Famiglia di rette normali all'ellisse, l'evoluta

GAC 2019/20

Consideriamo l'ellisse

$$f(x,y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$$

parametrizzata da

$$\begin{cases} x = a\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Siccome il gradiente ∇f è ortogonale alle linee di livello di f, l'equazione della retta tangente nel punto (x_0, y_0) dell'ellisse è

$$(x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) = 0$$

mentre l'equazione della retta normale è

$$(x - x_0)f_y(x_0, y_0) - (y - y_0)f_x(x_0, y_0) = 0$$

che svolgendo i calcoli diventa

$$(x - x_0)\frac{y_0}{b^2} - (y - y_0)\frac{x_0}{a^2} = 0$$

e sostituendo la parametrizzazione

$$2xat(1 + t^2) - yb(1 - t^4) + 2t(1 - t^2)(b^2 - a^2) = 0$$

Sostituendo $a = 2$, $b = 1$ si ottiene

$$F(x, y, t) = 4xt(1 + t^2) - y(1 - t^4) - 6t(1 - t^2)$$

che è la famiglia cercata di rette normali all'ellisse.

I comandi m2 che forniscono l'evoluta all'ellisse $x^2/4 + y^2 - 1 = 0$ sono quindi

```
R=QQ[t,x,y,MonomialOrder=>Lex]
f=-4*x*t*(1+t^2)+y*(1-t^4)+6*t*(1-t^2)
gens gb ideal(f,diff(t,f))
--equazione dell'evoluta
toString (gens gb ideal(f,diff(t,f)))_(0,0)
```

L'equazione dell'evoluta (astroide, o sestica di Lamé) risulta

$$64x^6 + 48x^4y^2 - 432x^4 + 12x^2y^4 + 756x^2y^2 + 972x^2 + y^6 - 27y^4 + 243y^2 - 729 = 0$$

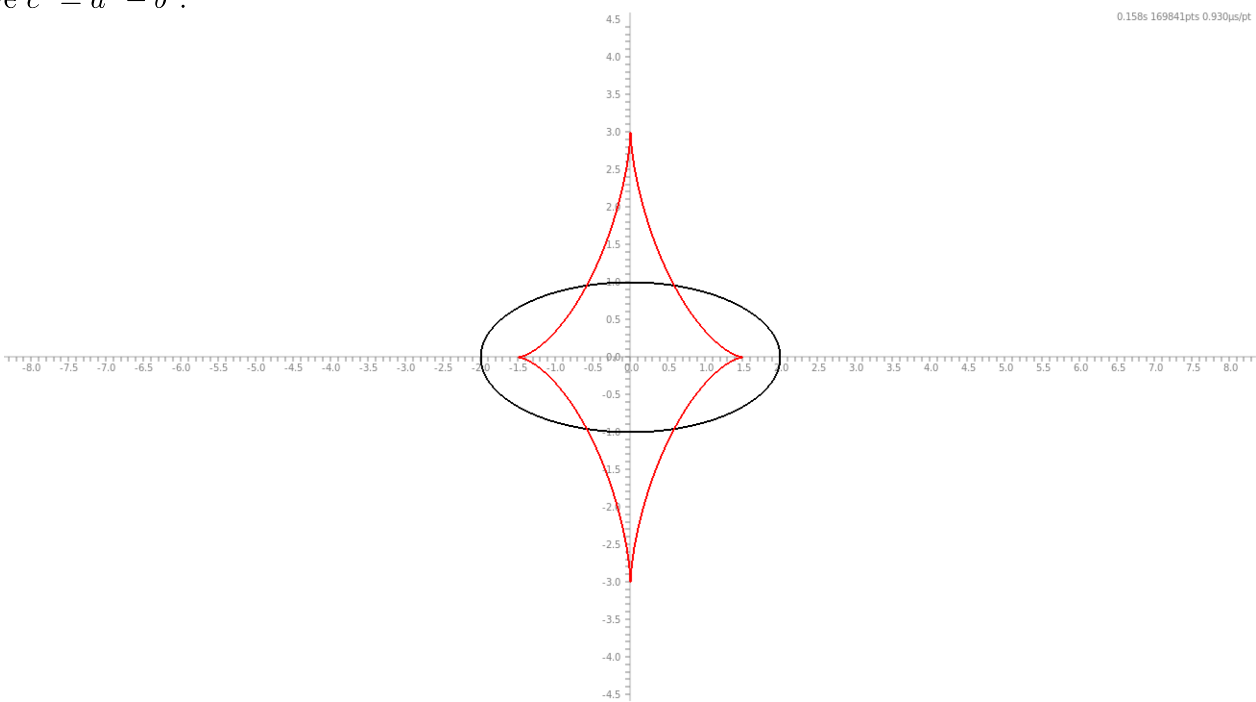
che si semplifica a

$$(4x^2 + y^2 - 9)^3 + 972x^2y^2 = 0$$

L'equazione della evoluta di $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ è

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0$$

dove $c^2 = a^2 - b^2$.



Per l'animazione, si veda

`https://en.wikipedia.org/wiki/Evolute`

Per maggiori informazioni sugli inviluppu e per l'equazione dell'evoluta per curve piane espresse con l' equazione cartesiana, si veda §2.1 §2.2 della tesi di Martina Bassi

`http://web.math.unifi.it/users/ottaviani/tesi/tesi_bassi.pdf`