Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi) -parte 1-

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Firenze, 14/04/2020

Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi)

- Consideriamo un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$. Una partizione per R è una coppia $P = (P_1, P_2)$ di partizioni: P_1 per l'intervallo $[a,b]$ e P_2 per l'intervallo $[c,d]$.

$\boxed{\text{Nello specifico } P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_1}\} \text{ e } P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{n_2}\} \text{ e sono tali che:}}$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_1} = b \quad \text{e} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_2} = d$$

Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi)

- Consideriamo un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$. Una partizione per R è una coppia $P = (P_1, P_2)$ di partizioni: P_1 per l'intervallo $[a,b]$ e P_2 per l'intervallo $[c,d]$.

Nello specifico $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{m_1}\}$ e $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{m_2}\}$ e sono tali che:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m_1} = b \quad \text{e} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m_2} = d$$

e il rettangolo R viene diviso in $m_1 \times m_2$ sottorettangoli: $\boxed{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad i = 1, \dots, m_1 \; ; \; j = 1, \dots, m_2}$

inoltre $\boxed{\text{area}(R_{ij}) = (\Delta x)_i (\Delta y)_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})}$

Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi)

- Consideriamo un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$. Una partizione per R è una coppia $P = (P_1, P_2)$ di partizioni: P_1 per l'intervallo $[a,b]$ e P_2 per l'intervallo $[c,d]$.

  Nello specifico $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{m_1}\}$ e $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{m_2}\}$ e sono tali che:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m_1} = b \qquad e \qquad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m_2} = d$$

  e il rettangolo R viene diviso in $m_1 \times m_2$ sottorettangoli: $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

  inoltre $\text{area}(R_{ij}) = (\Delta x)_i (\Delta y)_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ $\qquad i = 1, \dots, m_1 \;;\; j = 1, \dots, m_2$

- In ogni sottorettangolo R_{ij} scegliamo un punto (ξ_{ij}, η_{ij}). L'insieme S dei punti (ξ_{ij}, η_{ij}) si chiama "scelta di punti" nella partizione P.
- La coppia $\alpha = (P, S)$, costituita dalla partizione P e dalla scelta S si chiama partizione puntata di R.

Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi)

- Consideriamo un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$. Una partizione per R è una coppia $P=(P_1,P_2)$ di partizioni: P_1 per l'intervallo $[a,b]$ e P_2 per l'intervallo $[c,d]$.

  Nello specifico $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{m_1}\}$ e $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{m_2}\}$ e sono tali che:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m_1} = b \quad \text{e} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m_2} = d$$

  e il rettangolo R viene diviso in $m_1 \times m_2$ sottorettangoli: $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

  inoltre $\text{area}(R_{ij}) = (\Delta x)_i (\Delta y)_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ $\quad i = 1, \dots, m_1 \; ; \; j = 1, \dots, m_2$

- In ogni sottorettangolo R_{ij} scegliamo un punto (ξ_{ij}, η_{ij}). L'insieme S dei punti (ξ_{ij}, η_{ij}) si chiama "scelta di punti" nella partizione P.

- La coppia $\alpha = (P, S)$, costituita dalla partizione P e dalla scelta S si chiama partizione puntata di R.

  Indichiamo con $|\alpha|$ il parametro di finezza di $\alpha = (P,S)$ e

  $|\alpha|$ = massima ampiezza dei lati di tutti i possibili sottorettangoli individuati dalla partizione P.

- Consideriamo una funzione $f: R = [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$. Ad ogni partizione puntata α relativa a $R = [a,b] \times [c,d]$ possiamo associare il numero:

$$\boxed{\Sigma(\alpha) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n_1 \\ j=1,\dots,n_2}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \underbrace{(\Delta x)_i (\Delta y)_j}_{\text{area}(R_{ij})}} \qquad (I)$$

- Consideriamo una funzione $f : R = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$. Ad ogni partizione puntata α relativa a $R = [a,b] \times [c,d]$ possiamo associare il numero:

$$\Sigma(\alpha) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n_1 \\ j=1,\dots,n_2}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \underbrace{(\Delta x)_i (\Delta y)_j}_{\text{area}(R_{ij})} \qquad (\mathrm{I})$$

- Se indichiamo con Γ l'insieme delle partizioni puntate $\alpha = (P, S)$ per R allora

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma : \ & \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \alpha \longmapsto \Sigma(\alpha) \end{aligned}}$$

abbiamo così definita una mappa da Γ in $\mathbb{R}$.

- Consideriamo una funzione $f: R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Ad ogni partizione puntata α relativa a $R = [a,b] \times [c,d]$ possiamo associare il numero:

$$\Sigma(\alpha) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n_1 \\ j=1,\dots,n_2}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \underbrace{(\Delta x)_i (\Delta y)_j}_{\text{area}(R_{ij})} \qquad (I)$$

- Se indichiamo con Γ l'insieme delle partizioni puntate $\alpha = (P, S)$ per R allora $\Sigma : \Gamma \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \Sigma(\alpha)$ abbiamo così definita una mappa da Γ in $\mathbb{R}$.

- Se la funzione f è positiva (o non negativa, cioè $f(x,y) \geq 0$) allora, ogni termine $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(\Delta x)_i (\Delta y)_j$ della sommatoria (I) rappresenta il volume di un parallelepipedo di altezza $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ e base $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

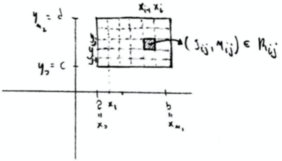
- Consideriamo una funzione $f : R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Ad ogni partizione puntata α relativa a $R = [a,b] \times [c,d]$ possiamo associare il numero:

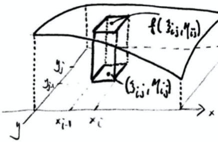
$$\Sigma(\alpha) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m_1 \\ j=1,\dots,m_2}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \underbrace{(\Delta x)_i (\Delta y)_j}_{\text{area}(R_{ij})} \qquad (I)$$

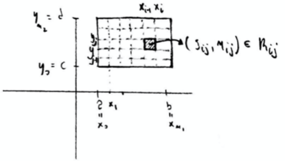
- Se indichiamo con Γ l'insieme delle partizioni puntate $\alpha = (P, S)$ per R allora $\Sigma : \Gamma \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \Sigma(\alpha)$ abbiamo così definita una mappa da Γ in $\mathbb{R}$.

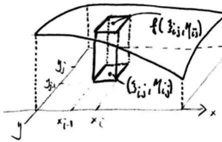
- Se la funzione f è positiva (o non negativa, cioè $f(x,y) \geq 0$) allora, ogni termine $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(\Delta x)_i (\Delta y)_j$ della sommatoria (I) rappresenta il volume di un parallelepipedo di altezza $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ e base $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

- Quindi se i rettangoli R_{ij} sono abbastanza piccoli $\Rightarrow$ $\Sigma(\alpha)$ rappresenta una buona approssimazione del volume del solido: $V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R \text{ e } 0 \leq z \leq f(x,y) \}$
V è costituito dai punti di $\mathbb{R}^3$ che stanno sopra il rettangolo e sotto $z = f(x,y)$.

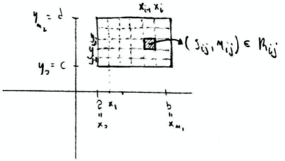


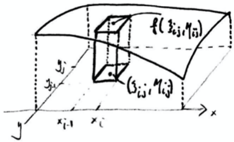






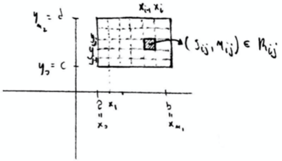
- Intuitivamente, l'integrale doppio della funzione f sul rettangolo R è dato, quando $\exists$, dal valore limite che si ottiene da $\Sigma(\alpha)$ facendo tendere a zero i lati dei sottorettangoli individuati da una qualsiasi partizione puntata α di R (cioè $|\alpha| \to 0$ per ogni partizione considerata)

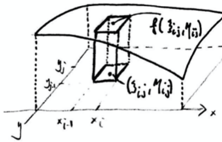




- Intuitivamente, l'integrale doppio della funzione f sul rettangolo R è dato, quando $\exists$, dal valore limite che si ottiene da $\Sigma(\alpha)$ facendo tendere a zero i lati dei sottorettangoli individuati da una qualsiasi partizione puntata α di R (cioè $|\alpha| \to 0$ per ogni partizione considerata)

<u>Definizione</u> (Integrale doppio di f in un rettangolo R)
Sia R un rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani e $f: R \to \mathbb{R}$. Si dica che un numero $L \in \mathbb{R}$ è l'integrale doppio di f su R se fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$ (piccolo a piacere), esiste $\delta > 0$ tale che, comunque si prenda una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha| < \delta \Rightarrow |\Sigma(\alpha) - L| < \varepsilon$.





- Intuitivamente, l'integrale doppio della funzione f sul rettangolo R è dato, quando $\exists$, dal valore limite che si ottiene da $\Sigma(\alpha)$ facendo tendere a zero i lati dei sottorettangoli individuati da una qualsiasi partizione puntata α di R (cioè $|\alpha| \to 0$ per ogni partizione considerata)

<u>Definizione</u> (Integrale doppio di f in un rettangolo R)

Sia R un rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani e $f: R \to \mathbb{R}$. Si dice che un numero $L \in \mathbb{R}$ è l'integrale doppio di f su R se fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$ (piccolo a piacere), esiste $\delta > 0$ tale che, comunque si prenda una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha| < \delta \Rightarrow |\Sigma(\alpha) - L| < \varepsilon$.

Se ciò accade si scrive $\lim\limits_{|\alpha| \to 0} \Sigma(\alpha) = L$ (II) e la funzione f si dice integrabile su R (secondo Cauchy-Riemann) e la quantità limite L si dice integrale di f su R; tale limite L si denota, in maniera più espressiva, come:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{oppure} \quad \int_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{e} \quad L = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy\,.}$$

e la quantità limite L si dica integrale di f su R; tale limite L si denota, in maniera più espressiva, come:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{oppure} \quad \int_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{e} \quad L = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy .$$

- Dalle proprietà del limite (formula (II)) si ha che se f e g sono due funzioni integrabili in un rettangolo R e λ, σ sono due numeri reali $\Rightarrow$ $\lambda f + \sigma g$ è integrabile su R e vale che:

$$\boxed{\iint_R (\lambda f + \sigma g)\,dx\,dy = \lambda \iint_R f\,dx\,dy + \sigma \iint_R g\,dx\,dy}$$

(per brevità si omette la dipendenza da (x,y))

ovvero l'integrale doppio gode della proprietà di linearità (rispetto alla funzione integranda).

e la quantità limite L si dica integrale di f su R; tale limite L si denota, in maniera più espressiva, come:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{oppure} \quad \int_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{e} \quad L = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy .$$

- Dalle proprietà del limite (formula (II)) si ha che se f e g sono due funzioni integrabili in un rettangolo R e λ, σ sono due numeri reali $\Rightarrow$ $\lambda f + \sigma g$ è integrabile su R e vale che:

$$\iint_R (\lambda f + \sigma g)\,dx\,dy = \lambda \iint_R f\,dx\,dy + \sigma \iint_R g\,dx\,dy$$

(per brevità si omette la dipendenza da (x,y))

ovvero l'integrale doppio gode della proprietà di linearità (rispetto alla funzione integranda).

- Più precisamente l'integrale è un funzionale lineare sullo spazio vettoriale delle funzioni integrabili (secondo Cauchy-Riemann) sul rettangolo R:

$$\mathrm{Int} : I(R) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \mathrm{Int}(f) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

e la quantità limite L si dice integrale di f su R; tale limite L si denota, in maniera più espressiva, come:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{oppure} \quad \int_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{e} \quad L = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy .$$

- Dalle proprietà del limite (formula (II)) si ha che se f e g sono due funzioni integrabili in un rettangolo R e λ, σ sono due numeri reali $\Rightarrow$ $\lambda f + \sigma g$ è integrabile su R e vale che:

$$\iint_R (\lambda f + \sigma g)\,dx\,dy = \lambda \iint_R f\,dx\,dy + \sigma \iint_R g\,dx\,dy$$ (per brevità si omette la dipendenza da (x,y))

ovvero l'integrale doppio gode della proprietà di linearità (rispetto alla funzione integranda).

Più precisamente l'integrale è un funzionale lineare sullo spazio vettoriale delle funzioni integrabili (secondo Cauchy-Riemann) sul rettangolo R: $\mathrm{Int} : I(R) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \mathrm{Int}(f) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

- Dalla definizione di integrale, segue che se f è integrabile in R e $\boxed{f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in R \implies \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \geq 0}$

- Proprietà di monotonia: siano f e g due funzioni integrabili in un rettangolo R.

  Se vale che $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in R$, allora segue che:

$$\boxed{\iint_R f \, dx\, dy \leq \iint_R g \, dx\, dy .}$$

- Proprietà di monotonia: siano f e g due funzioni integrabili in un rettangolo R. Se vale che $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in R$, allora segue che:

$$\iint_R f \, dx\, dy \leq \iint_R g \, dx\, dy.$$

- Un sottoinsieme L di $\mathbb{R}^2$ si dice trascurabile oppure di misura bidimensionale nulla se $\forall \varepsilon > 0$ allora L può essere ricoperto con una famiglia (al più) numerabile di rettangoli di area totale minore di ε (nel senso che la somma, o la serie, delle aree dei rettangoli è minore di ε).

- Proprietà di monotonia: Siano f e g due funzioni integrabili in un rettangolo R. Se vale che $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in R$, allora segue che:

$$\iint_R f \, dx\, dy \leq \iint_R g \, dx\, dy.$$

- Un sottoinsieme L di $\mathbb{R}^2$ si dice trascurabile oppure di misura bidimensionale nulla se $\forall \varepsilon > 0$ allora L può essere ricoperto con una famiglia (al più) numerabile di rettangoli di area totale minore di ε (nel senso che la somma, o la serie, delle aree dei rettangoli è minore di ε).

- Esempi di insiemi di misura nulla: il grafico $\left(y = g(x) \text{ o } x = g(y) \right)$ di una funzione continua (di una variabile reale) in un intervallo è un insieme trascurabile di $\mathbb{R}^2$.

  L'unione di un numero finito (o, addirittura, di un'infinità numerabile) di insiemi trascurabili è ancora un insieme trascurabile.

- Proprietà di monotonia: Siano f e g due funzioni integrabili in un rettangolo R. Se vale che $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in R$, allora segue che:

$$\iint_R f \, dx\,dy \leq \iint_R g \, dx\,dy.$$

- Un sottoinsieme L di $\mathbb{R}^2$ si dice trascurabile oppure di misura bidimensionale nulla se $\forall \varepsilon > 0$ allora L può essere ricoperto con una famiglia (al più) numerabile di rettangoli di area totale minore di ε (nel senso che la somma, o la serie, delle aree dei rettangoli è minore di ε).

- Esempi di insiemi di misura nulla: il grafico ($y = g(x)$ o $x = g(y)$) di una funzione continua (di una variabile reale) in un intervallo è un insieme trascurabile di $\mathbb{R}^2$.

  L'unione di un numero finito (o, addirittura, di un'infinità numerabile) di insiemi trascurabili è ancora un insieme trascurabile.

- Teorema (di integrabilità)
  Una funzione $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ è integrabile sul rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$ se e solo se essa è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

- Come conseguenza diretta del teorema di integrabilità si ha che la somma e il prodotto e la composizione di funzioni integrabili è ancora integrabile (il quoziente potrebbe essere una funzione <u>non limitata</u> e quindi non integrabile).

- Come conseguenza diretta del teorema di integrabilità si ha che la somma e il prodotto e la composizione di funzioni integrabili è ancora integrabile (il quoziente potrebbe essere una funzione non limitata e quindi non integrabile).

- Se $f : \overbrace{[a,b] \times [c,d]}^{R=} \to \mathbb{R}$ è continua sul rettangolo R allora è anche integrabile su tale rettangolo, essendo limitata (per il teorema di Weierstrass) ed avendo un insieme vuoto (quindi trascurabile) di punti di discontinuità.

- Più in generale, se una funzione ha un numero finito (o un'infinità numerabile) di punti di discontinuità, allora, purché sia limitata, è integrabile.

- Come conseguenza diretta del teorema di integrabilità si ha che la somma e il prodotto e la composizione di funzioni integrabili è ancora integrabile (il quoziente potrebbe essere una funzione non limitata e quindi non integrabile).

- Se $f : \overbrace{[a,b] \times [c,d]}^{R=} \to \mathbb{R}$ è continua sul rettangolo R allora è anche integrabile su tale rettangolo, essendo limitata (per il teorema di Weierstrass) ed avendo un insieme vuoto (quindi trascurabile) di punti di discontinuità.

- Più in generale, se una funzione ha un numero finito (o un'infinità numerabile) di punti di discontinuità, allora, purché sia limitata, è integrabile.

- Teorema (di equivalenza)

  Siano f e g due funzioni integrabili in un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$. Se esse differiscono soltanto in un insieme trascurabile di punti di R, allora vale che:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R g(x,y)\,dx\,dy}$$

- Come conseguenza diretta del teorema di integrabilità si ha che la somma e il prodotto e la composizione di funzioni integrabili è ancora integrabile (il quoziente potrebbe essere una funzione <u>non limitata</u> e quindi non integrabile).

- Se $f : \overbrace{[a,b] \times [c,d]}^{R=} \to \mathbb{R}$ è continua sul rettangolo R allora è anche integrabile su tale rettangolo, essendo limitata (per il teorema di Weierstrass) ed avendo un insieme vuoto (quindi trascurabile) di punti di discontinuità.

- Più in generale, se una funzione ha un numero finito (o un'infinità numerabile) di punti di discontinuità, allora, <u>purché sia limitata</u>, è integrabile.

- <u>Teorema</u> (di equivalenza)

  Siano f e g due funzioni integrabili in un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$. Se esse differiscono soltanto in un insieme trascurabile di punti di R, allora vale che:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R g(x,y)\,dx\,dy$$

- <u>Osservazione</u> Per integrare una funzione f su un rettangolo R, non serve che questa sia necessariamente definita su tutti i punti di R. Ad esempio <u>se non è definita su un numero finito di punti</u>

- Come conseguenza diretta del teorema di integrabilità si ha che la somma e il prodotto e la composizione di funzioni integrabili è ancora integrabile (il quoziente potrebbe essere una funzione non limitata e quindi non integrabile).

- Se $f : \overbrace{[a,b] \times [c,d]}^{R=} \to \mathbb{R}$ è continua sul rettangolo R allora è anche integrabile su tale rettangolo, essendo limitata (per il teorema di Weierstrass) ed avendo un insieme vuoto (quindi trascurabile) di punti di discontinuità.

- Più in generale, se una funzione ha un numero finito (o un'infinità numerabile) di punti di discontinuità, allora, purché sia limitata, è integrabile.

- Teorema (di equivalenza)

  Siano f e g due funzioni integrabili in un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$. Se esse differiscono soltanto in un insieme trascurabile di punti di R, allora vale che:

$$\iint_R f \, dxdy = \iint_R g \, dxdy$$

può essere estesa con valori arbitrari in tali punti. Dal teorema di equivalenza => due differenti estensioni hanno lo stesso integrale

- Osservazione Per integrare una funzione f su un rettangolo R, non serve che questa sia necessariamente definita su tutti i punti di R. Ad esempio se non è definita su un numero finito di punti