Operatori Differenziali

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/04/2020

Operatori Differenziali

- Il primo operatore differenziale che abbiamo incontrato, ovvero l'operatore gradiente, agisce su campi scalari ed è definito dalle formule:

$$\boxed{\mathrm{grad} = \nabla = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}}$$

caso 3D

(Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 $\Rightarrow$ è definito $\nabla f(\underline{x})$ $\forall\, \underline{x} \in A$ e $\nabla f(\underline{x}) = \underbrace{\underline{i}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial z}}_{\in \mathbb{R}^3}$)

Qui e nel seguito A indicherà sempre un insieme aperto

Operatori Differenziali

- Il primo operatore differenziale che abbiamo incontrato, ovvero l'operatore gradiente, agisce su campi scalari ed è definito dalle formule:

$$\boxed{\text{grad} = \nabla \underset{\substack{\uparrow \\ \text{caso 2D}}}{=} \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y}}$$

(se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 $\Rightarrow$ è definito $\nabla f(\underline{x})$ $\forall\, \underline{x} \in A$ e $\nabla f(\underline{x}) = \underline{i}\,\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x} + \underline{j}\,\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial y}$)

Operatori Differenziali

- Il primo operatore differenziale che abbiamo incontrato, ovvero l'operatore gradiente, agisce su campi scalari ed è definito dalle formule:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{caso 3D}}}{\text{grad} = \nabla} = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

(se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 $\Rightarrow$ è definito $\nabla f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in A$ e $\nabla f(\underline{x}) = \underbrace{\underline{i}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) + \underline{k}\frac{\partial f}{\partial z}(\underline{x})}_{\in \mathbb{R}^3}$)

- Un altro operatore differenziale che agisce su campi scalari è il laplaciano, definito dalla formula:

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{caso 3D}}}{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

(se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 $\Rightarrow$ è definito $\Delta f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$ $\forall \underline{x} \in A$ e $\Delta f(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\underline{x})$)

Operatori Differenziali

- Il primo operatore differenziale che abbiamo incontrato, ovvero l'operatore gradiente, agisce su campi scalari ed è definito dalle formule:

$$\underset{\text{caso 3D}}{\text{grad} = \nabla} = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

(se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 $\Rightarrow$ è definito $\nabla f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in A$ e $\nabla f(\underline{x}) = \underbrace{\underline{i}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) + \underline{k}\frac{\partial f}{\partial z}(\underline{x})}_{\in \mathbb{R}^3}$)

- Un altro operatore differenziale che agisce su campi scalari è il laplaciano, definito dalla formula:

$$\boxed{\underset{\text{caso 2D}}{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$$

(se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 $\Rightarrow$ è definito $\Delta f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$ $\forall \underline{x} \in A$ e $\Delta f(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{x})$)

Operatori Differenziali

- Il primo operatore differenziale che abbiamo incontrato, ovvero l'operatore gradiente, agisce su campi scalari ed è definito dalle formule:

$$\underbrace{\text{grad} = \nabla}_{\text{caso 3D}} = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

(se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1 \Rightarrow$ è definito $\nabla f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in A$ e $\nabla f(\underline{x}) = \underbrace{\underline{i}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) + \underline{k}\frac{\partial f}{\partial z}(\underline{x})}_{\in \mathbb{R}^3}$)

- Un altro operatore differenziale che agisce su campi scalari è il laplaciano, definito dalla formula:

$$\underbrace{\Delta}_{\text{caso 3D}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe $C^2 \Rightarrow$ è definito $\Delta f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$ $\forall \underline{x} \in A$ e $\Delta f(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\underline{x})$)

- Oltre al caso di funzioni di due o tre variabili reali, i due operatori appena definiti possono anche essere estesi al caso di funzioni di k-variabili reali $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Operatori Differenziali

- Il primo operatore differenziale che abbiamo incontrato, ovvero l'operatore gradiente, agisce su campi scalari ed è definito dalle formule:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{caso 3D}}}{\text{grad} = \nabla} = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

(se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1 \Rightarrow$ è definito $\nabla f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in A$ e $\nabla f(\underline{x}) = \underbrace{\underline{i}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial z}}_{\in \mathbb{R}^3}$)

- Un altro operatore differenziale che agisce su campi scalari è il laplaciano, definito dalla formula:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{caso 3D}}}{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe $C^2 \Rightarrow$ è definito $\Delta f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$ $\forall \underline{x} \in A$ e $\Delta f(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\underline{x})$)

- Oltre al caso di funzioni di due o tre variabili reali, i due operatori appena definiti possono anche essere estesi al caso di funzioni di k-variabili reali $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

- **Divergenza**

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ con $f(\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_k}^{\underline{x} =}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_k(\underline{x}))$ un campo $C^1(A)$

si definisca divergenza di f e si indica con $\operatorname{div} f$ la funzione a valori reali:

$$\boxed{\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_K}\right) \cdot \left(f_1, f_2, \dots, f_K\right) = \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}}$$

Prodotto Scalare formale

$$\left(\text{o} \quad \operatorname{div} f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in A\right)$$

si definisce divergenza di f e si indica con $\operatorname{div} f$ la funzione a valori reali:

$$\operatorname{div} f = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prodotto} \\ \text{Scalare formale}}}{\nabla \cdot} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_K}\right) \cdot (f_1, f_2, \dots, f_K) = \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

$$\left(\text{o} \quad \operatorname{div} f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in A\right)$$

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale $f(x, y, z) = (xy, \operatorname{sen}(xyz), yz^2)$

Allora si ha che $\operatorname{div} f(\underbrace{x, y, z}_{=\underline{x}}) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\underline{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\underline{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial z}\underline{x} = y + xz\cos(xyz) + 2yz.$

si definisce divergenza di f e si indica con $\operatorname{div} f$ la funzione a valori reali:

$$\operatorname{div} f = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto} \\ \text{scalare formale}}}{\nabla \cdot} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\cdot\left(f_1, f_2, \dots, f_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

$$\left(\text{o} \quad \operatorname{div} f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in A\right)$$

<u>Esempio</u>

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale $f(x,y,z) = (xy, \operatorname{sen}(xyz), yz^2)$

Allora si ha che $\operatorname{div} f(\underbrace{x,y,z}_{=\underline{x}}) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\underline{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\underline{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(\underline{x}) = y + xz\cos(xyz) + 2yz.$

- osserviamo che se $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ è di classe C^2 sull'aperto A di $\mathbb{R}^k$, allora è definita la funzione scalare $\operatorname{div} \operatorname{grad} f : A \to \mathbb{R}$ e si ha, posto $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ che:

$$\text{(I)} \quad \boxed{\operatorname{div} \operatorname{grad} f(\underline{x}) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x})\right) = \nabla \cdot \nabla f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\underline{x})}$$

$$\boxed{\text{prodotto scalare formale}} \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x})\right)$$

si definisca divergenza di f e si indica con $\mathrm{div}\, f$ la funzione a valori reali:

$$\mathrm{div}\, f = \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\cdot\left(f_1, f_2, \dots, f_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Prodotto Scalare formale

$$\left(\text{o} \quad \mathrm{div}\, f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in A\right)$$

Esempio

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale $f(x,y,z) = (xy, \operatorname{sen}(xyz), yz^2)$

Allora si ha che $\mathrm{div}\, f(\underbrace{x,y,z}_{=\underline{x}}) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\underline{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\underline{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(\underline{x}) = y + xz\cos(xyz) + 2yz.$

- Osserviamo che se $f: A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ è di classe C^2 sull'aperto A di $\mathbb{R}^k$, allora è definita la funzione scalare $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f: A \to \mathbb{R}$ e si ha, posto $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, che:

(I) $$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f(\underline{x}) = \mathrm{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x})\right) = \nabla \cdot \nabla f(\underline{x}) = \boxed{\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\underline{x}) = \Delta f(\underline{x})}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x})\right)$$

ovvero $\boxed{\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f(\underline{x}) = \Delta f(\underline{x})}$

- Osserviamo che:
  - l'operatore gradiente trasforma un campo scalare in uno vettoriale
  - l'operatore divergenza trasforma un campo vettoriale (funzione a valori vettoriali) in un campo scalare

In particolare ha senso la composizione "div grad f" nella formula (I).

- Osserviamo che:
  - l'operatore gradiente trasforma un campo scalare in uno vettoriale
  - l'operatore divergenza trasforma un campo vettoriale (funzione a valori vettoriali) in un campo scalare

In particolare ha senso la composizione "div grad f" nelle formule (I).

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 - y^2$. Allora si ha che $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e

$$\Delta f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (2x, -2y) = \underbrace{\frac{\partial 2x}{\partial x} + \frac{\partial(-2y)}{\partial y}}_{= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} = 2 - 2 = 0$$

prodotto scalare formale

- Osserviamo che:
  - l'operatore gradiente trasforma un campo scalare in uno vettoriale
  - l'operatore divergenza trasforma un campo vettoriale (funzione a valori vettoriali) in un campo scalare

In particolare ha senso la composizione "div grad f" nelle formule (I).

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 - y^2$. Allora si ha che $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e

$$\Delta f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (2x, -2y) = \underbrace{\frac{\partial 2x}{\partial x} + \frac{\partial(-2y)}{\partial y}}_{= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} = 2 - 2 = 0$$

prodotto scalare formale

- **Rotore**

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su A. Si definisce rotore di $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), f_3(\underline{x}))$ il campo vettoriale, denotato con rot f, dato da:

$$\boxed{\operatorname{rot} f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(\underline{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\underline{x})\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(\underline{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(\underline{x})\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(\underline{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(\underline{x})\right)\underline{k} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)}$$

- Osserviamo che:
  - l'operatore gradiente trasforma un campo scalare in uno vettoriale
  - l'operatore divergenza trasforma un campo vettoriale (funzione a valori vettoriali) in un campo scalare

In particolare ha senso la composizione "div grad f" nella formula (I).

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 - y^2$. Allora si ha che $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e

$$\Delta f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot(2x, -2y) = \underbrace{\frac{\partial 2x}{\partial x} + \frac{\partial(-2y)}{\partial y}}_{= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} = 2 - 2 = 0$$

prodotto scalare formale

- Rotore

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su A. Si definisce rotore di $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), f_3(\underline{x}))$ il campo vettoriale, denotato con $\mathrm{rot}\, f$, dato da:

$$\mathrm{rot}\, f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(\underline{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\underline{x})\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(\underline{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(\underline{x})\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(\underline{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(\underline{x})\right)\underline{k} = \boxed{\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = \nabla \times f(\underline{x})}$$

prodotto vettoriale formale

Infatti un metodo utile per il calcolo delle componenti di rot f (e quindi per rot f stesso) è quello di sviluppare lungo la prima riga il seguente determinante formale:

$$(\mathrm{II}) \qquad \boxed{\det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \nabla \times f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)}$$

Infatti un metodo utile per il calcolo delle componenti di rot $\underline{f}$ (e quindi per rot $\underline{f}$ stesso) è quello di sviluppare lungo la prima riga il seguente determinante formale:

$$\text{(II)} \qquad \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \nabla \times \underline{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \, , \; \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \, , \; \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) .$$

- Nel caso particolare di un campo piano (2D)

$$\underline{f}(\underbrace{x,y}_{=\underline{x}}) = \left(f_1(x,y), \, f_2(x,y) \right) = \underline{i} f_1(\underline{x}) + \underline{j} f_2(\underline{x}) + \underline{k}\, 0$$

se lo pensiamo in $\mathbb{R}^3$, terza componente nulla

Infatti un metodo utile per il calcolo delle componenti di rot $\underline{f}$ (e quindi per rot $\underline{f}$ stesso) è quello di sviluppare lungo la prima riga il seguente determinante formale:

$$(\mathrm{II}) \qquad \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \nabla \times \underline{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} , \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} , \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

- Nel caso particolare di un campo piano (2D) $\underline{f}(\underbrace{x,y}_{=\underline{x}}) = \left(f_1(x,y), f_2(x,y) \right) = \underline{i} f_1(\underline{x}) + \underline{j} f_2(\underline{x}) + \underline{k}\, 0$

se lo pensiamo in $\mathbb{R}^3$, terza componente nulla

Allora dalla (II) segue che rot $\underline{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(f_1, f_2, 0 \right) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \underline{k}$

e in questo caso rot $\underline{f}$ è perpendicolare al piano sul quale è definita la $\underline{f}$ (piano xy nel nostro caso)

Infatti un metodo utile per il calcolo delle componenti di rot $\underline{f}$ (e quindi per rot $\underline{f}$ stesso) è quello di sviluppare lungo la prima riga il seguente determinante formale:

$$\text{(II)} \qquad \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \nabla \times \underline{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} , \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} , \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

- Nel caso particolare di un campo piano (2D) $\underline{f}(\underbrace{x,y}_{=\underline{x}}) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \underline{i} f_1(\underline{x}) + \underline{j} f_2(\underline{x}) + \underline{k}\, 0$

se lo pensiamo in $\mathbb{R}^3$, terza componente nulla

Allora dalla (II) segue che $\text{rot}\, \underline{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f_1, f_2, 0) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \underline{k}$

e in questo caso rot $\underline{f}$ è perpendicolare al piano sul quale è definita la $\underline{f}$ (piano xy nel nostro caso)

Osservazione:

- si ha che se $\underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è di classe C^2 in A $\Rightarrow$ $\boxed{\text{div}(\text{rot}(\underline{f})) = 0}$

Infatti $\text{div}(\text{rot}(\underline{f})) = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{f}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_2 \end{bmatrix} = 0$

prodotto misto formale

Teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste

Infatti un metodo utile per il calcolo delle componenti di rot f (e quindi per rot f stesso) è quello di sviluppare lungo la prima riga il seguente determinante formale:

$$(\mathrm{II}) \qquad \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \nabla \times f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} , \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} , \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

• Nel caso particolare di un campo piano (2D) $f(\underbrace{x,y}_{=\underline{x}}) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \underline{i} f_1(\underline{x}) + \underline{j} f_2(\underline{x}) + \underline{k}\, 0$

se lo pensiamo in $\mathbb{R}^3$, terza componente nulla

Allora dalla (II) segue che $\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (f_1, f_2, 0) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \underline{k}$

e in questo caso rot f è perpendicolare al piano sul quale è definita la f (piano xy nel nostro caso)

<u>Osservazione</u>:

• Si ha che se $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è di classe C^2 in $A \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = 0$

Infatti $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = \nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$

• Si ha anche che $\boxed{\nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0}$

Teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste