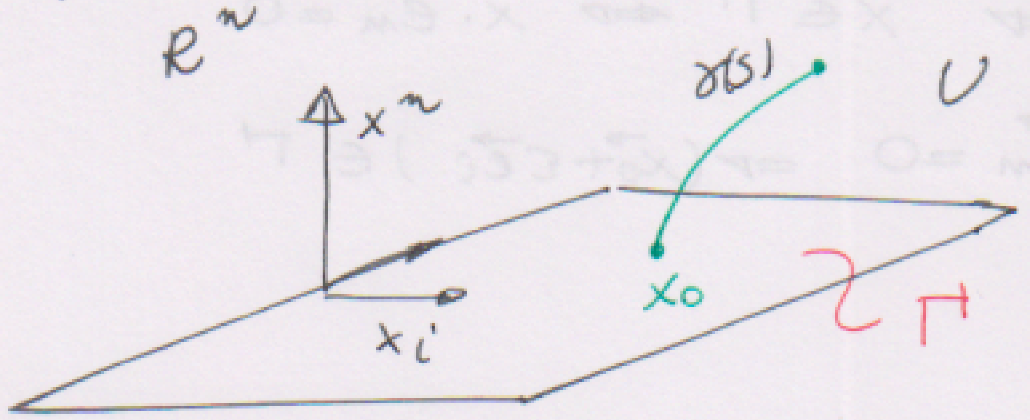
Metodo delle caratteristiche: c. I.

Per determinare le condiz. che garantiscono che il prob. Cauchy è ben posto in un opportuno intorno, consideriamo il caso semplificato in cui $\Gamma \doteq \{x_n = 0\}$



Ricordiamo il met. caratt. $F(\bar{p}, z, \bar{x}) = 0$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(s) = \vec{\nabla}_p F \\ \dot{p}(s) = -\vec{\nabla}_x F - \bar{p}\dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dot{z}(s) = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_p F \end{cases}$$

Dove $z(s) = u(\gamma(s))$ $\quad \vec{p}(s) = \nabla_x u\big|_{x=\gamma(s)}$

$$\begin{cases} F(\nabla_x u, u, x) = 0 & x \in U \\ u = g & x \in \Gamma \equiv \{x_n = 0\} \end{cases}$$

C.I. : Fissiamo un punto $x_0 \in \Gamma$

$\bar{\gamma}(0) = x_0$

$z(0) = u(\gamma(0)) = u(x_0) = g(x_0)$

Calcoliamo $\vec{\nabla}_x u \Big|_{x=x_0}$

$i = 1 \dots n-1 \Rightarrow \partial_{x_i} u(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x_0 + \varepsilon \vec{e}_i) - u(x_0)}{\varepsilon}$

Γ è lo spazio $\{x_n = 0\} \Rightarrow \vec{x} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{e}_n = 0$

$x_0 \in \Gamma \Rightarrow (x_0 + \varepsilon \vec{e}_i) \vec{e}_n = 0 \Rightarrow (\vec{x_0} + \varepsilon \vec{e}_i) \in \Gamma$

$\Rightarrow x \in \Gamma \quad u(x) = g(x)$

$\Rightarrow \partial_{x_i} u(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(\vec{x_0} + \varepsilon \vec{e}_i) - g(x_0)}{\varepsilon} = \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x=x_0}$

Quindi $\vec{p}(0) = \vec{p}(x_0) = \left(\partial_{x_1} g\big|_{x_0}, \partial_{x_2} g\big|_{x_0} \dots \partial_{x_{n-1}} g\big|_{x_0}, \tilde{p}_n \right)$

per p_n il rag. precedente non funziona perché

$x_0 + \varepsilon \vec{e}_n \notin \Gamma$

definendo $p_{i,0} = \partial_{x_i} g\big|_{x_0}$

$\vec{p}(0) = (p_{1,0}, p_{2,0} \dots p_{n-1,0}, \tilde{p}_n)$

$\tilde{p}_n$ lo determino attraverso l'equaz. scalare

$F(\vec{p}(s), z(s), \gamma(s)) = 0$

in $s = 0$

Calcoliamo $\vec{\nabla}_x u\Big|_{x=x_0}$

$i = 1 \dots n-1 \Rightarrow \partial_{x_i} u\,|(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{u(x_0+\varepsilon \vec{e}_i) - u(x_0)}{\varepsilon}$

Γ è lo spazio $\{x_n = 0\} \Rightarrow \vec{x} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{e}_n = 0$

$x_0 \in \Gamma \Rightarrow (x_0 + \varepsilon \vec{e}_i) \vec{e}_n = 0 \Rightarrow (\vec{x}_0 + \varepsilon \vec{e}_i) \in \Gamma$

$\Rightarrow x \in \Gamma \quad u(x) = g(x)$

$\Rightarrow \partial_{x_i} u(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{g(\vec{x}_0 + \varepsilon \vec{e}_i) - g(x_0)}{\varepsilon} = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x=x_0}$

Quindi $\vec{P}(0) = \vec{P}(x_0) = \left(\partial_{x_1} g|_{x_0}, \partial_{x_2} g|_{x_0} \dots \partial_{x_{n-1}} g|_{x_0}, \tilde{p}_n \right)$

per p_n il rag. precedente non funziona perché

$x_0 + \varepsilon \vec{e}_n \notin \Gamma$

definendo $p_{i,0} = \partial_{x_i} g|_{x_0}$

$\vec{p}(0) = (p_{1,0}, p_{2,0} \dots p_{n-1,0}, \tilde{p}_n)$

$\tilde{p}_n$ lo determino attraverso l'equaz. scalare

$F(\vec{P}(s), z(s), \gamma(s)) = 0$

in $s=0$

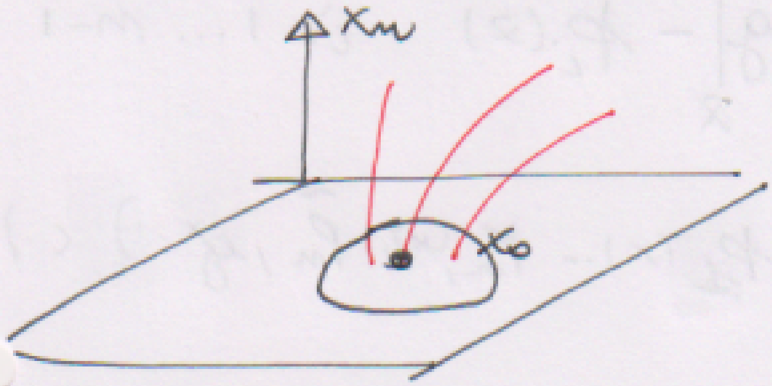
$$F(p_{1,0}, p_{2,0} \dots \; p_{n-1,0}, \tilde{p}_n, g(x_0), x_0) = 0$$

Ipotizziamo che sia possibile risolvere e trovare $\tilde{p}_n$ dalla precedente relaz.; ovvero entità $\vec{p}_0$:

$$① \begin{cases} F(\vec{p}_0, \underset{\substack{\parallel \\ z_0}}{g(x_0)}, x_0) = 0 \\ \vec{p}_{i0} = \partial_{x_i} g(x_0) \qquad i = 1 \dots n-1 \end{cases} \rightarrow \text{Relazioni di compatibilità}$$

La terna $(\vec{p}_0, z_0, x_0)$ è detta ammissibile

Verifichiamo quali siano le condizioni affinché il sist. 1 sia risolubile in un intorno di x_0



condiz. che garantisca l'esistenza di strette caratt. nell'intorno di un pt.

LEMMA Il sistema 1 ammette soluzione in un intorno U_{x_0} se $\left.\dfrac{\partial F}{\partial p_n}\right|_{(\vec{p}_0, z_0, x_0)} \neq 0$

Ricordiamo

Th funzione implicita

Sia $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\qquad\quad \vec{p} \qquad \vec{x}$

t.c. $G(\vec{p}_0, \vec{x}_0) = 0$

e $\det\left(\dfrac{\partial G_j}{\partial p_i}\right) \neq 0$

$\Rightarrow$ esiste $h : \underset{\vec{x}}{\mathbb{R}^n} \to \underset{\vec{p}}{\mathbb{R}^n}$ t.c. $h(\vec{x}_0) = \vec{p}_0$

e $G(h(x), x) = 0$ in un intorno di x_0

Scegliamo $G \Rightarrow \begin{cases} G_i(\bar{p}, \bar{x}) = -\partial_{x_i} g\big|_{\bar{x}} + p_i(x) & i = 1 \dots n-1 \\ G_n(\bar{p}, \bar{x}) = F(p_1(x) \dots p_{n-1}(x), \tilde{p}_n, g(x); x) & \end{cases}$

Essendo (x_0, p_0, z_0) terna compatibile

$G(p_0, x_0) = 0 \quad : \begin{cases} G_i = -\partial_{x_i} g\big|_{x_0} + p_{i0} = 0 \\ G_n = F(\bar{p}_0, g(x_0), x_0) = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial G_i}{\partial p_j} = \begin{cases} \delta_{ij} & i = 1 \dots n-1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial p_j} & i = n \end{cases}$$

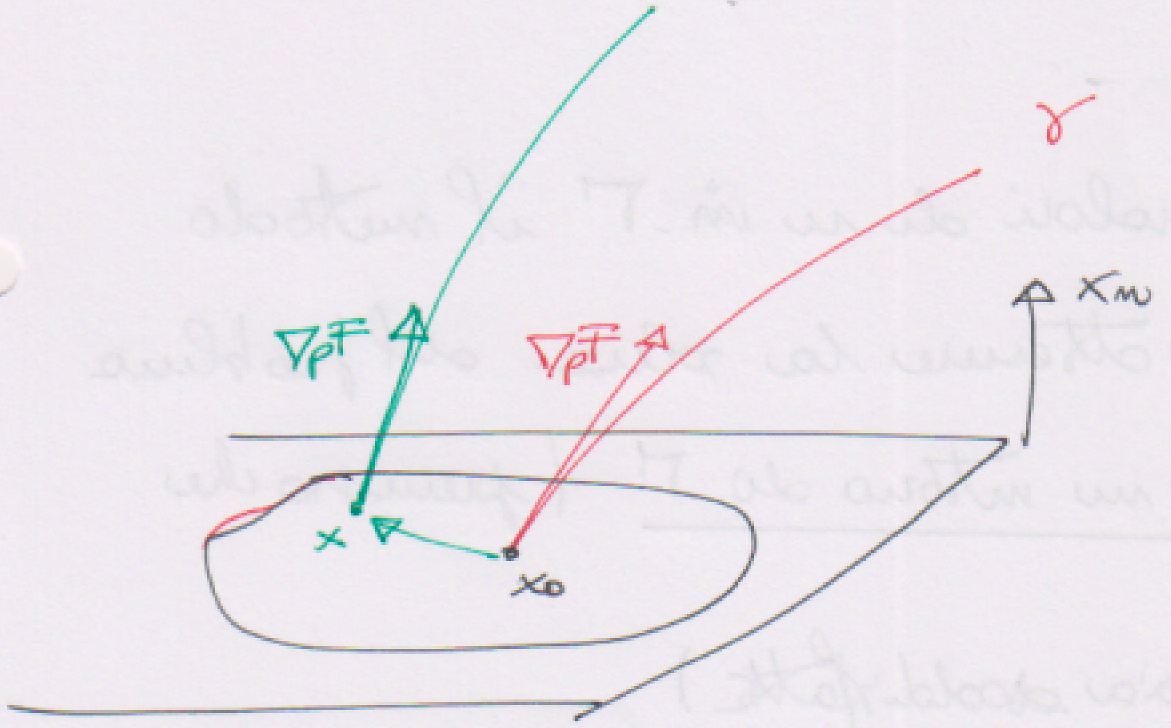
$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} & \frac{\partial F}{\partial p_2} & \dots & & & \frac{\partial F}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

$$\det(G_{ij})\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial F}{\partial p_n}\Big|_{x=x_0}$$

Quindi $\frac{\partial F}{\partial p_n}\Big|_{x=0} \neq 0$ posso trovare $\vec{p}(\bar{x})$

t.c. le relazioni di compatibilità siano soddisfatte

in un intorno di x_0



Nota: poiché $\nabla_p F$ è tg. alla curva $\gamma(s)$ $\left(\dot{\gamma}(s) = \nabla_p F \right)$

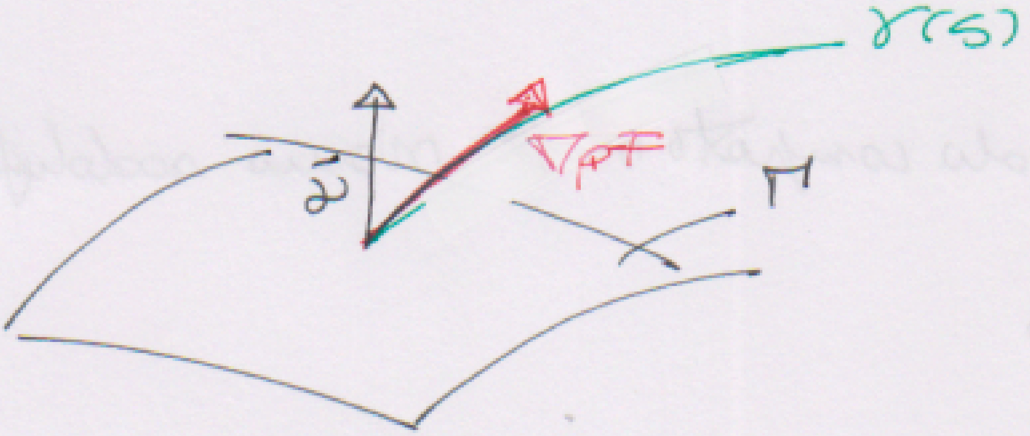
chiedere $\frac{\partial F}{\partial p_n} \neq 0 \Rightarrow$ la curva "esce" dallo spazio Γ.

Affinché il metodo delle caratt. possa essere applicato

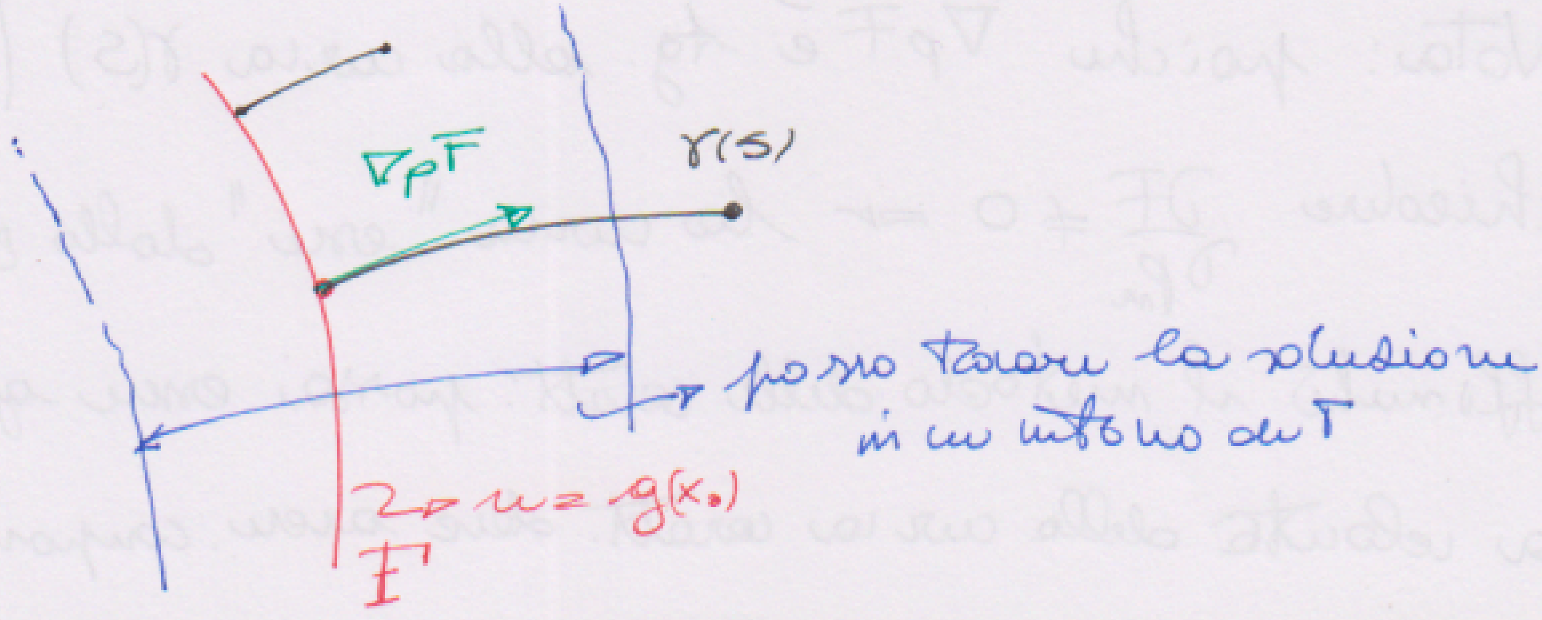
la velocità della curva caratt. deve aver. componente non nulla nella direzione ortogonale allo spazio in cui vengono assegnati i valori della soluzione

Più in generale abbiamo che il sistema caratteristico ammette una soluzione locale (ovvero per s suff. piccolo) se vale la condizione $\nabla_p F \cdot \vec{\nu} \Big|_{x_0} \neq 0$

dove $\vec{\nu}$ è la normale alla sup. Γ

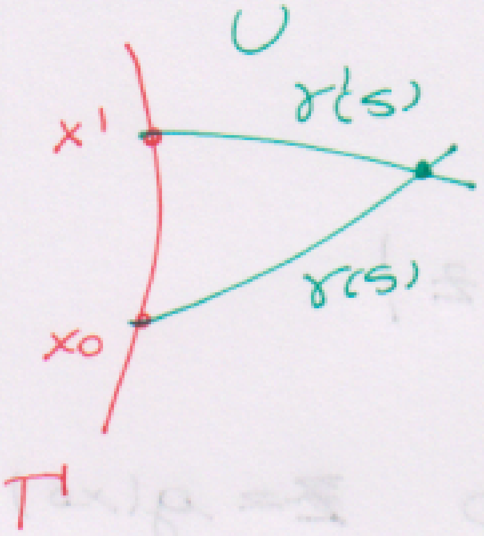


Quindi, se assegno i valori di u in Γ il metodo alle caratt. permette di ottenere la soluz. del problema $F(\nabla u, u, x) = 0$ <u>in un intorno di Γ</u> (premesso che la cond. $\nabla_p F \cdot \nu \neq 0$ sia ~~soddisfatta~~)



Metodo delle caratteristiche: incrocio delle caratt.

Problema che emerge quando si costruisce la soluz. di un prob. diff. 1° ordine col metodo delle caratt.



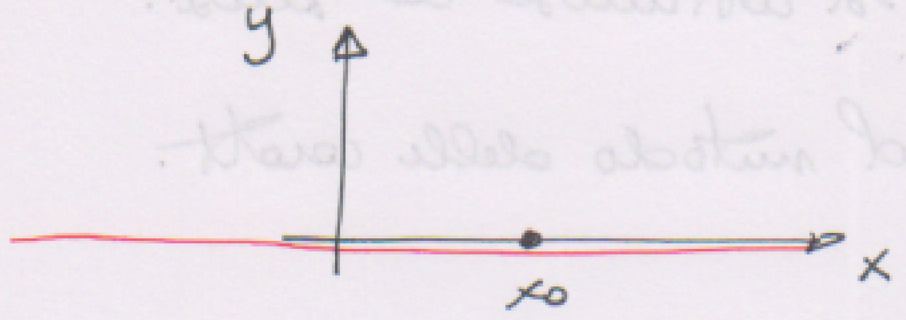
$\Rightarrow u(x)$ è determinato in 2 modi diversi ed i risultati non sono sempre compatibili

Come possiamo stabilire se 2 caratt. si incrociano!

$\gamma(s)$: Fissato s $\gamma(s)$ può essere vista come una mappa $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad x_0 \to x = \gamma(s)$

Le caratt. <u>non</u> si incrociano se la mappa è invertibile: ad ogni pt $x \in U$ posso associare un solo x_0 e s t.c. $\gamma(s) = x \quad \gamma(0) = x_0$

Es. $\begin{cases} \partial_y u + u\,\partial_x u = 0 & y>0 \\ u = g(x) & y=0 \end{cases}$



$F = p_y + z\,p_x = 0 \qquad \nabla_p F = (z, 1)$

$\dot{z} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_p F = p_y + z p_x = 0 \Rightarrow \dot{z} = 0 \qquad z = g(x_0)$

$\dot{\gamma} = \nabla_p F \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = z(0) \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = z(0)s + x_0 \\ y = s + y_0 \end{array}$

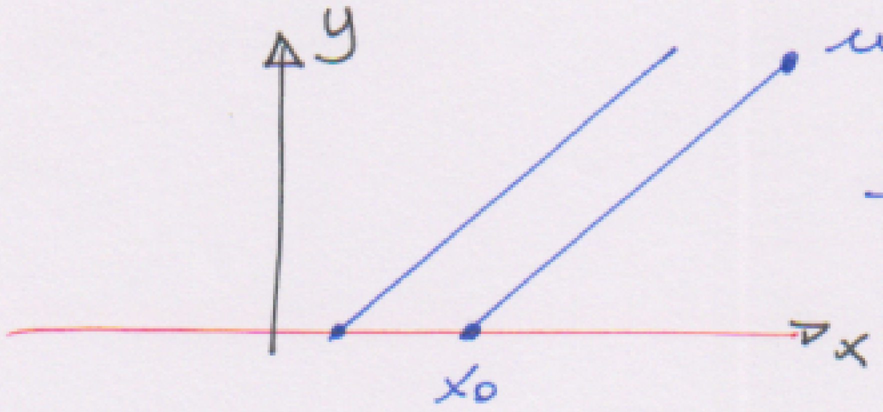
$z(0) = g(x_0)\ ,\ y_0 = 0$

$\gamma: \begin{cases} x = x_0 + s\,g(x_0) \\ y = s \end{cases} \Rightarrow \underline{x = x_0 + g(x_0)\,y}$

rette il cui coeff. angolare

dipende da x_0

1) $g(x) = K \quad \Rightarrow \gamma \begin{cases} x = x_0 + sK \\ y = s \end{cases}$



$u(x,y) = z(s) = u(x_0) = K$

$\rightarrow$ rette parallele

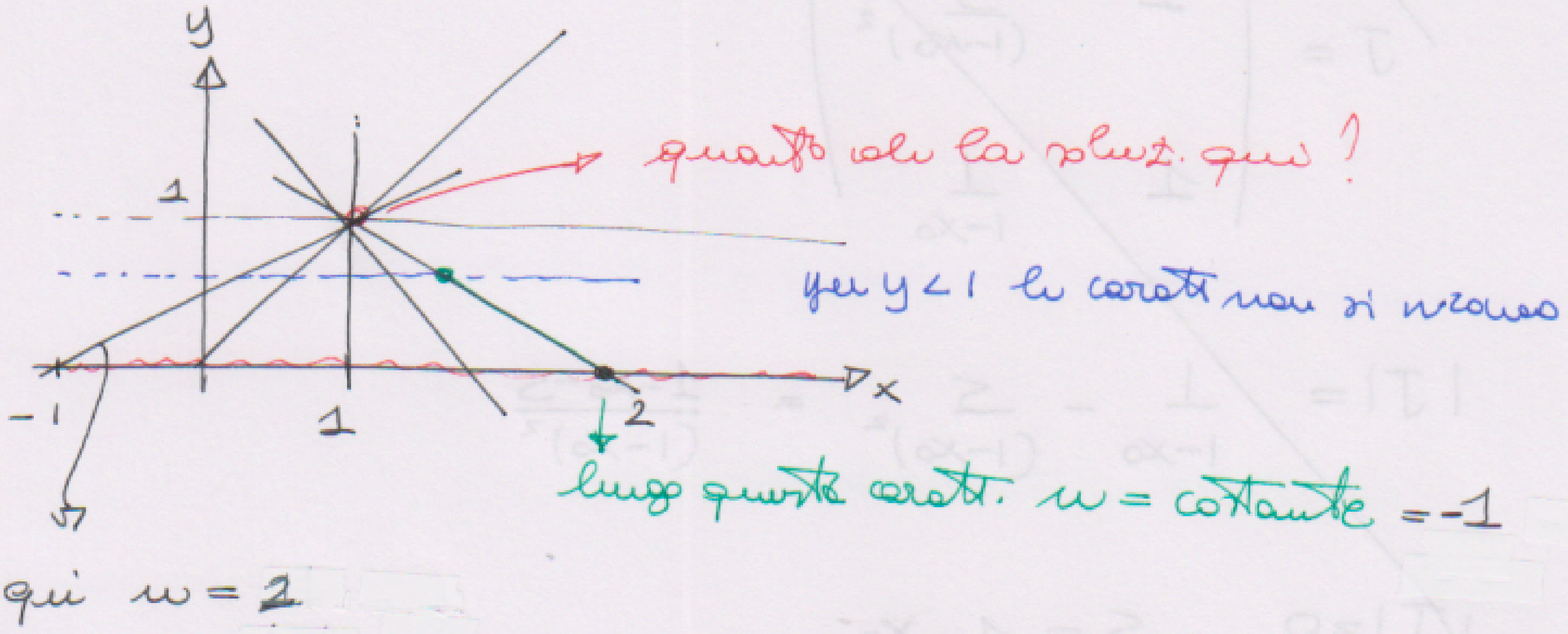
Soluz. costante ovunque

2) $g(x_0) = (1 - x_0)$

Rette caratt. $x = x_0 + (1 - x_0) y$

$y = s$

Nota: tutte le caratt. passano per il punto $(x=1, y=1)$



Le caratt. forniscono una mappa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\gamma : \quad (x_0, s) \to (x, y) = \gamma_{x_0}(s)$

La mappa è invertibile (ovvero le caratt. non si incrociano) se lo Jac. della trasf. ha det $\neq 0$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x_0,s)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s & 0 \\ 1-x_0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|J| = 1 - s \qquad |J| = 0 \Rightarrow s = 1$