4 Simbolo Δ, differenziali

Spesso la chiave per risolvere o comprendere un problema consiste nell'introdurre la notazione giusta. In questo paragrafo interrompiamo lo sviluppo dei metodi di derivazione per introdurre delle notazioni particolarmente efficaci.

Se una variabile cambia da un valore ad un altro, il suo valore finale meno quello iniziale è detto *incremento* della variabile. Tradizionalmente nel calcolo si usa indicare l'incremento di una variabile x col simbolo Δx («delta x»). In questa notazione «Δx» non è il prodotto di «Δ» ed «x»: esso è un simbolo unico rappresentante la *variazione* del valore di x. Analogamente Δy, Δt, $\Delta\theta$, e così via, indicano incrementi delle variabili y, t e θ.

Se $y = f(x)$, e se x cambia da un valore iniziale x_0 ad un valore finale x_1, vi è una variazione corrispondente del valore di y da $y_0 = f(x_0)$ a $y_1 = f(x_1)$. Detto in altro modo, l'incremento

$$\Delta x = x_1 - x_0 \tag{1}$$

produce l'incremento corrispondente

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) \tag{2}$$

di y (fig. 3.4.1). Gli incrementi possono essere tanto positivi che negativi a seconda delle posizioni rispettive dei punti iniziale e finale. Nella figura 3.4.1 Δx è positivo dato che il punto finale x_1 si trova alla destra del punto iniziale x_0. Se x_1 si trovasse alla sinistra di x_0, Δx sarebbe negativo. La relazione (1) può essere riscritta nella forma

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

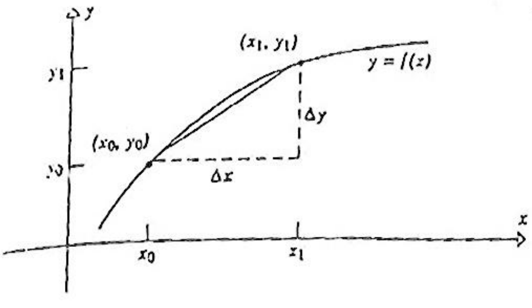

Figura 3.4.1

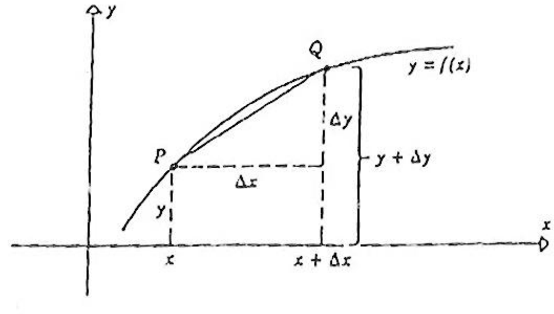

Figura 3.4.2

che esprime che il valore finale di x è il valore iniziale di x più il suo incremento. Qualche volta è conveniente lasciare cadere l'indice zero da x_0 ed usare x per indicare sia il valore iniziale che il nome della variabile. Facendo questo, $x+\Delta x$ rappresenta il valore finale della variabile. Analogamente i valori iniziale e finale di y possono essere indicati con y ed $y+\Delta y$ anziché con y_0 ed y_1 (fig. 3.4.2).

L'uso del simbolo Δ fornisce un modo compatto per riscrivere la definizione di derivata

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

Riferendosi alla figura 3.4.2, la pendenza della retta secante passante per i punti P e Q è

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Quando $\Delta x \to 0$, Q tende a P lungo la curva $y=f(x)$, cosicché le pendenze delle rette secanti tendono alla pendenza della retta tangente in P, cioè

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{4}$$

Questo non è un risultato inatteso dato che $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ cosicché la (4) può essere scritta

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

Questa è semplicemente una nuova enunciazione della (3) in cui viene usato Δx al posto di h.

Se non è opportuno introdurre una variabile dipendente y, scriviamo

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

e la (4) come

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{6}$$

Le espressioni (3), (4), (5) e (6) forniscono quattro modi di scrivere la definizione di derivata, che sono tutti usati comunemente.

Finora l'espressione dy/dx è stata considerata come un simbolo unico per indicare la derivata di $y=f(x)$ rispetto ad x. I simboli «dy» e «dx» in questa

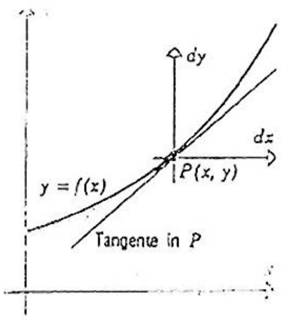

Figura .4.3

espressione sono chiamati *differenziali*; per il momento essi non hanno un significato di per sé stessi. Mostreremo ora come interpretare tali simboli in modo che dy/dx possa essere considerato il rapporto tra dy e dx.

Sia $P(x, y)$ un punto dato sul grafico di $y = f(x)$ in un sistema di coordinate x, y; introduciamo un nuovo sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico avente l'origine in P ed assi coordinati paralleli agli assi x ed y. Come indicato nella figura .4.3, chiameremo asse dy il nuovo asse verticale, ed asse dx il nuovo asse orizzontale. Potremmo ugualmente bene usare lettere come X ed Y per indicare questi assi, ma ciò non servirebbe ai nostri scopi.

Poiché la retta tangente in P alla curva $y = f(x)$ passa per l'origine del sistema di coordinate dx, dy, l'equazione della retta tangente in questo sistema di coordinate è

$$dy = m\,dx \tag{7}$$

dove m è la pendenza della retta tangente. Poiché, tuttavia, gli assi coordinati x, y e gli assi coordinati dx, dy sono paralleli, la retta tangen·· ha lo stesso angolo di inclinazione e la stessa pendenza in entrambi i sistemi (fig. .4.5). Poiché sappiamo che la pendenza della retta tangente è $f'(x)$ nel sistema x, y essa è anche la pendenza nel sistema dx, dy. Pertanto la (7) può essere riscritta come

$$dy = f'(x)\,dx \tag{8}$$

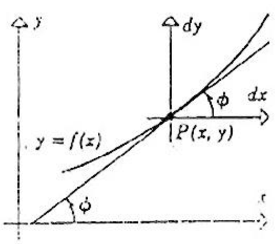

Figura .4.4

Quando $dx \neq 0$ si può riscrivere la (8) come

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Geometricamente, il differenziale dy nella (8) rappresenta la variazione in y che si verifica quando ci si sposta da (x, y) *lungo la retta tangente* in (x, y) finché x varia della quantità dx (fig. .4.5).

Invece Δy rappresenta la variazione di y che si verifica quando si parta da (x, y) e ci si sposti *lungo la curva* $y = f(x)$ finché x varia della quantità Δx. Un confronto tra dy e Δy è mostrato nella figura 3.4.6 nel caso in cui $dx = \Delta x$.

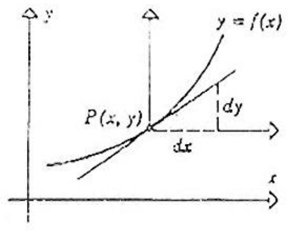

Figura 3.4.5

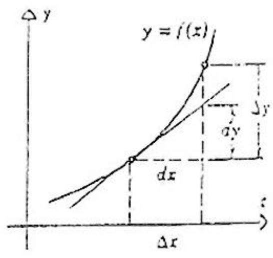

Figura 3.4.6

Esempio 1 Se $y = x^2$, la relazione $dy/dx = 2x$ può essere scritta nella *forma differenziale*

$$dy = 2x\,dx$$

Quando $x = 3$ essa diventa

$$dy = 6dx$$

il che esprime che se noi ci spostiamo lungo la tangente al grafico in $x = 3$ la variazione di dx unità in x produce una variazione di $6dx$ unità in y. Per esempio, se la variazione in x è

$$dx = 4$$

allora la variazione in y lungo la tangente è

$$dy = 6(4) = 24$$

Per confronto, se si parte da $x = 3$ e ci si sposta lungo la curva $y = f(x) = x^2$, così che la variazione in x sia

$$\Delta x = 4$$

allora la variazione in y è

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = f(7) - f(3) = 7^2 - 3^2 = 40$$

Proprio come

$$\frac{d}{dx}[\ \ ]$$

indica la derivata dell'espressione in parentesi, così

$$d[\ \ ]$$

indica il differenziale dell'espressione tra parentesi. Per esempio

$$d[x^3] = 3x^2\,dx$$
$$d[f(x)] = f'(x)\,dx$$

Le regole fondamentali di derivazione possono essere espresse in termini di differenziali. Nella tabella seguente le formule differenziali sulla destra si ottengono dalle formule delle derivate sulla sinistra moltiplicandole per dx.

Derivate	*Differenziali*
$\frac{dc}{dx} = 0$	$dc = 0$
$\frac{d}{dx}[cf] = c\frac{df}{dx}$	$d[cf] = c\,df$
$\frac{d}{dx}[f + g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$	$d[f + g] = df + dg$
$\frac{d}{dx}[fg] = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$	$d[fg] = f\,dg + g\,df$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$	$d\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$

Esempio 2 Trovare dy se $y = x \sin x$.

Soluzione.

$$\begin{aligned} dy = d[x \sin x] &= x\,d[\sin x] + (\sin x)\,d[x] \\ &= x(\cos x)\,dx + (\sin x)\,dx \qquad [\text{poiché } d[x] = 1 \cdot dx = dx] \\ &= (x \cos x + \sin x)\,dx \end{aligned}$$

Geometricamente, dalla figura .4.6 risulta evidente che $\Delta y - dy \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ (purché $dx = \Delta x$). Questo porta all'utile approssimazione

$$\Delta y \approx dy \qquad [\text{quando } \Delta x = dx \approx 0] \tag{9}$$

L'approssimazione (9) ha applicazioni nello studio della *propagazione degli errori*. Supponiamo che un ricercatore misuri una grandezza fisica. A causa delle imprecisioni della strumentazione o per altre cause, normalmente il ricercatore non otterrà il valore esatto x della grandezza, ma otterrà il valore $x+\Delta x$, dove Δx è l'errore di misura. Questo valore rilevato può essere usato poi per calcolare qualche altra grandezza y. In tale modo l'errore di misura Δx si propaga producendo un altro errore Δy sul valore calcolato di y.

Esempio 3 Il raggio misurato di una sfera risulta essere di 50 cm con un errore di misura massima di $\pm 0{,}02$ cm. Stimare l'errore sul volume calcolato della sfera.

Soluzione. Il volume della sfera è

$$V=\tfrac{4}{3}\pi r^3 \tag{10}$$

quindi un errore Δr su r porta ad un errore ΔV su V dato da

$$\Delta V=\tfrac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3-\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Se Δr è piccolo e se $dr=\Delta r$, possiamo approssimare ΔV con dV, per cui dalla (10) si ottiene

$$\Delta V\approx dV=4\pi r^2\,dr=4\pi r^2\,\Delta r \tag{11}$$

Sostituendo nella (11) $r=50$ cm e $\Delta r=\pm 0.02$ cm si ha

$$\Delta V\approx 4\pi(2500)(\pm 0{,}02)\approx \pm 628{,}32\ \text{cm}^3$$

Quindi l'errore massimo sul volume è approssimativamente ± 628 centimetri cubi. ◄

Osservazione. Nella (11) r rappresenta il valore esatto del raggio. Poiché tale valore non era noto, gli abbiamo sostituito il valore $r=50$ cm per ottenere ΔV. Ciò è ragionevole dato che l'errore Δr era piccolo per ipotesi.

Se il valore esatto di una grandezza è q e la sua misura o il suo calcolo dà un errore Δq, la quantità $\Delta q/q$ è detta ***errore relativo*** della misura o del calcolo; quando è espresso come una percentuale, $\Delta q/q$ *viene detto* ***errore percentuale***. Nella pratica il valore esatto q generalmente non è noto, quindi in sua vece viene usato il valore di q misurato o calcolato, e l'errore relativo è approssimato da dq/q. Per esempio, il raggio misurato della sfera dell'esempio 3 era di 50 cm con un errore massimo di $\pm 0{,}02$ cm; quindi l'errore relativo del raggio era approssimativamente $\pm 0{,}02/50=\pm 0{,}0004$ ovvero un errore percentuale pari a $\pm 0{,}04\%$.

Rapidità di variazione

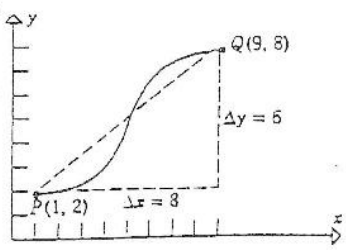

Figura .4.7

Finora la derivata dy/dx è stata interpretata come la pendenza della tangente alla curva $y=f(x)$. Le derivate possono anche essere interpretate come delle rapidità di variazione. Per chiarire questo punto, si consideri la curva $y=f(x)$ della figura .4.7. Quando ci si sposta lungo la curva da P a Q, y aumenta prima lentamente, poi più rapidamente e quindi di nuovo più lentamente. Tuttavia alla fine del percorso da P a Q, y è variata della quantità totale $\Delta y=6$ mentre x è variata della quantità totale $\Delta x=8$. Dato che

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},$$

segue che «in media» y aumenta di $\frac{3}{4}$ di unità per ogni unità di cui aumenta x. Per dirlo con altre parole, y aumenta con una *rapidità media* uguale a $\frac{1}{4}$ della rapidità di aumento di x tra P e Q.

Ciò suggerisce la definizione seguente:

.3.1 Definizione Se $P(x_0, y_0)$ e $Q(x_1, y_1)$ sono punti del grafico di $y=f(x)$ definiamo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

come la *rapidità media, o tasso medio, di variazione di y rispetto ad x* tra P e Q.

Naturalmente, il rapporto $\Delta y/\Delta x$ non è altro che la pendenza della retta secante passante per P e Q.

Per la precedente discussione sulla velocità, si può ragionevolmente definire la rapidità istantanea con cui y varia rispetto a x nel punto $P(x_0, y_0)$ sulla curva $y=f(x)$ come il limite della rapidità media di variazione tra $P(x_0, y_0)$ e $Q(x_1, y_1)$ quando Q tende a P lungo la curva, o, equivalentemente, quando $\Delta x \to 0$. Dato che

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

siamo portati alla seguente definizione.

.4.2 Definizione Se $P(x_0, y_0)$ è un punto del grafico di $y=f(x)$ e se f è derivabile in x_0, si definisce

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

come la *rapidità istantanea, o tasso istantaneo, di variazione di y rispetto ad x* in P.

Esempio 4 Sulla curva

$$y=x^2$$

la rapidità istantanea con cui y varia rispetto a x in $P(3, 9)$ è

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}=2x\Big|_{x=3}=6$$

Quindi y aumenta 6 volte più rapidamente di x in P. ◄

Esempio 5 Per la retta

$$y=mx+b$$

la derivata è costante,

$$\frac{dy}{dx}=m$$

Quindi la rapidità istantanea con cui y varia rispetto a x lungo una linea retta è la stessa in ciascun punto della retta. Tale rapidità costante è la pendenza della retta. ◄

Esercizi .4

1. Posto $y=x^2$.
   a) Trovare Δy se $\Delta x=1$ e $x=2$.
   b) Trovare dy se $dx=1$ e $x=2$.
   c) Disegnare il grafico di $y=x^2$ e mostrare Δy e dy nella figura.

2. Ripetere l'esercizio 1 con $x=2$ di nuovo come valore iniziale, ma $\Delta x=-1$ e $dx=-1$.

3. Posto $y=\dfrac{1}{x}$.
   a) Trovare Δy se $\Delta x=0{,}5$ e $x=1$.
   b) Trovare dy se $dx=0{,}5$ e $x=1$.
   c) Disegnare il grafico di $y=\dfrac{1}{x}$ e mostrare nella figura Δy e dy.

4. Ripetere l'esercizio 3 con $x=1$ di nuovo come valore iniziale, ma $\Delta x=-0{,}5$ e $dx=-0{,}5$.

Negli esercizi 5-8 trovare le formule generali per dy e Δy.

5. $y=x^3$.
6. $y=8x-4$.
7. $y=x^2-2x+1$.
8. $y=\sin x$.

Negli esercizi 9-12 trovare dy.

9. $y=4x^3-7x^2+2x-1$.
10. $y=\dfrac{1}{x^3-1}$.
11. $y=x\cos x$.
12. $y=\dfrac{1-x^3}{2-x}$.

13. Posto $y=2x^2-1$.
    a) Trovare la rapidità media con cui y varia rispetto a x nell'intervallo $[1, 4]$.
    b) Trovare la rapidità istantanea con cui y varia rispetto a x nel punto $x=-1$.

14. Posto $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.
    a) Trovare la rapidità media con cui y varia rispetto a x nell'intervallo $[-1, 2]$.
    b) Trovare la rapidità istantanea con cui y varia rispetto a x nel punto $x=-1$.

15. Usare la formula $A=\pi r^2$ per l'area del cerchio per trovare:
    a) La rapidità media con cui l'area del cerchio varia con r quando il raggio cresce da $r=1$ a $r=2$.
    b) La rapidità istantanea con cui l'area varia rispetto a r quando $r=2$.

16. Usare la formula $V=l^3$ per il volume di un cubo di lato l per trovare:
    a) la rapidità media con cui il volume di un cubo varia rispetto a l quando l aumenta da $l=2$ ad $l=4$;
    b) la rapidità istantanea con cui il volume di un cubo varia rispetto a l quando $l=5$.

17. La misura del lato di un quadrato è 10 cm con un errore massimo di $\pm 0{,}1$ cm.
    a. Usare i differenziali per stimare l'errore nel calcolo dell'area.
    b. Stimare l'errore percentuale del lato e dell'area.

18. La misura del lato di un cubo è di 25 cm con un errore percentuale massimo di $\pm 2\%$. Usare i differenziali per aiutarsi a stimare l'errore percentuale del volume del cubo.

19. La resistenza elettrica R di un cavo conduttore è data da $R=k/r^2$ dove k è una costante ed r è il raggio del filo. Se il raggio r ha un errore massimo di $\pm 5\%$, usare i differenziali per stimare l'errore percentuale su R (si assuma che k sia un valore esatto).

20. Si debba calcolare il valore del volume di una sfera a partire dalla misura del suo raggio. Stimare il massimo errore percentuale possibile nella misura se l'errore percentuale del volume deve essere contenuto entro $\pm 3\%$. [$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ è il volume di una sfera di raggio r].

Risposte ad alcuni esercizi

1) : a) 5 b) 4

3) a) $-\frac{1}{3}$ b) $-0{,}5$

5) $dy = 3x^2 dx$
$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

7) $dy = (2x-2)\,dx$
$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x$

9) $dy = (12x^2 - 14x + 2)\,dx$

11) $dy = (12x^2 - 14x + 2)\,dx$

13) a) 10 b) 4

15) a) 3π b) 4π

17) a) $\pm 2\ cm^2$
b) $\pm 1\%$ (lato), $\pm 2\%$ (area)

19) $\pm 10\%$

.5 Regola di derivazione delle funzioni composte

In questo paragrafo consideriamo il problema seguente.

.5.1 Problema Se si conoscono le derivate di f e g, come si può utilizzare tale informazione per ricavare la derivata della funzione composta $f \circ g$?

Per esempio, si sa come derivare

$$f(x) = \sin x \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 - 1$$

Come può essere utilizzata tale conoscenza per ottenere la derivata di

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 - 1)?$$

L'idea è la seguente. Si introducono le variabili dipendenti

$$y = \sin(x^2 - 1) \qquad \text{e} \qquad u = x^2 - 1 \tag{1}$$

cosicché

$$y = \sin u$$

È noto che

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}[\sin u] = \cos u \tag{2}$$

e che

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}[x^2 - 1] = 2x \tag{3}$$

Si vuole ricavare

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\sin(x^2 - 1)]$$

Se si considera una derivata come una rapidità di variazione, l'intuizione suggerisce

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} \tag{4}$$

(per esempio, se y varia con una rapidità 4 volte superiore a quella di u ed u varia con una rapidità 2 volte superiore a quella di x, allora y varia con una rapidità $4 \times 2 = 8$ volte superiore a quella di x). Sostituendo la (2) e la (3) nella (4) si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = (\cos u)(2x)$$

che, utilizzando la (1), può essere espressa in termini della sola x

$$\frac{dy}{dx} = [\cos(x^2 - 1)]\, 2x = 2x \cos(x^2 - 1)$$

Le idee introdotte da questo esempio sono formalizzate nel seguente teorema.

.5.2 Teorema *Regola di derivazione delle funzioni composte* *Se g è derivabile nel punto x e se f è derivabile nel punto $g(x)$, la funzione composta $f \circ g$ è derivabile nel punto x. Inoltre, se*

$$y = f(g(x)) \qquad \text{e} \qquad u = g(x)$$

allora

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{5}$$

Prima di dimostrare questo risultato consideriamo qualche esempio.

Esempio 1 Trovare dy/dx se

$$y=4\cos(x^3)$$

Soluzione. Poniamo $u=x^3$ cosicché

$$y=4\cos u$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}&=\frac{d}{du}[4\cos u]\cdot\frac{d}{dx}[x^3]\\&=(-4\sin u)\cdot(3x^2)\\&=-12x^2\sin(x^3)\end{aligned}$$

◀

Esempio 2 Trovare

$$\frac{d}{dx}[(x^3+7x+1)^{35}]$$

Soluzione. Poniamo

$$y=(x^3+7x+1)^{35} \qquad \text{e} \qquad u=x^3+7x+1$$

cosicché

$$y=u^{35}$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(x^3+7x+1)^{35}]=\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=\frac{d}{du}[u^{35}]\cdot\frac{d}{dx}[x^3+7x+1]\\&=(35u^{34})(3x^2+7)\\&=35(x^3+7x+1)^{34}(3x^2+7)\end{aligned}$$

◀

Esempio 3 Trovare $f'(x)$ se

$$f(x)=\frac{1}{2x^4-x^2+8}$$

Soluzione. Per prima cosa si riscriva f come

$$f(x)=(2x^4-x^2+8)^{-1}$$

Poniamo

$$y=(2x^4-x^2+8)^{-1} \qquad \text{e} \qquad u=2x^4-x^2+8$$

cosicché

$$y=u^{-1}$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}[u^{-1}]\cdot\frac{d}{dx}[2x^4 - x^2 + 8]$$

$$= (-u^{-2})(8x^3 - 2x)$$

$$= -(2x^4 - x^2 + 8)^{-2}(8x^3 - 2x)$$

$$= -\frac{8x^3 - 2x}{(2x^4 - x^2 + 8)^2}$$

(notare che $f(x)$ può anche essere derivata senza fare uso della regola di derivazione delle funzioni composte. Basta trattare f come un quoziente ed applicare il teorema .2.6). ◄

La regola di derivazione delle funzioni composte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

è facile da ricordare perché il primo membro è esattamente ciò che rimane se si *semplificano* i due termini in *du* dal secondo membro. Questo artificio di *semplificazione* consente di ricordare facilmente la regola di derivazione delle funzioni composte quando si usano altre variabili diverse da x, y ed u.

Esempio 4 Dati

$$w = \operatorname{tg} x \qquad \text{e} \qquad x = 4t^3 + t$$

trovare dw/dt.

Soluzione. In questo caso la regola di derivazione delle funzioni composte assume la forma

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x]\cdot\frac{d}{dt}[4t^3 + t]$$

$$= (\sec^2 x)(12t^2 + 1)$$

$$= (12t^2 + 1)\sec^2(4t^3 + t)$$ ◄

Esempio 5 Trovare

$$\frac{d}{dx}[\sin^3(9x + 1)]$$

Soluzione. Poniamo

$$y = \sin^3(9x + 1) \qquad \text{e} \qquad u = \sin(9x + 1)$$

cosicché

$$y = u^3$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\frac{d}{dx}[\sin^3(9x + 1)] = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{6}$$

Il calcolo di

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}[\sin(9x+1)]$$

richiede esso stesso un'applicazione della regola di derivazione delle funzioni composte. A questo scopo poniamo

$$v=9x+1$$

cosicché

$$u=\sin(9x+1)=\sin v$$

Ora du/dx può essere ottenuto dalla seguente forma della regola di derivazione delle funzioni composte

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \tag{7}$$

Sostituendo la (7) nella (6) otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sin^3(9x+1)]=\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\\ &=\frac{d}{du}[u^3]\cdot\frac{d}{dv}[\sin v]\cdot\frac{d}{dx}[9x+1]\\ &=3u^2\cdot\cos v\cdot 9\\ &=3\sin^2(9x+1)\cdot\cos(9x+1)\cdot 9\\ &=27\sin^2(9x+1)\cos(9x+1)\end{aligned}$$

◀

Osservazione. Una volta familiarizzato con la regola di derivazione delle funzioni composte il lettore dovrebbe essere in grado di fare a meno di qualcuno dei passaggi intermedi. Per esempio, per derivare

$$y=(3x^2+5)^{17}$$

possiamo visualizzare mentalmente questa funzione come

$$y=u^{17}$$

dove u sta per $3x^2+5$. Dato che possiamo derivare a mente sia u^{17} che $3x^2+5$, possiamo scrivere semplicemente

$$\frac{dy}{dx}=17u^{16}\cdot 6x=17(3x^2+5)^{16}\cdot 6x=102x(3x^2+5)^{16}$$

Con un po' più di pratica il lettore dovrebbe essere capace di fare a meno anche del primo passaggio. Di fatto la derivazione di una funzione come $\cos(x^3+x)$ dovrebbe essere eseguita scrivendo semplicemente

$$\frac{d}{dx}[\cos(x^3+x)]=-\sin(x^3+x)\cdot(3x^2+1)$$

Concludiamo questo paragrafo con qualche commento sulla dimostrazione della regola di derivazione delle funzioni composte.

Cenni sulla dimostrazione della regola di derivazione delle funzioni composte (teorema .5.2)

Sia Δx un incremento di x e Δu e Δy gli incrementi corrispondenti di g e $f \circ g$, cioè

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

$$\Delta y = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$$

Segue che

$$\Delta u \to 0 \qquad \text{quando} \qquad \Delta x \to 0$$

dato che

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta x = \frac{du}{dx} \cdot 0 = 0$$

Se ora facciamo l'ipotesi che $\Delta u \neq 0$, possiamo completare la dimostrazione come segue:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(dato che } \Delta u \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0\text{)} \\
&= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

Naturalmente questo ragionamento dipende dall'ipotesi che $\Delta u \neq 0$, che non è una delle ipotesi della regola di derivazione delle funzioni composte. Infatti, è possibile che

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

sia uguale a zero anche se $\Delta x \neq 0$. Tuttavia, l'ipotesi $\Delta x \neq 0$ è valida per molte funzioni. Benché sia possibile dimostrare la regola di derivazione delle funzioni composte senza l'ipotesi $\Delta u \neq 0$, la dimostrazione è piuttosto delicata e sarà qui omessa. ⊠

Esercizi .5

Negli esercizi 1-12 trovare $f'(x)$.

1. $f(x) = (x^3 + 2x)^{37}$.
2. $f(x) = \sin^3 x$.
3. $f(x) = \operatorname{tg}(4x^2)$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{(x^5 - x + 1)^9}$.
5. $f(x) = x^5 \sec\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
6. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sec(3x + 1)}$.
7. $f(x) = \cos(\cos x)$.
8. $f(x) = \dfrac{1 + \csc x^2}{1 - \operatorname{ctg} x^2}$.
9. $f(x) = (5x + 8)^{13}(x^3 + 7x)^{12}$.
10. $f(x) = \left(\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^{17}$.

11. $f(x) = \dfrac{(4x^2-1)^{-8}}{(2x+1)^{-3}}$.

12. $f(x) = [1 + \sin^3(x^5)]^{12}$.

Negli esercizi 13-16 trovare l'equazione della tangente al grafico nel punto indicato.

13. $y = x\cos 3x$, $x = \pi$.

14. $y = \sin(1 + x^3)$, $x = -3$.

15. $y = \sec^3\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

16. $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$, $x = 2$.

Negli esercizi 17-20 trovare dy/dx in due modi: prima utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte, poi esprimendo y in termini di x e derivando direttamente.

17. $x = 5t + 2$, $y = t^2$.

18. $x = \dfrac{1}{2}\pi - \theta$, $y = \sec\theta$.

19. $x = u^{-1}$, $y = 3\sin^3 u$.

20. $x = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$, $y = (1+\lambda)^{12}$.

Negli esercizi 21-24 trovare la derivata indicata.

21. $y = \operatorname{ctg}^3(\pi - \theta)$; trovare $\dfrac{dy}{d\theta}$.

22. $\lambda = \left(\dfrac{au+b}{cu+d}\right)^6$; trovare $\dfrac{d\lambda}{du}$ $(a, b, c, d$ costanti)

23. $\dfrac{d}{d\omega}[a\cos^2\pi\omega + b\sin^2\pi\omega]$ $(a, b$ costanti).

24. $x = \csc^2\left(\dfrac{\pi}{3} - y\right)$; trovare $\dfrac{dx}{dy}$.

25. a) Mostrare che

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

b) Usare il risultato precedente e la regola di derivazione delle funzioni composte per trovare

$$\frac{d}{dx}(|\sin x|) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\sin|x|)$$

per x contenuto nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

26. Usare l'identità

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

e la formula di derivazione di $\sin x$ per ottenere la formula di derivazione di $\cos x$.

27. Trovare una formula per

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))]$$

che non contenga alcuna variabile dipendente.

28. Trovare $f'(x^2)$ se $\dfrac{d}{dx}[f(x^2)] = x^2$.

29. Dati $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $g(0) = 0$ e $g'(0) = 3$, trovare $(f \circ g)'(0)$.

30. Dati $y = f_1(u)$, $u = f_2(v)$, $v = f_3(w)$ e $w = f_4(x)$, esprimere dy/dx in termini di dy/du, dw/dx, du/dv e dv/dw.

Risposte ad alcuni esercizi

1) $37(x^3+2x)^{36}(3x^2+2)$

3) $8x \sec^2(4x^2)$

5) $-x^3 \sec\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) + 5x^4 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$

7) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(\cos x)$

9) $12(5x+8)^{13}(x^3+7x)^{11}(3x^2+7) + 65(x^3+7x)^{12}(5x+8)^{12}$

11) $\dfrac{-64x(2x+1)^{-3}(4x^2-1)^{-9} + 6(4x^2-1)^{-8}(2x+1)^{-4}}{(2x+1)^{-6}}$

13) $y = -x$

15) $y = -1$

17) $\dfrac{2}{25}(x-2)$

19) $\dfrac{-9\operatorname{sen}^2(1/x)\cos\frac{1}{x}}{x^2}$

21) $3\operatorname{ctg}^2\theta \csc\theta^2$

23) $\pi(b-a)\operatorname{sen} 2\pi w$

25) b) per entrambe si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$f'(0)$ non esiste

29) 6.

ESERCIZI SUL DIFFERENZIALE

415 Di quanto varia il volume di un cono di raggio di base r e altezza h, al variare di quest'ultima di Δh?

[*Poiché* $V(h)=\frac{\pi}{3}r^2 h$, $V'(h)=\frac{\pi}{3}r^2$ *quindi...*] $\Delta V=V'(h)\cdot\Delta h+o(\Delta h)\simeq V'(h)\cdot\Delta h=\frac{\pi}{3}r^2\Delta h$

416 Di quanto varia il volume di un cono di altezza h e raggio di base r al variare di quest'ultimo di Δr?

[*Poiché* $V(r)=\frac{\pi}{3}hr^2$, $V'(r)=\frac{2}{3}\pi hr$ *e quindi...*] $\Delta V=V'(r)\Delta r+o(\Delta r)\simeq V'(r)\cdot\Delta r=\frac{2}{3}\pi hr\Delta r$

417 Due corpi di masse $m_1=10^{10}$ kg e $m_2=10^7$ kg si trovano a distanza $r=100$ km; di quanto varia l'attrazione newtoniana al diminuire della loro distanza di 1 km?

[$F(r)=G\frac{m_1m_2}{r^2}$, $\Delta r=-1$km, $F'(r)=-Gm_1m_2\cdot\frac{2}{r^3}$ *quindi...*]

$$\Delta F\cong F'(r)\cdot\Delta r=\frac{13{,}34\times10^{-11}\times10^{10}\times10^{7}}{10^{15}}\times10^{3}\ \text{N}=13{,}34\times10^{-5}\ \text{N}$$

418 La capacità di un condensatore piano le cui armature hanno superficie S e si trovano a distanza d è $C=\varepsilon\frac{S}{d}$. Di quanto aumenta la capacità quando le due armature si avvicinano di Δd?

$\Delta C\cong C'(d)\cdot\Delta d=-\varepsilon\frac{S}{d^2}\Delta d$

419 Un disco di massa m poggiato su un piano orizzontale è fissato a una molla di costante elastica k. Spostato il disco dalla posizione di equilibrio, lasciarlo oscillare. Di quanto varia il periodo T di oscillazione quando la massa m del disco oscillante varia di Δm?

[*Poiché* $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ *si ha:* $T'(m)=\frac{2\pi}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{m}}$, *da cui...*] $\Delta T\cong\frac{2\pi}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{m}}\Delta m$.

420 La massa m di un corpo varia con la velocità secondo la legge:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0c}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

dove m_0 è la massa a riposo, v la velocità del corpo, c la velocità della luce. Di quanto varia la massa del corpo se la velocità varia di Δv?

[$m'(v)=m_0c\frac{v}{\sqrt{(c^2-v^2)^3}}$, *da cui...*] $\Delta m\cong\frac{m_0cv}{\sqrt{(c^2-v^2)^3}}\cdot\Delta v$

421 La pressione atmosferica varia al variare della quota secondo la legge:

$$p=p_0e^{-0{,}127z}$$

dove p_0 è la pressione al livello del mare e z è la quota espressa in kilometri. Determinare di quanto varia p quando la quota z varia di Δz. $\Delta p\cong-0{,}127\,p_0e^{-0{,}127z}\cdot\Delta z$

422 Un'onda che si propaga in un mezzo non perfettamente elastico si va smorzando secondo la legge:

$$I(x)=I_0e^{-\alpha x}$$

dove $I(x)$ è l'intensità in x, I_0 è l'intensità nell'origine e α è il coefficiente di assorbimento. Se x, distanza dal centro di oscillazione, varia di Δx, di quanto varia l'intensità dell'onda?

[$I'(x)=-\alpha I_0e^{-\alpha x}$, *da cui...*] $\Delta I\cong I'(x)\Delta x=-\alpha I_0e^{-\alpha x}\cdot\Delta x$

423 L'intensità di corrente che circola in un circuito di resistenza R in cui sia inserita una pila di f.e.m. E e resistenza interna r è la seguente:

$$i=\frac{E}{R+r}$$

Posto $E=12$ V, $r=0{,}5\ \Omega$, dire di quanto varia l'intensità di corrente se la resistenza esterna R passa da $2\ \Omega$ a $2{,}5\ \Omega$. $\Delta i\cong-0{,}9$ A