Dimo alternativa lemma

Definiamo adesso $G : \underset{\bar{x}}{\mathbb{R}^n} \times \underset{p_n}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$

$$G(\bar{x}, p_n) = F(\underbrace{\partial_{x_1} g|_x , \partial_{x_2} g|_x \ldots \partial_{x_{n-1}} g}_{p}|_x , p_n, z(x), x)$$

(x_0, p_{n0}) : $G(\bar{x}_0, p_{n0}) = 0$

Th funz. impl.

Se $\frac{\partial G}{\partial p_n} \neq 0 \Rightarrow \exists \; h(x) = p_n$ con $h(x_0) = p_{n,0}$

tc. $G(x, h(x)) = 0$

ovvero $F(\partial_{x_1} g \ldots \partial_{x_{n-1}} g , p_n , z(x), x) = 0$

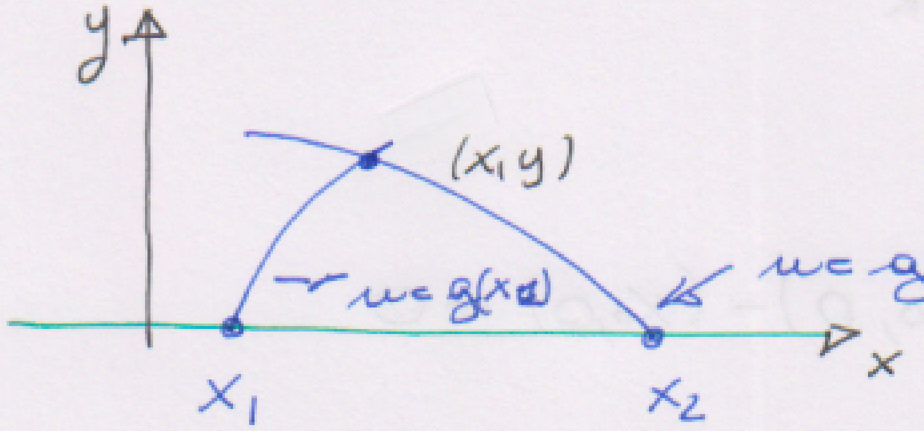
quindi $\bar{p} = (\partial_{x_1} g|_x, \ldots , \partial_{x_{n-1}} g, p_n(x))$ é c.I.

valida del prob. di Cauchy.

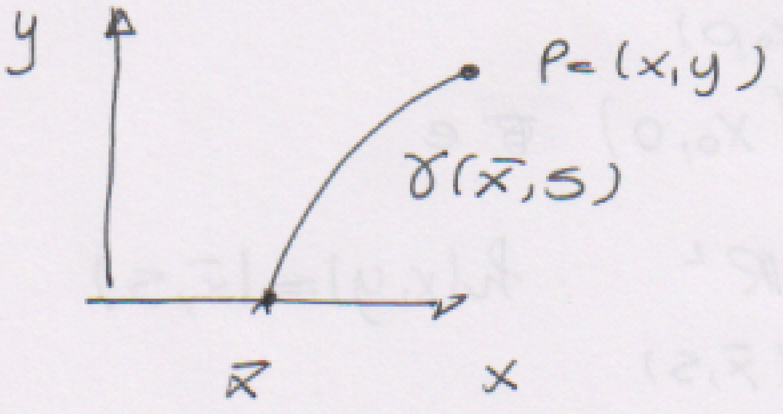
Metodo delle caratt. e problema di invertib.: intersezione delle curve caratteristiche (SHOCK)

Es. eq. $\partial_y u + u\,\partial_x u = 0$ $\quad u = g : y = 0$

$\Rightarrow$ u è costante lungo le caratt.

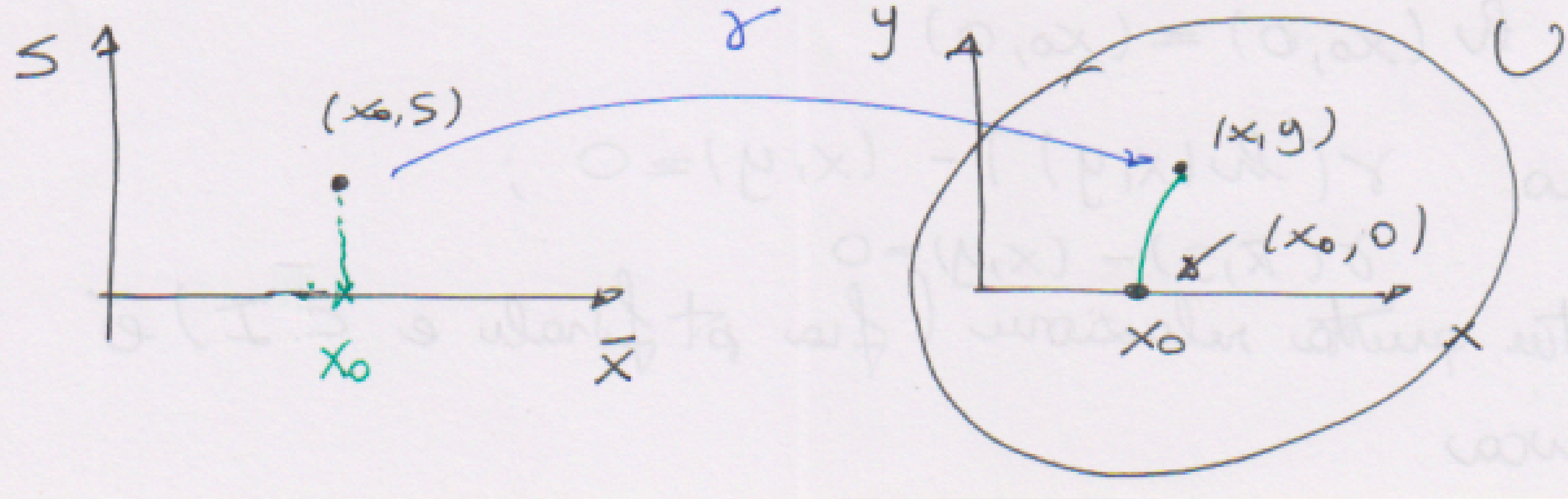


In che condizioni ad un punto $P = (x, y)$ corrisponde una sola caratt. che parte da $\bar{x}$ e raggiunge P per un parametro d'arco s !



$\gamma(\bar{x}, s)$: caratt. che parte da $\bar{x}$ ed ha "lunghezza" s

$\gamma : \underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2 : (\bar{x}, s) \to (x, y)$



Applichiamo Th f. implicita per la f.

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\bar{x} \quad s \quad (x,y) \quad (g_x, g_y)$$

$$G(\bar{x}, s; x, y) = \gamma(\bar{x}, s) - (x, y)$$

prendiamo un pt. $x_0 \in \mathbb{R}$

abbiamo

$$G(\underset{\bar{x}}{\underset{\shortparallel}{x_0}}, \underset{s}{\underset{\shortparallel}{0}}; \underset{(x,y)}{\underset{\shortparallel}{x_0, 0}}) = \gamma(x_0, 0) - (x_0, 0) = 0$$

Th. funz. implicita afferma che se

$$J G_{(\bar{x}, s)} = \left. \frac{\partial G_i}{\partial(\bar{x}, s)} \right|_{(x_0, 0; x_0, 0)} \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ intorno $U \subset \mathbb{R}^2$ di $(x_0, 0)$ e

una funzione $\underset{(x,y)}{h} : \mathbb{R}^2 \to \underset{(\bar{x}, s)}{\mathbb{R}^2}$: $h(x,y) = (\bar{x}, s)$

$\forall (x,y) \in U$

t.c. $G(h(x,y), x, y) = 0 = G((x_0, 0), (x_0, 0))$

con $h(x_0, 0) = (x_0, 0)$

ovvero $\gamma(h(x,y)) - (x,y) = 0$;
$\gamma(\bar{x}, s) - (x,y) = 0$

inoltre questa relazione (fra pt finale e c. I) è unica

Calcoliamo $\underset{(\bar{x},s)}{JG}$

$$G = \gamma(\bar{x}, s) - (x, y) = (G_x, G_y)$$

$$G_x = \gamma_x(\bar{x}, s) - x$$

$$G_y = \gamma_y(\bar{x}, s) - y$$

$$\underset{(\bar{x},s)}{JG} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial G_y}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial G_x}{\partial s} & \frac{\partial G_y}{\partial s} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial \bar{x}} \qquad \frac{\partial G_y}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial \bar{x}}$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial s} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial s} \xrightarrow{\dot{\gamma} = \nabla_p F} \frac{\partial F}{\partial p_x}$$

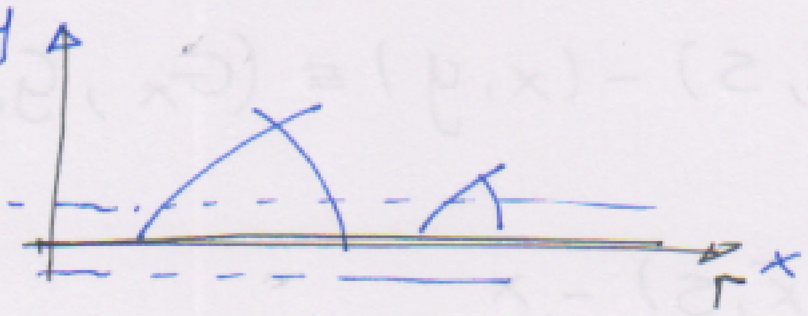
$$\frac{\partial G_y}{\partial s} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial p_y}$$

$$JG = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \gamma_y}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \gamma_x}{\partial s} & \frac{\partial \gamma_y}{\partial s} \end{pmatrix} \overset{(\bar{x},s)=(x_0,0)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left.\frac{\partial F}{\partial p_x}\right|_{(x_0,0)} & \left.\frac{\partial F}{\partial p_y}\right|_{(x_0,0)} \end{pmatrix}$$

Abbiamo usato $\gamma(\bar{x}, s) \overset{\text{sv. } 1^\circ \text{ ordine}}{\simeq} (\bar{x}, 0) + s\,\dot{H}(\bar{x}, 0)$

otteniamo la relazione che garantisce l'assenza di shock in un intorno di ogni $x_0 \in \Gamma$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial p_y}\right|_{\bar{x}\in\Gamma} \neq 0$$



NOTA: come nell'eserc. precedente, questa condizione può essere verificata direttamente una volta che le caratt. sono ~~state~~ calcolate

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x_0,S)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial S} & \frac{\partial y}{\partial S} \end{pmatrix} \equiv \nabla_{(\bar{x},S)} G$$

Il risultato precedente si generalizza a $\mathbb{R}^n$ in maniera diretta: detto $\Gamma = \{x_n = 0\}$, se vale la condizione

$$\left.\frac{\partial F}{\partial p_n}\right|_{x_0\in\Gamma} \neq 0 \implies \forall x \in U \subset \mathbb{R}^n \quad U \text{ intorno di } x_0$$

$\exists$ una unica curva che parte da un certo $\bar{x} \in \Gamma$

t.c. $\gamma(\bar{x}, S) = x$ con $S \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

Interpretazione geometrica del metodo delle caratteristiche:

caso eq. semilineari in $\mathbb{R}^2$

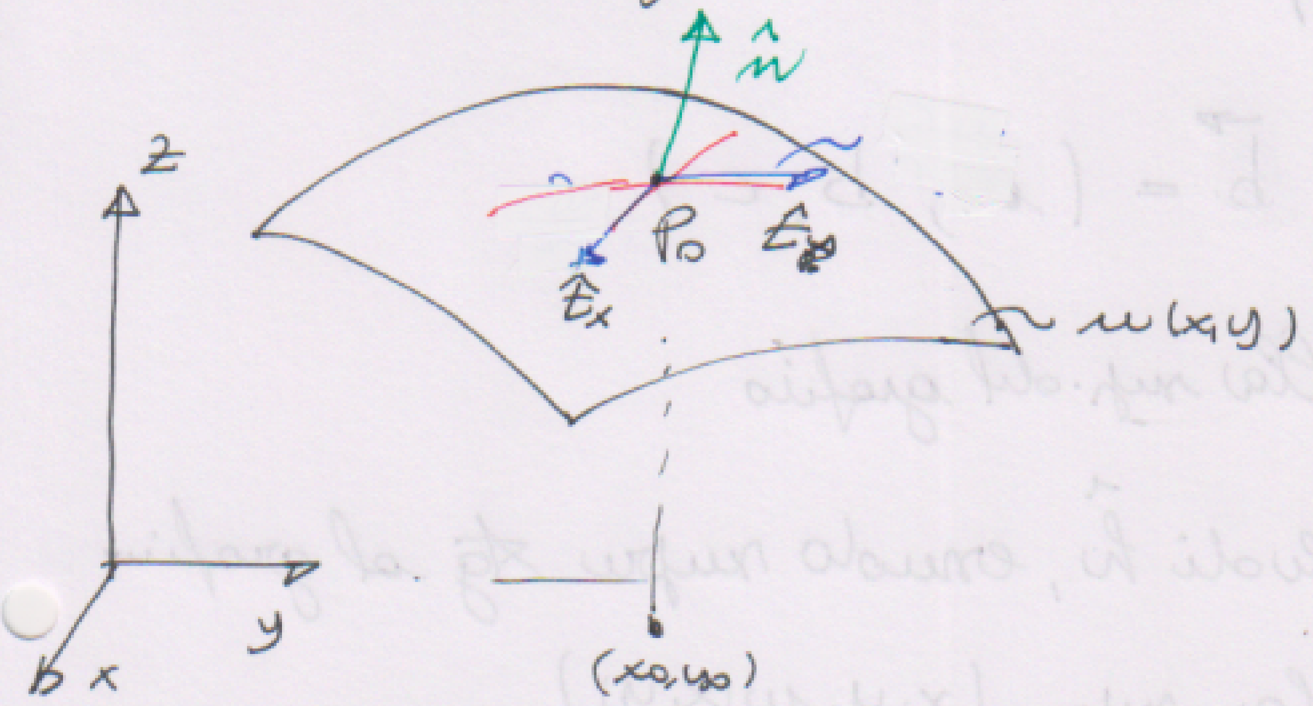
(1)

Consideriamo l'eq. $\underbrace{a(x,y,u)\,\partial_x u + b(x,y,u)\,\partial_y u = c(u,x,y)}_{\text{SEMILINEARE}}$

$$F = a p_x + b p_y - c = 0$$

Immag. di aver risolto l'eq. ed aver trovato $u(x,y)$

consideriamo il grafico di u in $\mathbb{R}^3$: $(x, y, z = u(x,y))$



$P_0 : (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$

Determiniamo la direz. normale alla sup.

Costruiamo 2 vettori tg al grafico passanti per P_0

$$P(t) = (x_0+t,\ y_0,\ u(x_0+t, y_0))$$

$$\hat{t}_{x_{P_0}} = \frac{d}{dt} P(t) = \left(1,\ 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,P_0)}\right)$$

analog. $P_2(t) = (x_0, y_0+t, u(x_0, y_0+t))$

$$\hat{t}_{g,P_0} = \frac{d}{dt} P_2(t) = \left(0, 1, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0} \right)$$

$$\hat{n} = \hat{t}_x \wedge \hat{t}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \partial_x u \\ 0 & 1 & \partial_y u \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath}(-\partial_x u) + \hat{\jmath}(-\partial_y u) + \hat{k} = (-\partial_x u, -\partial_y u, 1)$$

L'equazione (1) può essere scritta

$\hat{n} \cdot \vec{h} = 0$ con $\vec{h} = (a, b, c)$

$\hat{h} \in$ piano tg. della sup. del grafico

Una curva integrale di $\hat{h}$, essendo sempre tg al grafico rimarrà dentro la sup. $(x, y, u(x,y))$

Curva integ. γ t.c.

$$\mathring{\gamma} = h \Rightarrow \mathring{\gamma}_x = a = \frac{\partial F}{\partial p_x}$$

$$\mathring{\gamma}_y = b = \frac{\partial F}{\partial p_y}$$

$$\mathring{z} = \mathring{\gamma}_z = c = \vec{p} \cdot \nabla_p F$$