La coomologia di de Rham è un invariante per omotopia

Ricordiamo il lemma di Poincaré:

$$H^*(\mathbb{R}^n) = H^*(\text{punto})$$

Data una varietà M consideriamo più in generale il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
M \times \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"'] \\
M \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}
$$

$$\pi(p,t) = p$$

$$s(p) = (p,0)$$

Se $\{(U_\alpha, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)\}$ è un atlante per M, allora $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha, t)\}$ è un atlante per $M \times \mathbb{R}$.

Pensiamo alle forme su M e su $M \times \mathbb{R}$ come collezioni di forme definite sulle carte.

Nuovamente possiamo definire forme di tipo I e II e definire l'operatore di omotopia K.

Con lo stesso argomento utilizzato per il lemma di Poincaré si dimostra che

$$H^*(M \times \mathbb{R}) \simeq H^*(M)$$

isomorfismo dato da π^* e s^*

Corollario (assioma di omotopia per la coomologia di de Rham)

Mappe omotope inducono la stessa mappa in coomologia.

Dim due applicazioni

$f : M \longrightarrow N$ e $g : M \longrightarrow N$

sono C^∞ - **omotope** se

esiste

$F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N \quad C^\infty$

tale che

$$\begin{cases} F(x,t) = f(x) & \text{per } t \geq 1 \\ F(x,t) = g(x) & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

Consideriamo il fibrato (banale)

$$\pi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$$

e le sezioni

$$s_0(x) = (x, 0)$$

$$s_1(x) = (x, 1)$$

allora $\quad f = F \circ s_1$

$$g = F \circ s_0$$

Quindi

$$f^* = s_1^* \circ F^*$$

$$g^* = s_0^* \circ F^*$$

ma in coomologia

$$s_0^* = s_1^* = (\pi^*)^{-1}$$

quindi $\boxed{f^* = g^*}$

<u>Nota</u>: due varietà M ed N sono omotopicamente equivalenti <u>in senso C^∞</u> se se esistono $f : M \to N$ e $g : N \to M$ C^∞ t.c. $f \circ g$ e $g \circ f$ sono C^∞-omotope all'identità su N ed M rispettivamente.

Si può dimostrare che <u>M ed N sono omotopicamente equivalenti in senso C^∞ se e solo se sono omotopicamente equivalenti</u>.

<u>Corollario</u>: due varietà omotopicamente equivalenti hanno la stessa coomologia di de Rham

Dimostrazione

se M ed N sono omotopicamente equivalenti, lo sono anche in senso C^∞.

Quindi esistono

$$f : M \longrightarrow N \xrightarrow{g} M \quad C^\infty$$

t.c. $g \circ f \simeq id_M$ e $f \circ g \simeq id_N$

C^∞ omotope

quindi, in coomologia

$$g^* \circ f^* = 1 \qquad f^* \circ g^* = 1$$

dunque f^* e g^* sono <u>isomorfismi tra $H^*(M)$ e $H^*(N)$</u>.

Nota una varietà contraibile ha la stessa coomologia di un punto.

Def Sia M una varietà, sia $i : A \hookrightarrow M$ inclusione. Supponiamo che esista $r : M \to A$ t.c.

$$r \circ i = id_A$$

r è una **retrazione** se

$i \circ r \simeq id_M$ è omotopa a id_M

Si dice che A è un **retratto di deformazione** di M.

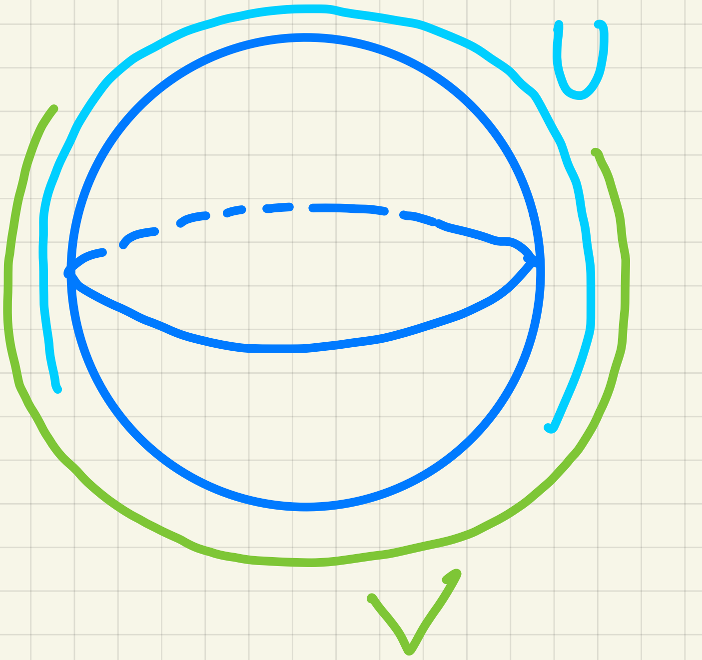
Corollario Se A è un retratto di deformazione di M, allora A ed M hanno la stessa coomologia di de Rham.

Esempio

$$A = S^1 \qquad M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$r : M \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto \frac{x}{|x|}$$

$H^*(S^n) = ?$



$S^n = U \cup V$

$U \cap V \simeq S^{n-1} \times \mathbb{R}$ $\quad U = \mathbb{R}^n \quad V = \mathbb{R}^n$

equatore

utilizzando induzione e Mayer Vietoris si trova

$$H^q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & q=0,\ q=n \\ 0 & 0<q<n \end{cases}$$

infatti:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0 + 0 & 0 \\
H^n(S^n) \arrow[r] & H^n(U) \oplus H^n(V) \arrow[r] & H^n(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \\
H^{n-1}(S^n) \arrow[r] & H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V) \arrow[r] & H^{n-1}(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \arrow[ull, "d^*"'] \\
 & 0 \qquad 0 & \| \\
 & & H^{n-1}(S^{n-1}) \\
 & & \| \\
 & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

• Nota: la coomologia di de Rham è la coomologia del complesso:

$$\to \Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M) \to$$

$d^2=0$

se la successione ↑ fosse esatta $H^q(M)=0$

non ci sarebbe coomologia.

<u>Nota</u>: $H^q(M)$ è uno spazio vettoriale e, con il $\wedge$, un anello.

$H^*(M) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(M)$ e un anello

$\mathbb{Z}$-graduato. $H^*(M)$ è chiamato anello di coomologia di M e il prodotto è chiamato cup product: $[\omega] \cup [\alpha] = [\omega \wedge \alpha]$.

- Fatto: Se M ha un "<u>buon ricoprimento</u>" (good cover: ogni intersezione non vuota di aperti del ricoprimento è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$) <u>finito</u> allora $H^q(M)$ ha dimensione finita.
- Se M è compatta orientata e connessa $H^n(M) = \mathbb{R}$

se M non orientabile $H^n(M) = 0$!

- Se M è orientata e connessa

$$H^n_c(M) = \mathbb{R}$$

coomologia a supporto compatto

- Formula di Künneth:

Siano M e F due varietà, allora

$$H^*(M \times F) = H^*(M) \otimes H^*(F) =$$

$$= \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(F)$$

$\forall \quad n \geq 0.$