POLINOMI di ZERNIKE

1) Funzioni ortonormali:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} F_1 F_2 \rho \, d\vartheta \, d\rho = 0$$

se la funzione è assialsimmetrica allora

$$2\pi \int_0^1 F_1 F_2 \rho \, d\rho = 0$$

ESEMPIO 1

$$\begin{cases} \psi_1 = \rho^2 & \text{(Power Seidel)} \\ \psi_2 = \rho^4 & \text{(Primary Spherical)} \end{cases}$$

$$2\pi \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho^4 \rho \, d\rho = 0 \Rightarrow \quad 2\pi \int_0^1 \rho^7 d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \neq 0$$

Ma se

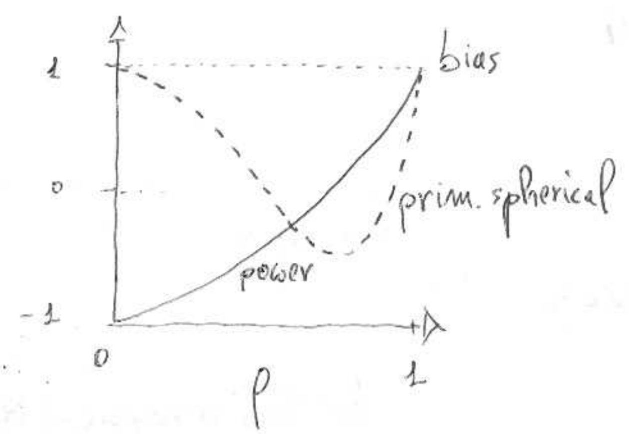
$$\begin{cases} \psi_1 = 2\rho^2 - 1 \\ \psi_2 = 6\rho^4 - 6\rho + 1 \end{cases}$$

$$2\pi \int_0^1 (2\rho^2 - 1)(6\rho^4 - 6\rho + 1) \rho \, d\rho = 2\pi \int_0^1 (12\rho^7 - 18\rho^5 + 8\rho^3 - \rho) \, d\rho =$$

$$= 2\pi \left(\frac{12}{8} - \frac{18}{6} + \frac{8}{4} - \frac{1}{2} \right) = \emptyset$$

Notare che ψ_1 e ψ_2 sono pure ortonormali alla funzione $\psi_0 = 1$ (Bias):

$$2\pi \int_0^1 1 \cdot (2\rho^2 - 1) \rho \, d\rho = 2\pi \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{2} \right) = 0$$



anche il prodotto di sen e cos di differenti ordini sono ortogonali sul cerchio unitario:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} k\vartheta \cdot \operatorname{sen} m\vartheta \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \cos k\vartheta \cdot \cos m\vartheta \, d\vartheta = 0$$

$$\forall k \neq m$$

Forma generale dei polinomi di Zernike (~1930, Nobel 1952):

$$\begin{cases} Z(\rho,\vartheta) = A_{00} + \sum_{N=2}^{\infty} A_{N0} R_N^0(\rho) + \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{N=1}^{\infty} R_N^M \left[A_{NM} \cdot \cos(M\vartheta) + B_{NM}\, \mathrm{sen}(M\vartheta) \right] \\ R_N^M(\rho) = \sum_{S=0}^{\frac{N-M}{2}} (-1)^S \cdot \dfrac{(N-S)!}{S!\left(\frac{N+M}{2} - S\right)!\left(\frac{N-M}{2} - S\right)!} \cdot \rho^{N-2S} \end{cases}$$

ρ = raggio normalizzato

ϑ = angolo polare

i termini esistono solo se: $\begin{cases} N-M \text{ è pari} \\ N \geq M \end{cases}$ (vedi Born & Wolf)

- CodeV usa gli standard Zernike così definiti @ $Z = 1$ per $\rho = 1$
- Zemax usa gli standard Zernike così definiti @ $RMS_{\forall ZERNIKE} = 1$ sul cerchio unitario

$$\text{codeV} \begin{cases} \text{RMS superficie}\Big|_{\text{polin. axisimm}} = \dfrac{1}{\sqrt{N+1}} \\ \text{RMS superficie}\Big|_{\text{polin. non axisimm.}} = \dfrac{1}{\sqrt{2(N+1)}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

ZEMAX è tale per cui RMS di ciascun termine ha valore 1 sul cerchio unitario

Fattori di scala ZEMAX $\begin{cases} \text{Axisimm.} = \sqrt{N+1} \\ \text{NON Axisimm} = \sqrt{2(N+1)} \end{cases}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_1 = \sqrt{3}\,(2\rho^2 - 1) & \text{Power } (N=2) \\ \tilde{\Psi}_2 = \sqrt{5}\,(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1) & \text{Prim. sferica } (N=4) \end{cases}$$ ZEMAX

by Sigmadyne (NY)