Appunti per Geometria e Algebra Computazionale 2-6. Curve algebriche

Corso di Laurea in Matematica, Università di Firenze, 2019/20

Giorgio Ottaviani

1 maggio 2020

In questa sezione supponiamo K algebricamente chiuso. Studiamo brevemente le varietà date da una singola equazione in K^2 (curve piane affini) .

Lemma

Sia $f \in K[x, y]$. $V(f) \subset K^2$ è irriducibile se e solo se f è potenza di un irriducibile.

Dimostrazione.

Per un risultato già visto in GAC2-1, $V(f)$ è irriducibile se e solo se $I(V(f))$ è primo. Per il teorema degli zeri di Hilbert $I(V(f)) = \sqrt{(f)}$. Se $f = f_1^{a_1} \cdots f_k^{a_k}$ è la decomposizione di f in polinomi irriducibili segue facilmente che $\sqrt{(f)} = (f_1 \cdots f_k)$. Quindi $V(f)$ è irriducibile se e solo se $(f_1 \cdots f_k)$ è primo. Abbiamo che $(f_1 \cdots f_k)$ è primo se solo se $f_1 \cdots f_k$ è irriducibile, cioè se e solo se $k = 1$ da cui la tesi. $\square$

Polinomi ridotti

Se $f = f_1^{a_1} \cdots f_k^{a_k}$ è la decomposizione di f in fattori irriducibili allora $V(f)$ è unione delle sue componenti irriducibili $V(f_i)$. Se poniamo

$$f_{rid} := f_1 \cdots f_k$$

allora evidentemente $V(f) = V(f_{rid})$ e $\sqrt{(f)} = (f_{rid})$.

Definizione

Un polinomio f si dice ridotto se $f = f_{rid}$ cioè se f è irriducibile oppure contiene i suoi fattori irriducibili con molteplicità 1.

Lemma

Sia $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ *e sia car* $K = 0$*. Allora*

$$f_{rid} = \frac{f}{MCD(f, f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})}$$

Dimostrazione.

Sia $f = f_1^{a_1} \cdots f_k^{a_k}$ la decomposizione di f in fattori irriducibili. È sufficiente provare che

$$MCD(f, f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}) = f_1^{a_1-1} \ldots f_k^{a_k-1}$$

Abbiamo

$$f_{x_i} = \sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} f_1^{a_1} \cdots f_j^{a_j-1} \cdots f_k^{a_k} = f_1^{a_1-1} \ldots f_k^{a_k-1} \sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} f_1 \cdots \hat{f}_j \cdots f_k \tag{0.1}$$

□

Calcolo del ridotto di un polinomio, II

Continuiamo la dimostrazione della formula

$$f_{rid} = \frac{f}{MCD(f, f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})}$$

Dimostrazione.

Quindi $f_1^{a_1-1} \cdots f_k^{a_k-1}$ divide f e tutte le sue derivate prime f_{x_i}. È facile verificare da (0.1) che $\forall j \quad f_j^{a_j}$ non divide tutte le derivate prime di f e quindi segue la tesi. $\square$

Nel resto di questo paragrafo consideriamo sempre curve $C = V(f)$ con f polinomio ridotto. Il lemma precedente mostra che possiamo sempre ricondurci a questo caso (almeno se car $K = 0$).

Intersezione tra curva e retta.

Lemma

Sia $f \in K[x, y]$ di grado totale d. Allora l'intersezione di $V(f)$ con una retta che non è una sua componente irriducibile consiste al più di d punti.

Dimostrazione.

La retta può essere parametrizzata da $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$. Sostituendo abbiamo l'equazione $f(x_0 + at, y_0 + bt) = 0$ che è un polinomio non nullo di grado $\leq d$ nella variabile t e quindi ha al più d radici. $\square$

Molteplicità di intersezione tra curva e retta.

Definizione

Sia $P = (x_0, y_0)$ *un punto di intersezione tra una retta* L *ed una curva* $C = V(f) \subset K^2$*. Sia* L *parametrizzata da* $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, *(in modo che* P *corrisponde al valore* $t = 0$*). La molteplicità della radice* $t = 0$ *del polinomio* $p(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$ *si dice <u>molteplicità di intersezione</u> di* L *e* C *nel punto* P*.*

Come varia la molteplicità di intersezione.

Studiamo ora come varia la molteplicità di intersezione tra una curva C ed una retta L in un punto $P \in C$ al variare di L tra le rette passanti per P. Se $P = (x_0, y_0)$ abbiamo che $f(x_0, y_0) = 0$ e L è parametrizzata da $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ al variare di $(a, b) \in \mathbb{P}^1$.
Consideriamo lo sviluppo di Taylor

$$f(x_0+at, y_0+bt) = f(x_0, y_0)+[f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b]\, t+\ldots (\text{termini sup. in } t) \tag{0.2}$$

Ne segue che

- i) Se $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ allora tutte le rette per P hanno molteplicità di intersezione ≥ 2 con C in P .
- ii) Se $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$ allora la molteplicità di intersezione della retta L è 1 se $[f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b] \neq 0$ mentre è ≥ 2 se $[f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b] = 0$.

Punti nonsingolari e retta tangente

Notiamo che l'equazione $[f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b] = 0$ è risolta da $a = f_y(x_0, y_0)$ e $b = -f_x(x_0, y_0)$. Eliminando il parametro t la retta corrispondente ha equazione

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Definizione

Un punto $P \in C = V(f)$ curva piana affine si dice singolare se $f_x(P) = f_y(P) = 0$. Altrimenti P si dice nonsingolare. Una curva si dice nonsingolare (o liscia) se tutti i suoi punti sono nonsingolari.

Definizione

In un punto $P = (x_0, y_0) \in C = V(f)$ nonsingolare la retta

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

si dice la retta tangente.

Algoritmo per la nonsingolarità di una curva.
Sia K algebricamente chiuso. Una curva $C = V(f)$ (ridotta) è nonsingolare se e solo se $V(f, f_x, f_y) = \emptyset$, ovvero (dal teorema degli zeri di Hilbert) se e solo se $(f, f_x, f_y) = (1)$.

Quest'ultima condizione può essere verificata calcolando una base di Gröbner dell'ideale (f, f_x, f_y).

Molteplicità di un punto.

Definizione

Un punto $p \in V(f)$ si dice di molteplicità r se tutte le derivate parziali di f di ordine $\leq r-1$ si annullano in P e se esiste una derivata parziale di ordine r non nulla in P. Un punto di molteplicità $2, 3, \ldots$ si dice anche doppio, triplo, $\ldots$.

I punti nonsingolari corrispondono ai punti di molteplicità 1. Calcolando i termini successivi dello sviluppo di Taylor (0.2), otteniamo che in un punto P di molteplicità r tutte le rette per P incontrano C con molteplicità di intersezione in $P = r$ escluso un numero finito, dato dalle soluzioni in (a, b) di

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{\partial f}{\partial^{r-i} x \partial^{i} y}(P) a^{r-i} b^{i} = 0 \tag{0.3}$$

Le rette appena menzionate possono essere considerate come rette tangenti in P.

Nodi, cuspidi, flessi.

Definizione

Un punto singolare di molteplicità $r(\geq 2)$ *si dice* <u>*ordinario*</u> *se ha esattamente* r *tangenti distinte, cioè se il discriminante del polinomio in (0.3) è non nullo.*

Esempio

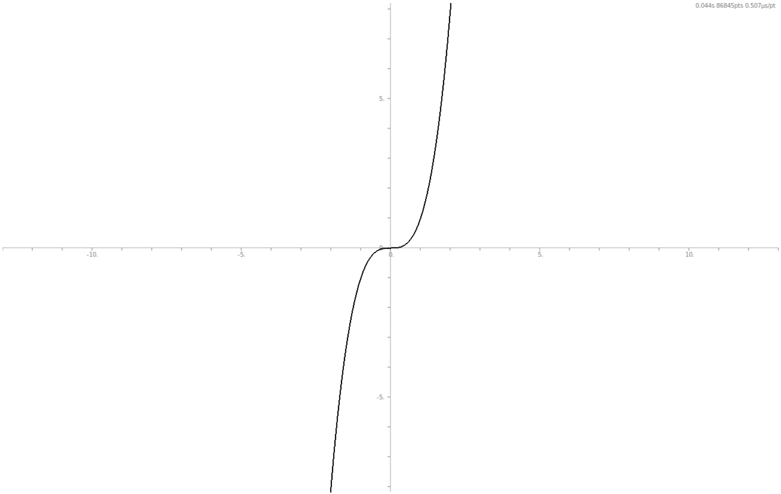
La curva $V(y^2 - x^2(x+1))$ *ha un punto doppio ordinario nell'origine, che si dice nodo. La curva* $V(y^2 - x^3)$ *ha un punto doppio non ordinario nell'origine, che si dice cuspide. La curva* $V(x^4 - x^2 + y^2)$ *(il cui grafico reale è un "otto") ha un punto doppio ordinario nell'origine.*

Definizione

Un punto $P \in V(f) = C$ *nonsingolare si dice un flesso se la tangente in* P *ha molteplicità di intersezione* ≥ 3 *con* C *in* P*.*

Esempi grafici, flesso

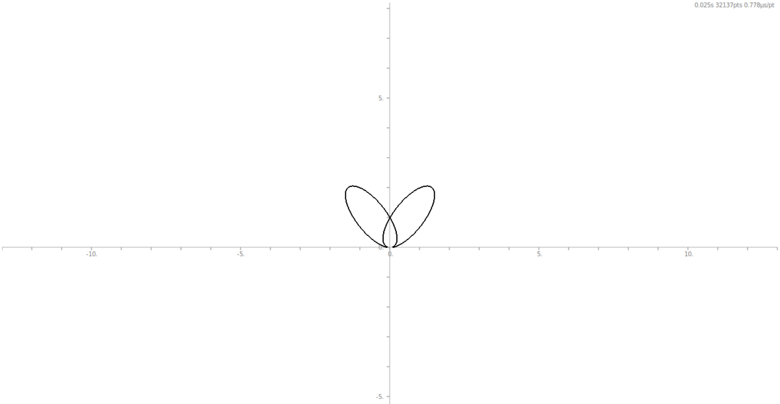
- L'origine è un flesso per la curva $y - x^3 = 0$, (Figura **??**).



- La curva

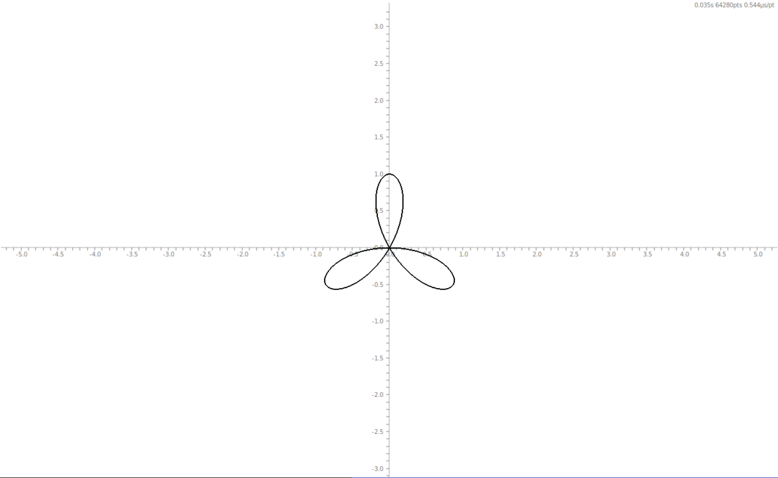
$$2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$$

ha molteplicità 2 nell'origine. La molteplicità di intersezione della tangente (generalizzata) $y = 0$ nell'origine è 4. L'origine si dice un <u>tacnodo</u>.

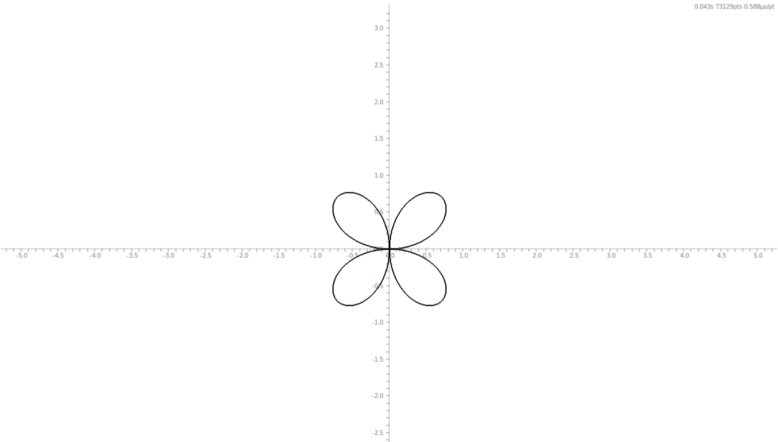


Esempi grafici, punto triplo ordinario

- La curva
$$(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$$
ha un punto triplo ordinario nell'origine.



- La curva
$$(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$$
("quadrifoglio") ha un punto quadruplo non ordinario nell'origine.



Flessi e curvatura, I

Proposizione

Un punto P nonsingolare per $V(f)$ è un flesso se e solo se

$$det \begin{vmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = 0 \qquad (0.5)$$

Dimostrazione.

Sostituendo $(a, b) = (-f_y, f_x)$ all'equazione (0.3) $af_{xx} + 2abf_{xy} + b^2 f_{yy} = 0$ si ottiene esattamente la (0.5). $\square$

Una curva differenziabile in $\mathbb{R}^2$ di equazione implicita $f(x,y)=0$ ha curvatura nei punti nonsingolari uguale a

$$k = \pm \frac{det \begin{vmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

Pertanto i punti di flesso corrispondono ai punti di curvatura nulla.

Esercizi.

Esercizio

Esercizi.

- *a) Per quali valori di* $\lambda \in K$ *la curva*

  $$x^3 + y^3 + 1 + 3\lambda xy = 0$$

  è nonsingolare ? Soluzione: per $\lambda \neq -1, -\rho, -\rho^2$ *(*ρ *radice cubica dell'unità) e nei casi esclusi si spezza in 3 rette.*
- *b) Per quali valori di* $\lambda \in K$ *la curva*

  $$x^3 + y^3 + 1 + \lambda(x + y + 1)^3 = 0$$

  è nonsingolare ? Soluzione: per $\lambda \neq -1/9, -1$.

Il Teorema di Bezout

Teorema (Forma debole del Teorema di Bezout.)

Siano $C = V(f)$ e $D = V(g)$ due curve senza componenti comuni con f, g di gradi rispettivamente d, e. Allora $C \cap D$ consiste al più in de punti.

Dimostrazione.

Se uno dei due polinomi f, g dipende solo da x o solo da y allora la curva corrispondente è data da una unione di rette, ed in questo caso il risultato è evidente. Altrimenti le coordinate dei punti di intersezione devono soddisfare le due equazioni non nulle $Res(f, g, x) = 0$ (in y) e $Res(f, g, y) = 0$ (in x) e quindi i punti di intersezione sono in numero finito che denotiamo con $\{P_1, \ldots, P_k\}$. Sia L_{ij} la retta per P_i e P_j. Per valutare il numero dei punti conviene scegliere un nuovo sistema di coordinate (con un cambiamento affine) dove gli assi coordinati non sono paralleli alle rette L_{ij} per $1 \leq i < j \leq k$. $\square$

Il Teorema di Bezout, il grado del risultante, I

Un cambiamento di coordinate affine non altera i gradi dei polinomi, che chiamiamo ancora con f e g. Adesso per ogni radice x_i del polinomio $Res(f, g, y)$ esiste al più un valore y_i tale che $(x_i, y_i) \in C \cap D$. Quindi è sufficiente osservare che il grado di $Res(f, g, y)$ è $\leq de$.
Posto $f = \sum_{i=0}^{d} a_i(x)y^{d-i}$, $g = \sum_{j=0}^{e} b_j(x)y^{e-j}$ con $deg\ a_i \leq i$ e $deg\ b_j \leq j$, con una trasformazione affine posso supporre $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, calcoliamo

$$\det \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_d & & & & & \\ & a_0 & \ddots & & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_d & & \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_e & & & & \\ & b_0 & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & b_0 & b_1 & & & b_e \end{vmatrix}$$

Il Teorema di Bezout, il grado del risultante, II

Il determinante precedente è una somma di tanti monomi in $a_i(x)$ e $b_j(x)$. Affermiamo che ciascuno di questi monomi ha grado de. Infatti, assumendo come convenzione $a_i = 0$ per $i < 0, d < i$ ed analogamente per b_j, abbiamo che la matrice ha coefficienti

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{j-i} & \text{per } 0 \leq i \leq e-1 \\ b_{j+e-i} & \text{per } e \leq i \leq d+e-1 \end{cases}$$

e ogni addendo del determinante ha la forma

$$\pm \prod_{\sigma(j) \leq d-1} c_{\sigma(j)j} \prod_{\sigma(j) \geq d} c_{\sigma(j)j}$$

che ha grado (quando è non nullo)

$$\leq \sum_{\sigma(j) \leq e-1} (j - \sigma(j)) + \sum_{\sigma(j) \geq e} (j + d - \sigma(j)) = \sum_j j - \sum_j \sigma(j) + ed = ed.$$