5 maggio 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di martedì 5 maggio 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Confesso di sentirmi un po’ in imbarazzo per queste ultime ore virtuali di lezione. Infatti, una volta concluso lo svolgimento della teoria e pubblicati gli esercizi con i relativi svolgimenti, in un mondo pre-COVID-19 avrei chiesto quali punti vi risultassero più ostici, e avrei svolto qualcuno degli esercizi che trovate in rete (nella pagina e-learning di questo insegnamento, proprio dove trovate questo file) in modo da poter commentare dal vivo, vedendo anche le vostre reazioni, i vari passaggi.

Ma qui sto scrivendo, proprio come ho scritto gli esercizi e le relative risoluzioni: non sto parlando “dal vivo” davanti a voi che potete reagire immediatamente. Certo, potrei copiare qui qualcuno di quegli esercizi con le relative soluzioni e cavarmela in questo modo, ma, ripeto, un simile modo di fare mi metterebbe a disagio.

Allora, tanto per cominciare, cerco di raccogliere qualcuna delle osservazioni che avrei fatto “incidentalmente” durante lo svolgimento degli esercizi.

Per esempio: ho insistito (ed è in effetti importante che assorbiate questo concetto) che soltanto ***formule chiuse*** possono “tradurre” (in un opportuno linguaggio di logica dei predicati) gli enunciati del linguaggio comune. Ma le formule aperte hanno comunque una loro dignità, e possiamo ad esempio utilizzarle per formalizzare le definizioni.

Un esempio abbastanza facile: la definizione di *numero primo*. Ricorderete (guai a voi se non lo ricordate…) che un numero naturale x si dice *primo* se e soltanto se comunque si prendano due numeri naturali y, z accade che quando x divide il prodotto yz allora x divide almeno uno dei due numeri y, z. Possiamo formalizzare questa definizione in un opportuno linguaggio di logica dei predicati che ci permetta di esprimere la funzione prodotto ed il predicato “divide”. Ci servono dunque

– un simbolo di funzione p (di arietà 2, cioè che richiede due argomenti);

– un simbolo di predicato D, anch'esso di arietà 2.

Interpreteremo poi il nostro linguaggio di logica dei predicati nella struttura costituita dall’insime $\mathbb{N}$ dei numeri naturali con la funzione *prodotto* e il predicato *divide*. Sotto questa interpretazione, la formula aperta

$$\varphi(x) := (\forall y)(\forall z)\big(\mathrm{D}(x, p(y,z)) \to \big(\mathrm{D}(x,y) \vee \mathrm{D}(x,z)\big)\big)$$

risulta vera esattamente per quelle assegnazioni di valore che assegnano alla variabile individuale x un numero primo.

Analogamente possiamo formalizzare la definizione di numero irriducibile; questa volta ci serve un linguaggio più ampio del precedente, che comprenda anche un simbolo di predicato U di arietà 2 da interpretarsi nel predicato “uguale a” (vero se e soltanto se i due argomenti sono uguali) e un simbolo di costante u da interpretarsi nel numero naturale 1. Con questa impostazione, la formula aperta

$$\psi(x) := (\forall y)\big(\mathrm{D}(y,x) \to \big(\mathrm{U}(x,y) \vee \mathrm{U}(u,y)\big)\big)$$

risulta vera esattamente per quelle assegnazioni di valore che assegnano alla variabile individuale x un numero irriducibile.

Alle formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, anche se fissiamo come struttura l’insieme $\mathbb{N}$ con la funzione *prodotto*, i predicati binari *divide* e *uguale a*, la costante 1 e scegliamo l’interpretazione sopra descritta, non possiamo assegnare un valore di verità senza che in aggiunta si scelga una assegnazione di valore alla variabile individuale x; da esse però possiamo ricavare le formule chiuse $(\exists x)\varphi(x)$, $(\exists x)\psi(x)$, $(\forall x)\varphi(x)$, $(\forall x)\psi(x)$: come ben sappiamo, le prime due sono vere e le ultime due sono invece false.

È importante rendersi conto del fatto che le due formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sopra costruite ***non sono*** logicamente equivalenti. E nemmeno $\psi(x)$ è conseguenza logica di $\varphi(x)$. Ma come, qualcuno osserverà, non avevamo visto che i due concetti di *numero primo* e *numero irriducibile* sono equivalenti? Eh, no, abbiamo sì dimostrato che le due definizioni sono equivalenti ma nell’insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali! L’equivalenza dei due concetti non segue soltanto dalla loro definizione formale, segue anche (vorrei quasi dire: *soprattutto*, ma questo avverbio in questo contesto non ha molto senso e potrebbe essere fuorviante…) da tutte le proprietà che definiscono i numeri naturali (cioè gli assiomi di Peano) e dalle proprietà del prodotto e della relazione *divide*. Ed analogamente, abbiamo sì dimostrato che *in qualsiasi anello* ogni numero primo è certamente irriducibile, ma anche qui abbiamo utilizzato le proprietà del prodotto e del generico anello.

Adesso vediamo se avete capito. Scegliendo un opportuno linguaggio della logica dei predicati e un’opportuna interpretazione in un anello commutativo con unità (oppure, se l’idea di “anello commutativo con unità” vi sembra troppo astratta, in un anello $\mathbb{Z}_n$ per un valore di n a vostra scelta), provate a scrivere

– una formula aperta $\varphi(x)$ che risulti vera sse x è un divisore dello zero;

– una formula aperta $\psi(x)$ che risulti vera sse x è invertibile.

Nella prima ora di lezione virtuale di venerdì prossimo 8 maggio 2020 vi darò le risposte.

Negli esempi che abbiamo visto nelle due ore virtuali di lezione dello scorso martedì 28 maggio 2020 ho molto insistito sulla modellizzazione di sillogismi o comunque ragionamenti espressi nel “linguaggio ordinario”. È però opportuno che impariate ad usare le tecniche apprese in queste ultime lezioni anche per verificare se certe formule sono o non sono conseguenza logica di altre, se certe formule sono o non sono valide (cioè vere in qualsiasi struttura adeguata al linguaggio e in quelsiasi interpretazione). Vediamo ad esempio se è vero che

$$\{(\forall x)(\forall y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x)), (\forall x)(\forall y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{P}(y,x))\} \vDash (\forall x)(\forall y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x) \wedge \mathrm{Q}(y))$$

in un linguaggio di logica dei predicati dove Q è un simbolo di predicato unario e P è un simbolo di predicato binario.

Come ormai dovrebbe essere chiaro, si tratta di verificare se è insoddisfacibile la formula

$$(\forall x)(\forall y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{P}(y,x)) \wedge \neg(\forall x)(\forall y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x) \wedge \mathrm{Q}(y))$$

che innanzitutto trasformiamo in forma normale prenessa con la parte che segue i quantificatori in forma normale congiuntiva:

$$\begin{gathered}(\forall x)(\forall y)(\neg\mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{Q}(x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\neg\mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{P}(y,x)) \wedge \\ \wedge (\exists x)(\exists y)(\mathrm{P}(x,y) \wedge (\neg\mathrm{Q}(x) \vee \neg\mathrm{Q}(y))) \equiv\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\equiv (\forall x)(\forall y)(\neg\mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{Q}(x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\neg\mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{P}(y,x)) \wedge \\ \wedge (\exists s)(\exists t)(\mathrm{P}(s,t) \wedge (\neg\mathrm{Q}(s) \vee \neg\mathrm{Q}(t))) \equiv\end{gathered}$$

$$\equiv (\exists s)(\exists t)(\forall x)(\forall y)(\neg\mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{Q}(x)) \wedge (\neg\mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{P}(y,x)) \wedge \mathrm{P}(s,t) \wedge (\neg\mathrm{Q}(s) \vee \neg\mathrm{Q}(t)).$$

Un’altra formula in forma normale prenessa logicamente equivalente sarebbe stata la

$$(\forall x)(\forall y)(\exists s)(\exists t)(\neg\mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{Q}(x)) \wedge (\neg\mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{P}(y,x)) \wedge \mathrm{P}(s,t) \wedge (\neg\mathrm{Q}(s) \vee \neg\mathrm{Q}(t))$$

ma la precedente è preferibile in vista dei successivi passaggi; infatti, per la skolemizzazione, quando i quantificatori esistenziali precedono i quantificatori universali per sopprimerli è sufficiente introdurre un simbolo di costante per ciascuna delle variabili individuali da essi vincolata.

Introducendo i due simboli di costante c e d otteniamo così la formula in forma di Skolem

$$(\forall x)(\forall y)\big(\neg \mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{Q}(x)\big) \wedge \big(\neg \mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{P}(y,x)\big) \wedge \mathrm{P}(c,d) \wedge \big(\neg \mathrm{Q}(c) \vee \neg \mathrm{Q}(d)\big)$$

che dà luogo al seguente schema di clausole:

$$\{\{\neg \mathrm{P}(x,y), \mathrm{Q}(x)\}, \{\neg \mathrm{P}(x,y), \mathrm{P}(y,x)\}, \{\mathrm{P}(c,d)\}, \{\neg \mathrm{Q}(c), \neg \mathrm{Q}(d)\}\}.$$

L’universo di Herbrand consiste in due simboli di costante c e d, che vanno sostituiti alla x e alla y in ciascuna clausola dello schema in tutti i modi possibili; si ottiene comunque un insieme finito di clausole, precisamente

$$\begin{gathered}\{\{\neg \mathrm{P}(c,c), \mathrm{Q}(c)\}, \quad \{\neg \mathrm{P}(c,d), \mathrm{Q}(c)\}, \quad \{\neg \mathrm{P}(d,c), \mathrm{Q}(d)\}, \quad \{\neg \mathrm{P}(d,d), \mathrm{Q}(d)\}, \\ \{\neg \mathrm{P}(c,c), \mathrm{P}(c,c)\}, \quad \{\neg \mathrm{P}(c,d), \mathrm{P}(d,c)\}, \quad \{\neg \mathrm{P}(d,c), \mathrm{P}(c,d)\}, \quad \{\neg \mathrm{P}(d,d), \mathrm{P}(d,d)\}, \\ \{\mathrm{P}(c,d)\}, \quad \{\neg \mathrm{Q}(c), \neg \mathrm{Q}(d)\}\}.\end{gathered}$$

Possiamo applicare l’algoritmo di Davis e Putnam!

Le clausole $\{\neg \mathrm{P}(c,c), \mathrm{P}(c,c)\}$ e $\{\neg \mathrm{P}(d,d), \mathrm{P}(d,d)\}$ devono essere soppresse perché sono tautologie; la clausola $\{\neg \mathrm{P}(d,c), \mathrm{P}(c,d)\}$ può essere soppressa perché contiene la clausola $\{\mathrm{P}(c,d)\}$. Pertanto consideriamo l’insieme di clausole

$$\begin{gathered}\{\{\neg \mathrm{P}(c,c), \mathrm{Q}(c)\}, \quad \{\neg \mathrm{P}(c,d), \mathrm{Q}(c)\}, \quad \{\neg \mathrm{P}(d,c), \mathrm{Q}(d)\}, \quad \{\neg \mathrm{P}(d,d), \mathrm{Q}(d)\}, \\ \{\neg \mathrm{P}(c,d), \mathrm{P}(d,c)\}, \quad \{\mathrm{P}(c,d)\}, \quad \{\neg \mathrm{Q}(c), \neg \mathrm{Q}(d)\}\}.\end{gathered}$$

Pivot $\mathrm{P}(c,d)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{P}(c,d)$ né $\neg \mathrm{P}(c,d)$: $\{\neg \mathrm{P}(c,c), \mathrm{Q}(c)\}$, $\{\neg \mathrm{P}(d,c), \mathrm{Q}(d)\}$, $\{\neg \mathrm{P}(d,d), \mathrm{Q}(d)\}$, $\{\neg \mathrm{Q}(c), \neg \mathrm{Q}(d)\}$;

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{P}(c,d)}(\{\neg \mathrm{P}(c,d), \mathrm{Q}(c)\}, \{\mathrm{P}(c,d)\}) = \{\mathrm{Q}(c)\}$;
$\mathrm{Ris}_{\mathrm{P}(c,d)}(\{\neg \mathrm{P}(c,d), \mathrm{P}(d,c)\}, \{\mathrm{P}(c,d)\}) = \{\mathrm{P}(d,c)\}$;

$$\{\{\neg \mathrm{P}(c,c), \mathrm{Q}(c)\}, \{\neg \mathrm{P}(d,c), \mathrm{Q}(d)\}, \{\neg \mathrm{P}(d,d), \mathrm{Q}(d)\}, \{\neg \mathrm{Q}(c), \neg \mathrm{Q}(d)\}, \{\mathrm{Q}(c)\}, \{\mathrm{P}(d,c)\}\}.$$

La clausola $\{\neg \mathrm{P}(c,c), \mathrm{Q}(c)\}$ può essere soppressa perché contiene la clausola $\{\mathrm{Q}(c)\}$, quindi consideriamo l’insieme di clausole

$$\{\{\neg \mathrm{P}(d,c), \mathrm{Q}(d)\}, \{\neg \mathrm{P}(d,d), \mathrm{Q}(d)\}, \{\neg \mathrm{Q}(c), \neg \mathrm{Q}(d)\}, \{\mathrm{Q}(c)\}, \{\mathrm{P}(d,c)\}\}.$$

Pivot $\mathrm{P}(d,c)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{P}(d,c)$ né $\neg \mathrm{P}(d,c)$: $\{\neg \mathrm{P}(d,d), \mathrm{Q}(d)\}$, $\{\neg \mathrm{Q}(c), \neg \mathrm{Q}(d)\}$, $\{\mathrm{Q}(c)\}$;

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{P}(d,c)}(\{\neg \mathrm{P}(d,c), \mathrm{Q}(d)\}, \{\mathrm{P}(d,c)\}) = \{\mathrm{Q}(d)\}$;

$$\{\{\neg \mathrm{P}(d,d), \mathrm{Q}(d)\}, \{\neg \mathrm{Q}(c), \neg \mathrm{Q}(d)\}, \{\mathrm{Q}(c)\}, \{\mathrm{Q}(d)\}\}.$$

La clausola $\{\neg\mathrm{P}(d,d), \mathrm{Q}(d)\}$ può essere soppressa perché contiene la clausola $\{\mathrm{Q}(d)\}$, quindi consideriamo l’insieme di clausole

$$\{\{\neg\mathrm{Q}(c), \neg\mathrm{Q}(d)\}, \{\mathrm{Q}(c)\}, \{\mathrm{Q}(d)\}\}.$$

Pivot $\mathrm{Q}(c)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{Q}(c)$ né $\neg\mathrm{Q}(c)$: $\{\mathrm{Q}(d)\}$;

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{Q}(c)}(\{\neg\mathrm{Q}(c), \neg\mathrm{Q}(d)\}, \{\mathrm{Q}(c)\}) = \{\neg\mathrm{Q}(d)\}$;

$$\{\{\mathrm{Q}(d)\}, \{\neg\mathrm{Q}(d)\}\}.$$

Pivot $\mathrm{Q}(d)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{Q}(d)$ né $\neg\mathrm{Q}(d)$: non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{Q}(d)}(\{\mathrm{Q}(d)\}, \{\neg\mathrm{Q}(d)\}) = []$;

$$\{[]\}$$

Poiché abbiamo ottenuto la clausola vuota, l’insieme di clausole considerato non è soddisfacibile; dunque la formula $(\forall x)(\forall y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x) \wedge \mathrm{Q}(y))$ è effettivamente conseguenza logica delle formule $(\forall x)(\forall y)\big(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x)\big)$ e $(\forall x)(\forall y)\big(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{P}(y,x)\big)$.

Ora che abbiamo dimostrato questa conseguenza logica, sappiamo che in qualsiasi struttura dotata di due predicati (uno di arietà 2 e uno di arietà 1) se ogni volta che il primo predicato è vero per due elementi x, y della struttura il secondo è vero per x (interpretazione della formula $(\forall x)(\forall y)\big(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x)\big)$), e se inoltre la verità del primo predicato non dipende dall’ordine degli elementi considerati (interpretazione della formula $(\forall x)(\forall y)\big(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{P}(y,x)\big)$) allora necessariamente quando il primo predicato è vero per due elementi x, y della struttura il secondo è vero non solo per x ma anche per y (interpretazione della formula $(\forall x)(\forall y)(\mathrm{P}(x,y) \to \mathrm{Q}(x) \wedge \mathrm{Q}(y))$).

Come è ragionevole che sia… Però adesso non abbiamo soltanto una generica, e se volete anche vaga, “ragionevolezza” della cosa, ma abbiamo una vera dimostrazione della conseguenza logica.

Accadono però anche cose sorprendenti. È ad esempio immediato verificare che la formula

$$(\exists x)\mathrm{P}(x)$$

è conseguenza logica della formula

$$(\forall x)\mathrm{P}(x)\,.$$

Infatti ciò significa che è insoddisfacibile la formula $(\forall x)\mathrm{P}(x) \wedge \neg(\exists x)\mathrm{P}(x)$; ma

$$(\forall x)\mathrm{P}(x) \wedge \neg(\exists x)\mathrm{P}(x) \equiv (\forall x)\mathrm{P}(x) \wedge (\forall x)\neg\mathrm{P}(x) \equiv (\forall x)\big(\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(x)\big)$$

che è chiaramente insoddisfacibile.

Ma ciò è ***ragionevole***? In effetti ciò comporta che in ogni struttura adeguata al nostro linguaggio (cioè dotata di un predicato unario) nella quale è vera la $(\forall x)\mathrm{P}(x)$ deve essere vera la $(\exists x)\mathrm{P}(x)$; ma nell'insieme degli elefanti rosa (che è vuoto! Non esistono elefanti rosa ([1])!) è certamente vero il predicato "x è un elefante che vola" per ogni elemento (abbiamo più volte insistito su questo punto: per gli elementi dell'insieme vuoto potete affermare qualunque cosa, visto che nessuno riuscirà mai a trovare un controesempio). E dunque, se interpretiamo il simbolo di predicato $\mathrm{P}(x)$ come "x vola" nell'insieme degli elefanti rosa, poiché è vero che $(\forall x)\mathrm{P}(x)$ deve essere vero anche che $(\exists x)\mathrm{P}(x)$, cioè che ***esiste un elefante rosa che vola***!

Come avrete capito, ancora una volta sto bluffando (e naturalmente bluffare per iscritto è meno facile che nel corso di una chiacchierata). Ma dov'è l'inghippo questa volta?

Dobbiamo tornare alla insoddifacibilità della formula $(\forall x)\big(\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(x)\big)$, sulla quale insoddisfacibilità come avete visto ho glissato. Come facciamo a dimostrare che questa formula è insoddisfacibile? Usiamo, naturalmente, il teorema di Herbrand. La formula è in forma normale prenessa, già skolemizzata. Lo schema di clausole associato è

$$\{\{\mathrm{P}(x)\}, \{\neg\mathrm{P}(x)\}\}$$

e quindi… Già, a questo punto che cosa succede? Siccome non ci sono termini nel nostro linguaggio, ***introduciamo un simbolo di costante*** c. Ma questo significa che la struttura in cui interpretiamo la formula non è vuota! (Già, per definizione una struttura adeguata a un linguaggio non può essere vuota! Andate a riguardare gli appunti che trovate in rete, sez. 3.1). Naturalmente, se l'insieme in cui interpretiamo la formula $(\forall x)\mathrm{P}(x)$ non è vuoto diventa del tutto ragionevole che ne segua come conseguenza logica la formula $(\exists x)\mathrm{P}(x)$. Non possiamo lavorare nell'insieme (vuoto) degli elefanti rosa, che dobbiamo lasciare a Dumbo…

[1] benché anche su questo vi siano opinioni discordi…