Un gruppo di Lie è una varietà liscia G dotata di una operazione di composizione $\circ$ tale che la mappa

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \circ h \end{aligned}$$

è C^∞ e

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

è C^∞.

Esempi: $(\mathbb{R}^n, +)$, $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$,
↑ un aperto in $\mathbb{R}^{n^2}$

$\mathbb{C}^*$, $S^1 < \mathbb{C}^*$.

$\shortparallel$

$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

Teorema Siano G_1 e G_2 gruppi di Lie, allora $G_1 \times G_2$ è un gruppo di Lie.

Esempio: $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ toro n-dimensionale gruppo di Lie abeliano.

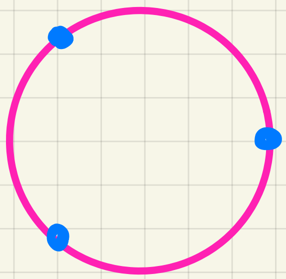
Sia $H \leq G$ un sottogruppo di G in senso algebrico.

Teorema: Sia $H \leq G$ un sottogruppo in senso algebrico e una sottovarietà regolare. Allora H con la struttura C^∞ indotta è un gruppo di Lie.

H si dice un sottogruppo di Lie di G.

Teorema Sia $H \subseteq G$ un sottogruppo di G in senso algebrico. H è un sottogruppo di Lie se e solo se è un sottoinsieme chiuso di G.

Esempio: $\left\{ e^{\frac{2\pi i}{3} n \theta} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq S^1$



sottogruppo finito, quindi chiuso. Sottogruppo di Lie di S^1 0-dim, topologia discreta.

Esempio:

$$\{ e^{2\pi i \sqrt{2} n} \mid n \in \mathbb{Z} \} \subseteq S^1$$

denso in S^1

non chiuso. È un gruppo di Lie 0-dim con la topologia discreta.

Ma non è un sottogruppo di Lie di S^1.

Esempi di sottogruppi chiusi di $GL(n,\mathbb{R})$:

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$$

$$O(n) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^T = I \}$$

$$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$$

Esempi di sottogruppi chiusi

di $GL(n,\mathbb{C}) \left(\subseteq GL(2n,\mathbb{R})\right)$:

$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AA^* = I\}$ $\quad A^* = \bar{A}^T$

$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$

<u>NOTA</u> Sia M una varietà, e sia $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ lo spazio dei campi vettoriali su M.

Abbiamo visto che è uno spazio vettoriale e addirittura un modulo su $C^\infty(M)$.

definiamo

$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

dove

$$[X,Y](f) \overset{def}{=} X(Yf) - Y(Xf)$$

$[\,,\,]$ è
- bilineare
- anticommutativo

e vale l'identità di Jacobi:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[Y,X]] = 0$$

$(\mathfrak{X}(M), [\,,\,])$ è un'algebra di Lie.

Consideriamo un gruppo di Lie.

Sia $g \in G$, definiamo

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto gh \end{aligned}$$

traslazione sinistra

$$\begin{aligned} R_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto hg \end{aligned}$$

traslazione destra.

Un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(G)$ si dice <u>invariante a sinistra</u> se $\forall\, g \in G$ si ha

$$(L_g)_{*}\big|_h (X_h) = X_{gh}$$

L'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra è chiuso rispetto a $[\,,\,]$.

Definiamo <u>algebra di Lie</u> di G $\mathrm{Lie}(G)$ lo spazio dei campi vettoriali invarianti a sinistra, dotato del $[\,,\,]$.

Possiamo identificare l'algebra di Lie di un gruppo G con lo spazio tangente nell'identità:

$$\boxed{\mathrm{Lie}(G) = T_e G}$$

infatti

$X_e \in T_e G$ determina $X \in \mathrm{Lie}(G)$ definito da

$$X_g = (L_g)_* X_e$$

e viceversa. Questo definisce un isomorfismo $T_e G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(G)$

NOTA

$$\boxed{\dim \mathrm{Lie}(G) = \dim G}$$

NOTA se H è un sottogruppo di Lie di G

$$H \overset{i}{\hookrightarrow} G$$

allora $\mathrm{Lie}(H) \overset{i_*}{\hookrightarrow} \mathrm{Lie}(G)$ sottalgebra.

Mappa esponenziale: $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$

Dati G e $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ è definita la mappa esponenziale: se $\varphi_{X_e}(t)$ è il flusso del campo vettoriale invariante a sinistra definito da X_e, allora $\exp(X_e) = \varphi_{X_e}(1)$.

Abbiamo dunque

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$
$$X_e \longmapsto \exp(X_e)$$

- exp è un diffeomorfismo locale, non necessariamente suriettivo, anche se G è connesso.

- $\exp : \mathfrak{g} \to G$ è suriettiva se G è compatto e connesso.

<u>NOTA</u> ogni gruppo di Lie <u>compatto</u> è isomorfo a un <u>sottogruppo chiuso di $GL(n, \mathbb{R})$</u> per qualche n.

Nel caso di sottogruppi G di $GL(n,\mathbb{R})$ l'algebra di Lie

$$\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

perché $GL(n,\mathbb{R})$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$

In questo caso

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

$$X \longmapsto e^X = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} X^n$$

Ricordiamo che

- $e^{A+B} = e^A e^B$
- $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$
- e^{tX} curva in G e $\frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right)\Big|_0 = X$

esempio:

compatto connesso

$$SO(n) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^T = I \text{ e } \det A = 1 \}$$

$$so(n) = \{ X \in gl(n,\mathbb{R}) \mid X + X^T = 0 \}$$

$$\exp : so(n) \longrightarrow SO(n) \quad \text{suriettiva}$$
$$X \longmapsto e^X$$

verifica $(e^X)(e^X)^T = e^{(X+X^T)} = e^0 = Id$

dim $SO(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

NOTA c'è una corrispondenza biunivoca tra algebre di Lie dim finita e gruppi di Lie semplicemente connessi.

Ossia dato g di dim finita il gruppo è determinato a meno di rivestimenti.

Mappa di coniugio

Sia $g \in G$

$$c(g) : G \longrightarrow G$$
$$h \longmapsto ghg^{-1}$$

Rappresentazione aggiunta

isomorfismi da $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}$

$$Ad : G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$$
$$g \longmapsto c(g)_*\big|_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

T_eG

Ad è un omomorfismo da G in $Aut(\mathfrak{g})$

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathfrak{g})$$
$$X \longmapsto Ad(X)_*$$

appl. lineari da $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}$.

$$\boxed{ad(X)Y = [X, Y]}$$

Azione di un gruppo G su una varietà M.

Sia G un gruppo di Lie e sia M una varietà.

Si dice che G agisce su M a sinistra se è definita una mappa C^∞

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto gp \end{aligned}$$

tale che

- $e \cdot p = p$
- $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$

esempio S^1 agisce su S^2

analogamente azione a destra.

Sia $f: M \longrightarrow N$ con G che agisce su M e N.
f si dice **equivariante** se
$$f(g \cdot p) = g \cdot f(p) \quad \forall p \in M \ \forall g \in G$$

Punto fisso: un punto $p \in M$ si dice fisso per l'azione di G se $g \cdot p = p \quad \forall g \in G$

esempio: polo N e polo S

gruppo di isotropia in p: $G_p = \{ g \in G \mid gp = p \}$

per N e S è S^1, per gli altri punti è $\{1\}$.

orbite per p: $G \cdot p = \{ gp \in M \mid g \in G \}$

i paralleli (le orbite sono disgiunte) compresi N e S

azione destra: **induce azione sinistra**

$$\underbrace{g \cdot p}_{\text{nuova azione sinistra}} = \underbrace{p \cdot g^{-1}}_{\text{azione destra assegnata}}$$

azione libera: un'azione di G su M è libera se ogni $p \in M$ ha isotropia banale

S^1 agisce liberamente su $S^2 \setminus \{N, S\}$

azione transitiva: un'azione di G su M si dice transitiva se $\forall$ $p, q \in M$ $\exists$ $g \in G$ t.c. $g \cdot p = q$.

l'azione di S^1 su S^2 non è transitiva.

Teorema Sia $H \leq G$ un sottogruppo di Lie di G (chiuso). Allora il quoziente $\frac{G}{H}$ (insieme delle classi laterali sinistre) è una varietà liscia di dimensione $\dim G - \dim H$.

Teorema Se G agisce su M transitivamente e G_p è chiuso allora $\frac{G}{G_p}$ è diffeomorfo a M.