Corda vibrante: soluzione

Consideriamo per semplicità il caso della corda ~~battuta~~

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & (0,L) \times (0,+\infty) \\ u(0) = u(L) = 0 \\ \partial_t u = 0 \quad u = g(x) & [0,L] \times \{t=0\} \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione col metodo della separaz. delle variabili $u(x,t) = \underbrace{S(t)\,Z(x)}_{\text{fattorizz. della soluzione}}$

$$\partial_t^2 u = \ddot{S}(t) Z(x)$$

$$\partial_x^2 u = S(t)\, Z''(x)$$

eq. onde $\Rightarrow$ $\ddot{S} Z = S Z'' \Rightarrow \underbrace{\dfrac{\ddot{S}(t)}{S(t)}}_{f(t)} = \underbrace{\dfrac{Z''(x)}{Z(x)}}_{h(x)}$

$f(t) = h(x) \Rightarrow f(t) = \underbrace{K}_{\text{costante}} = h(x)$

Verifichiamo che K deve essere negativa

1) $K > 0 \Rightarrow Z'' = \overset{K}{\lambda^2} Z \Rightarrow Z = Ae^{\sqrt{K}x} + Be^{-\sqrt{K}x}$

$= Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$

Trovo A e B con le c.c.

$x=0 \Rightarrow u(0) = S(t)\, z(0) = 0 \Rightarrow z(0)=0$

$u(L) = S(t)\, z(L) = 0 \Rightarrow z(L) = 0$

$z(0)=0 \Rightarrow A+B=0 \quad \Rightarrow B=-A$

$z(L)=0 \Rightarrow Ae^{\lambda L} + Be^{-\lambda L} = 0$

$\hookrightarrow \quad Ae^{\lambda L} - Ae^{-\lambda L} = A(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) = 0$

$A=0 \quad B=0$

$K=\lambda^2 \Rightarrow$ soluz. banale

2) $K=0 \qquad z''=0 \Rightarrow z = Ax+B$

$z(0)=0 \Rightarrow B=0$

$z(L)=0 \Rightarrow AL=0 \Rightarrow A=0$

sol. banale

Caso $K<0$: $K=-\lambda^2$

$z'' = -\lambda^2 z \Rightarrow z = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$

C.C. $\quad z(0)=0 \Rightarrow B=0$

$z(L)=0 \Rightarrow A\sin(\lambda L) = 0$

$\Rightarrow \lambda L = n\pi \quad \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{L}} \quad n \in \mathbb{N}^+$

Risolvendo la componente spaziale di u abbiamo trovato che ~~tutte~~ le funzioni $Z(x) = A \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$ sono sol di eq. e soddisfano cond. al cont.

Considero la parte temporale

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda^2 \quad \text{dove } \lambda = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \overset{\text{isolato}}{\lambda_n = \frac{n\pi}{L}}$$

Scelgo n $\Rightarrow$ $\frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda_n^2$

$$\ddot{T} = -\lambda_n^2 T \Rightarrow T = C_n \sin(\lambda_n t) + D_n \cos(\lambda_n t)$$

C. I. $\partial_t u(\cancel{0}, x) = 0$

$$0 = \dot{T}(0) Z(x) = 0 \Rightarrow \dot{T}(0) = 0$$

$$\dot{T} = \lambda_n (C_n \cos(\lambda_n t) - D_n \sin(\lambda_n t))$$

$$\dot{T}(0) = \lambda_n C_n = 0 \Rightarrow C_n = 0$$

Abbiamo ottenuto: fissato $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$

$$\Rightarrow u_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right)$$

è soluz. di $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$

$$u(x=0) = u(x=L) = 0$$

$$\partial_t u(x, t=0) = 0$$

per linearità anche $u(x,t) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$

rispetta tutte le precedenti equazioni

Dobbiamo solo imporre che anche la C.I. sia soddisfatta

$$u(x, t=0) = g(x) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$\Rightarrow$ A_n sono i coeff. dello s.s. Fourier di g (della sola componente seno

Ricordiamo la formula generale

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L'} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L'}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L'} \int_{-L'/2}^{L'/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L'}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L'} \int_{-L'/2}^{L'/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L'}\right) dx$$

In modo da riscriverlo con i parametri della corda

mettiamo $\frac{L'}{2} = L$ e $a_n = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right).$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

confrontando $g(x) = \sum A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

NOTA: poiché $g(x)$: $g(0) = g(L) = 0$, g <u>non</u> può avere termini in coseno nello sviluppo

$$B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \overset{x=0}{\Rightarrow} B_n = 0$$

Abbiamo ottenuto la soluzione della corda ~~battuta~~

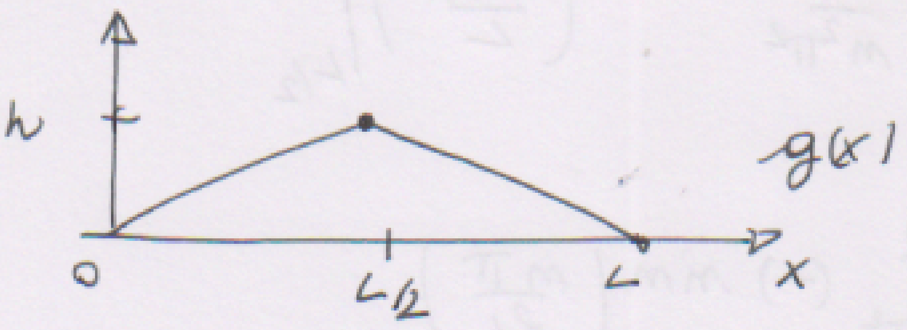
$$u_p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Analogamente, nel caso della corda ~~battuta~~ avremmo ottenuto

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \partial_x^2 w = 0 & (0,L) \times (0,\infty) \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 & \\ \partial_t w = h(x) \quad w(t=0) = 0 & [0,L] \times \{t=0\} \end{cases}$$

$$u_b = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Soluz. corda pizzicata



$$g(x) = \begin{cases} x \dfrac{2h}{L} & 0 < x < L/2 \\ \dfrac{2h}{L}(L-x) & \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

otteniamo i coefficienti

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx =$$

$$\frac{2}{L} \left\{ \int_0^{L/2} x \frac{2h}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^{L} 2h \frac{(L-x)}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\}$$

$$\int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{L}{n\pi} \Big|_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi} \int_0^{L/2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$= -\frac{L^2}{2n\pi} \cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}^{0} + \frac{L}{n\pi}\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^{L/2} =$$

$$\frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\int_{L/2}^{L} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = + x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{L}{n\pi} \Big|_{L/2}^{L} - \int_{L/2}^{L} \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_{L/2}^{L} =$$

$$= \frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}(-)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\Bigg[\frac{2h}{L}\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2h}{L}\left(\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) + \underbrace{2h\int_{L/2}^{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}\Bigg]$$

$$-\frac{2hL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_{L/2}^{L} = -\frac{2hL}{n\pi}\cos(n\pi)$$

$$a_n = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

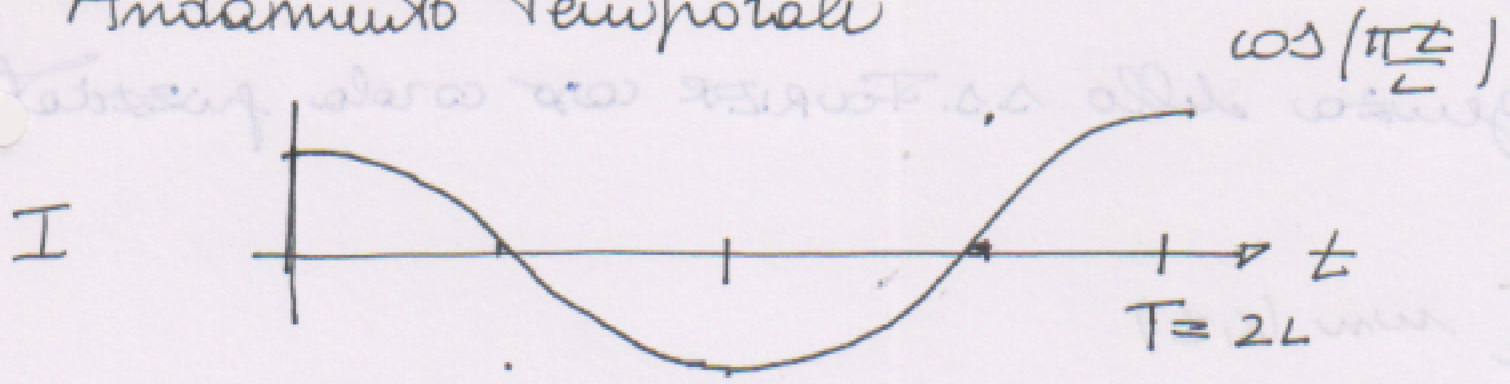
$$w(x,t) = \sum a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) =$$

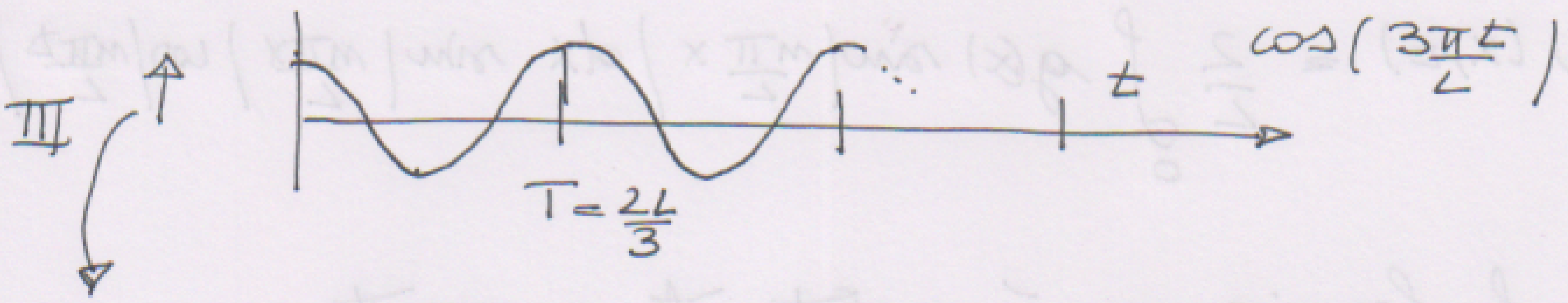
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8h}{\pi^2}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) =$$

solo termini dispari

$$= \frac{8h}{\pi^2}\Bigg\{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi t}{L}\right)}_{\text{arm. fond.}} - \frac{1}{3^2}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi t}{L}\right)}_{\text{III armonica}} + \frac{1}{5^2}\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{5\pi t}{L}\right)}_{\text{V armonica}} + \dots\Bigg\}$$

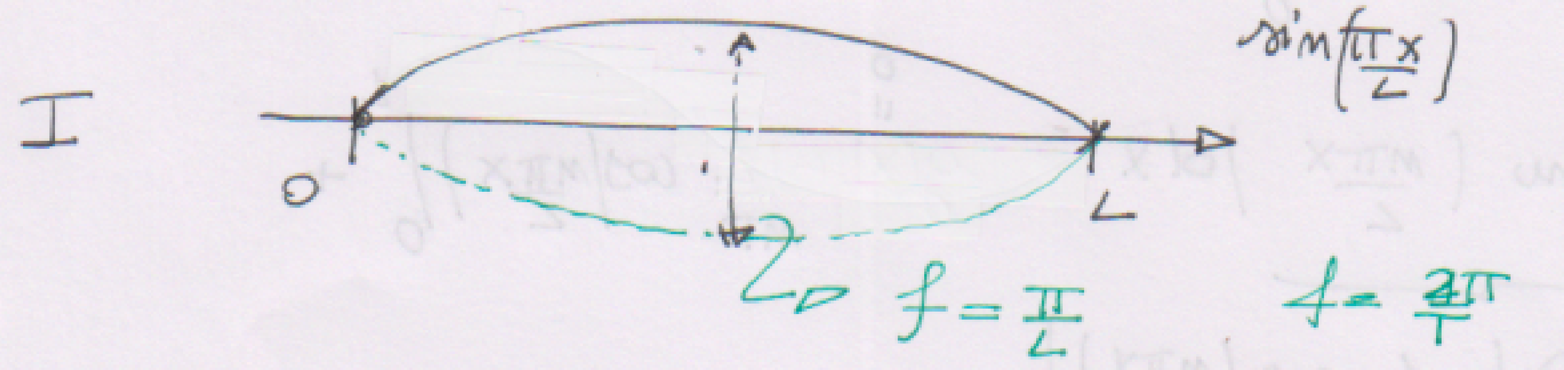
Andamento temporale

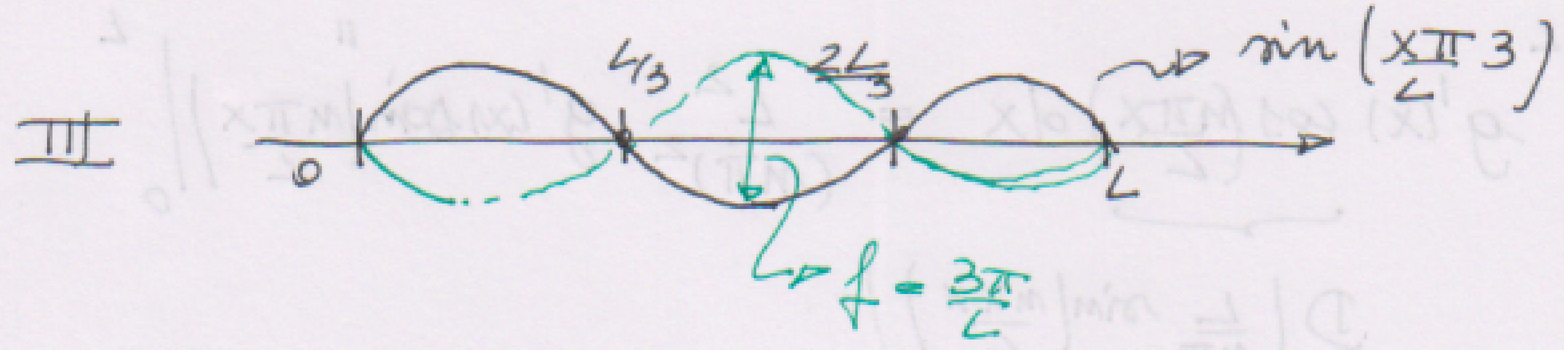




ampiezza $\frac{1}{9}$ risp. a I armonica

Ad ogni modo di oscillazione temporale corrisponde un modo di oscill. spaziale





Nota: convergenza della s.s. FOURIER caso corda pizzicata

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t)$$

$$u_n(x,t) = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)$$

verif. che la serie u_n è assolutamente convergente

ovvero $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x,t)|$ converge. Abbiamo:

$$|u_n(x,t)| \leq \frac{2}{L}\left|\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right|$$

ipotizziamo che g abbia derivate 2^e limitate

$$\int_0^L g(x)\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{D\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}dx = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{g(x)(-)\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L}} +$$

$$+\frac{L}{n\pi}\int_0^L g'(x)\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{D\left(\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}dx = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\frac{L^2}{(n\pi)^2}g'(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L}}$$

$$-\frac{L^2}{(n\pi)^2}\int_0^L g''(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

adesso $\left| \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \le \frac{L^2}{(n\pi)^2} \left| \int_0^L g''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right|$

$\le \frac{L^2}{n^2\pi^2} \|g''\|_{L^\infty} L$

quindi $|w_n| \le \frac{2}{\pi^2} L^2 \|g''\|_{L^\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ convergente