5 maggio 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di martedì 5 maggio 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Come ho già dichiarato, gli esercizi di logica dei predicati che mi sembrano più interessanti sono quelli che chiedono di stabilire la correttezza di un ragionamento espresso nel linguaggio di tutti i giorni (che non possa essere formalizzato nel linguaggio della logica proposizionale, altrimenti scegliere un linguaggio di logica dei predicati è come usare un cannone per ammazzare una zanzara. . .).

In questa seconda ora facciamo un altro paio di esempi in questo senso.

Vogliamo stabilire se dalle premesse

(i) Chi mangia la frutta è sano;
(ii) chi fuma tabacco non è sano;
(iii) Nicola mangia la frutta;

si può dedurre logicamente che

(iv) Nicola non fuma tabacco.

Consideriamo un linguaggio di logica dei predicati con tre simboli di predicato unario (F, S, T) e un simbolo di costante (n), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

$\mathrm{F}(x) := x$ mangia la frutta;
$\mathrm{S}(x) := x$ è sano;
$\mathrm{T}(x) := x$ fuma tabacco;
$n :=$ Nicola.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)(\mathrm{F}(x) \to \mathrm{S}(x))$;
(ii) $(\forall x)(\mathrm{T}(x) \to \neg\mathrm{S}(x))$;
(iii) $\mathrm{F}(n)$;

e la conclusione diventa

(iv) $\neg\mathrm{T}(n)$.

Dobbiamo pertanto vedere se

$$(\forall x)(\mathrm{F}(x) \to \mathrm{S}(x)) \wedge (\forall x)(\mathrm{T}(x) \to \neg\mathrm{S}(x)) \wedge \mathrm{F}(n) \vDash \neg\mathrm{T}(n)$$

e questo è vero se e soltanto se la formula φ definita da

$$\varphi := (\forall x)(\mathrm{F}(x) \to \mathrm{S}(x)) \wedge (\forall x)(\mathrm{T}(x) \to \neg\mathrm{S}(x)) \wedge \mathrm{F}(n) \wedge \neg(\neg\mathrm{T}(n))$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa in modo che la parte della formula che segue i quantificatori sia in forma normale congiuntiva:

$$\varphi \equiv (\forall x)((\neg\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{S}(x)) \wedge (\neg\mathrm{T}(x) \vee \neg\mathrm{S}(x)) \wedge \mathrm{F}(n) \wedge \mathrm{T}(n)) .$$

In questa forma, φ è già skolemizzata e possiamo considerare lo schema di clausole ad essa associato

$$\{\{\neg\mathrm{F}(x), \mathrm{S}(x)\}, \{\neg\mathrm{T}(x), \neg\mathrm{S}(x)\}, \{\mathrm{F}(n)\}, \{\mathrm{T}(n)\}\} .$$

Poiché l’universo di Herbrandt consiste del solo simbolo di costante n, assegniamo direttamente alla x il valore n e otteniamo

$$\{\{\neg\mathrm{F}(n), \mathrm{S}(n)\}, \{\neg\mathrm{T}(n), \neg\mathrm{S}(n)\}, \{\mathrm{F}(n)\}, \{\mathrm{T}(n)\}\} .$$

Possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot $\mathrm{F}(n)$:

clausole non contenenti né $\mathrm{F}(n)$ né $\neg\mathrm{F}(n)$: $\{\neg\mathrm{T}(n), \neg\mathrm{S}(n)\}, \{\mathrm{T}(n)\}$;

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{F}(n)}(\{\neg\mathrm{F}(n), \mathrm{S}(n)\}, \{\mathrm{F}(n)\}) = \{\mathrm{S}(n)\}$;

$$\{\{\neg\mathrm{T}(n), \neg\mathrm{S}(n)\}, \{\mathrm{T}(n)\}, \{\mathrm{S}(n)\}\} .$$

Pivot T(n):

clausole non contenenti né T(n) né ¬T(n): {S(n)} ;

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{T}(n)}(\{\neg\mathrm{T}(n), \neg\mathrm{S}(n)\}, \{\mathrm{T}(n)\}) = \{\neg\mathrm{S}(n)\}$;

$$\{\{\mathrm{S}(n)\}, \{\neg\mathrm{S}(n)\}\}\,.$$

Pivot S(n):

clausole non contenenti né S(n) né ¬S(n): non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{S}(n)}(\{\mathrm{S}(n)\}, \{\neg\mathrm{S}(n)\}) = []$;

$$\{[]\}$$

Poiché abbiamo ottenuto la clausola vuota, l’insieme di clausole considerato non è soddisfacibile; dunque la (iv) è conseguenza logica delle premesse.

Adesso vogliamo stabilire se dalle premesse

(i) Per ogni sfortunato c’è un cane che lo morde
(ii) Andrea è sfortunato
(iii) Bobi è un cane sfortunato

si può dedurre logicamente che

(iv) Bobi morde Andrea

Scegliamo un linguaggio di logica dei predicati con due simboli di predicato unario (S, C) e un simbolo di predicato binario (M), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

S(x) := x è sfortunato;
C(x) := x è un cane;
M(x, y) := x morde y.

Ci servono anche due simboli di costante a e b, che interpretiamo rispettivamente come Andrea e Bobi..

In questo linguaggio, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)(\mathrm{S}(x) \to (\exists y)(\mathrm{C}(y) \wedge \mathrm{M}(y, x))$;
(ii) $\mathrm{S}(a)$;
(iii) $\mathrm{C}(b) \wedge \mathrm{S}(b)$;

e la conclusione diventa

(iv) $\mathrm{M}(b, a)$.

Dobbiamo pertanto vedere se

$$\big((\forall x)(\mathrm{S}(x) \to (\exists y)(\mathrm{C}(y) \wedge \mathrm{M}(y,x))\big) \wedge \mathrm{S}(a) \wedge \mathrm{C}(b) \wedge \mathrm{S}(b) \vDash \mathrm{M}(b,a)$$

e questo è vero se e soltanto se la formula φ definita da

$$\big((\forall x)(\mathrm{S}(x) \to (\exists y)(\mathrm{C}(y) \wedge \mathrm{M}(y,x))\big) \wedge \mathrm{S}(a) \wedge \mathrm{C}(b) \wedge \mathrm{S}(b) \wedge \neg\mathrm{M}(b,a)$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa in modo che la parte della formula che segue i quantificatori sia in forma normale congiuntiva:

$$\varphi \equiv (\forall x)\big(\neg\mathrm{S}(x) \vee (\exists y)\big(\mathrm{C}(y) \wedge \mathrm{M}(y,x)\big)\big) \wedge \mathrm{S}(a) \wedge \mathrm{C}(b) \wedge \mathrm{S}(b) \wedge \neg\mathrm{M}(b,a) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)(\exists y)\big(\big(\neg\mathrm{S}(x) \vee \mathrm{C}(y)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{S}(x) \vee \mathrm{M}(y,x)\big) \wedge \mathrm{S}(a) \wedge \mathrm{C}(b) \wedge \mathrm{S}(b) \wedge \neg\mathrm{M}(b,a)\big)$$

La forma di Skolem di questa formula si ottiene sopprimendo il quantificatore esistenziale e sostituendo la variabile individuale y da esso vincolata con l’espressione $f(x)$, dove f è un simbolo di funzione che introduciamo appositamente :

$$(\forall x)\big(\big(\neg\mathrm{S}(x) \vee \mathrm{C}(f(x))\big) \wedge \big(\neg\mathrm{S}(x) \vee \mathrm{M}(f(x),x)\big) \wedge \mathrm{S}(a) \wedge \mathrm{C}(b) \wedge \mathrm{S}(b) \wedge \neg\mathrm{M}(b,a)\big)$$

A questa formula resta associato il seguente schema di clausole:

$$\{\{\neg\mathrm{S}(x), \mathrm{C}(f(x))\}, \{\neg\mathrm{S}(x), \mathrm{M}(f(x),x)\}, \{\mathrm{S}(a)\}, \{\mathrm{C}(b)\}, \{\mathrm{S}(b)\}, \{\neg\mathrm{M}(b,a)\}\} .$$

L’universo di Herbrand è infinito, perché oltre ai due simboli di costante a e b contiene tutti i termini che si possono ottenere da esse con f, quindi ad esempio $f(a)$, $f(b)$, $f(f(a))$, $f(f(b))$. Non possiamo dunque applicare l’algoritmo di Davis e Putnam, ma nemmeno è possibile una confutazione rapida perché in effetti la φ è soddisfacibile!

Scegliamo come struttura l’insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, e interpretiamo i simboli di predicato, il simbolo di funzione f e i simboli di costante come segue:

$\mathrm{S}(x) \coloneqq x$ è pari;
$\mathrm{C}(x) \coloneqq x$ è multiplo di 4;
$\mathrm{M}(x,y) \coloneqq x > y$;
$f(x) \coloneqq 2 \cdot x$;
$a \coloneqq 18$;
$b \coloneqq 12$.

È immediato verificare che questa interpretazione soddisfa la φ. Dunque, la (iv) non è conseguenza logica delle (i), (ii) e (iii) .

Vi lascio infine un esercizio da svolgere per venerdì prossimo. Nella prima ora (virtuale) di venerdì prossimo 8 maggio 2020 lo discuteremo, dopo aver visto la soluzione dell’esercizio che vi ho proposto nella prima ora (virtuale) di oggi.

Si stabilisca se dalle premesse

(i) Ogni cane è un mammifero;
(ii) il padre di ogni cane è un cane;
(iii) Alf non è un mammifero;

si può dedurre logicamente che

(iv) Alf non è il padre di alcun cane.