi propri molto prossimi e/o, in certi casi, uguali (ad esempio nel caso di doppia simmetria in pianta). In tali circostanze si può assumere che i massimi delle coordinate normali corrispondenti agli stessi modi si verifichino contemporaneamente; la formula di combinazione di validità più generale è pertanto quella di combinazione quadratica completa, di seguito presentata.

- Combinazione CQC (Combinazione Quadratica Completa):

$$|\eta_{\max}| = [|\mathbf{H}_{\max}|^T \mathbf{A} |\mathbf{H}_{\max}|]^{1/2} \quad (70)$$

avendo posto:

$$|\mathbf{H}_{\max}| = [|\eta_{1,\max}| \dots |\eta_{N,\max}|]^T$$

Nella (70) il generico elemento  $a_{ij}$  della matrice A vale 1 se i modi  $i$  e  $j$  hanno periodi la cui differenza è, in valore assoluto, minore di una tolleranza assegnata, 0 altrimenti. Si ha inoltre  $a_{ii}=1$   $i=1, \dots, N$ . Tale formula coincide con la (68) se i periodi sono tutti prossimi fra loro, con la (69) se invece sono tutti sensibilmente diversi. Se i periodi  $T_i$  e  $T_{i+1}$  sono tra loro prossimi e gli altri apprezzabilmente distanti, l'applicazione di tale formula produce:

$$|\eta_{\max}| = [\eta_{1,\max}^2 + \eta_{i-1,\max}^2 + (|\eta_{i,\max}| + |\eta_{i+1,\max}|)^2 + \eta_{i+2,\max}^2 \dots + \eta_{N,\max}^2]^{1/2}$$

Rispetto alla (70), le NTC2018 propongono di applicare la legge di combinazione quadratica completa nella forma seguente:

$$E = \left( \sum_j \sum_i \rho_{ij} E_i E_j \right)^{1/2} \quad [7.3.4]$$

con  $E_j$  valore dell'effetto relativo al modo  $j$ ;

$\rho_{ij}$  coefficiente di correlazione tra il modo  $i$  e il modo  $j$ , calcolato con formule di comprovata validità quale:

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j} (\xi_i + \beta_{ij} \xi_j) \beta_{ij}^{3/2}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4\xi_i \xi_j \beta_{ij} (1 + \beta_{ij}^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2) \beta_{ij}^2} \quad [7.3.5a]$$

$\xi_{ij}$  smorzamento viscoso dei modi  $i$  e  $j$ ;

$\beta_{ij}$  rapporto tra l'inverso dei periodi di ciascuna coppia  $i-j$  di modi ( $\beta_{ij} = T_j / T_i$ ).

La [7.3.5a], nel caso di uguale smorzamento dei modi  $i$  e  $j$  si esprime come:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2 \beta_{ij}^{3/2}}{(1 + \beta_i) [(1 - \beta_i)^2 + 4\xi^2 \beta_j]} \quad [7.3.5b]''$$

In sintesi, nella sovrapposizione dei massimi modali è sufficiente combinare i contributi di un numero ridotto  $N' \ll N$  di modi, in base alle considerazioni svolte in precedenza.

La procedura d'analisi mediante spettro di progetto consta dei seguenti passi:

- 1) trasformazione dell'equazione del moto in coordinate normali, ottenendo il sistema (45) delle equazioni differenziali disaccoppiate;
- 2) calcolo dei massimi delle coordinate normali in base alla (66);
- 3) calcolo del contributo massimo di ciascun modo al vettore di spostamento, secondo la (52);
- 4) calcolo del contributo massimo di ciascun modo al generico effetto  $\eta$ , mediante la (67);
- 5) sovrapposizione approssimata di tali contributi secondo la [7.3.4].