Integrazione multipla in \mathbb{R}^2 (Integrali doppi) -parte 2-

Luca Bisconti



Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli

Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Integrali lappi

Cor effettusse il colcolo di un integrale doppio è possibile usse, sotto opportune iputasi, il seguente visultate de permette Li passare dell'integrazione su K= CerdJx EcodJ e due successive integrazione sumplici:

Integrali lappi

Per effetture il colcolo di un integrale doppio è possibile usse, sotto opportune ipolesi, il seguante visultate de permette di pessere dell'integrazione su K=Ce13]x [C1,d] e due successive integrazione sumplici:

Teoreme D Fubini (per gli imbegali doppi)

Sie f une tunzione rezle lable verizbili (x,y) definite (.1 veltungolo K= [e1] x [G]) (ovvero f: K-> K, R=(x,y)-> f(x,y)). Allon, "quand he kur", risulta:

$$\iint_{\mathbb{R}} \xi(x,\lambda) \, f \times f \lambda = \int_{\mathbb{R}}^{6} \left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x,\lambda) \, f^{2}}_{\mathbf{x}} \right) \, f \times \tag{I}$$

Integrali lappi

Per effetture il colcolo di un integrale doppio è possibile usse, sotto opportune ipulesi, il seguante visultate de pumette Li pessere dell'integrazione su K= Ce13]x Ec1d] e due successive integrazione sumplici:

Teoreme D Fubini (per gli imbegali doppi)

Sie f une tunzione rezle lable verizbili (x,y) definite (1) veltungolo K = [e1] x [G]) (ovvero f: K -> K, R > (x,y) -> f(x,y)). Allor, "quand he kue", risulte:

$$\left(\iint_{\mathbb{R}} f(x, \lambda) \, f$$

Integrali dappi

Per effetture il colcolo di un integrale doppio è possibile usse, sotto opportune ipulesi, il seguante visultate de pumette Li pessere dell'integrazione su K= Ce13]x Ec1d] e due successive integrazione sumplici:

Teoreme D Fubini (per gli integali doppi)

Sie f une tunzione rezle delle verizbili (x,y) de finite (il rettengolo K= [e1] x [c1]) (ovuero f: R -> K, R > (x,y) -> f(x,y)). Allor, "quando he kuis", risulte:

$$\left(\iint_{\mathbb{R}} \xi(x,\lambda) \, f \times f \lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\xi(x,\lambda)}_{\mathbb{R}} f \times f \lambda \right) \, d\lambda \right) \tag{I}$$

In sosterize il teoreme li Fubini alterne che è possibile calche l'integrale oppis di f(x,s) Su $K = \text{TerbJ} \times \text{EctJ}$ è possibile, in basa alla formula (I), prime integrare in Cctd le fourzione f(x,y) rispetto alla variabile y ottenendo così una funzione $x \mapsto g(x) = \int_{c}^{c} f(x,y) dy$

ed integere poi x -> g(x) sull intervalle [216] rispetto alla variabile x.

ed integere you $x \mapsto g(x)$ sull'intervalle to 163. In manica simile, "quando the cause", possione usare le formula (3) on le quale si integra prime in to 163 (a fusione f(x,y)) wis patter alle usoiabile x, ottenende asi une funcione $y \mapsto h(y) = \int_{e}^{e} f(x,y) dx$ and intipare successivements $y \mapsto h(y)$ well intervalle to 13 rispetto alla variabile x.

ed integere you $x\mapsto g(x)$ sull'intervalle to 16). In manica simile, "quende the course", possione usax le promula (3) can le quale si integer promue a to 12) le fusione f(x,y) to 3 yelle variable x, offenende casi une fusione $y\mapsto h(y)=\int_{\epsilon}^{b}f(x,y)\,dx$ and integer successions with $y\mapsto h(y)$ mall'intervalle to 13 rispetto alla variabile x.

· Con l'affermazione "quenob he sense" ci ni kajeno el fatto che siano verificate la ipolosi che garantesseno che gli integrali semplici in gios siano ben dafinite.

(se f è continue co je >> smodefinite gli integrali in (I))

(E)

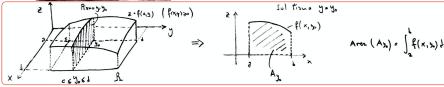
ed integer poi x -> g(x) sull'internallo [alb]. In manica simile, "quendo ha comeso", possiono usare le formule (1) au le quele si intègre prime in cell le furisone f(x,y) rispetto elle voniabile x, ottenendo così une funciona y -> MO)= (flx,5) dx ed intigene Successivemente y -> kg) well' intuals [al] rispetto alla variabile y.

· Com l'affermezione "quendo ha senso" ci ni kajeno el fetto de sieno verificate le ipobse che jarantesseno che gli integali semplice in gros sieno ben definite.

The 1.0 (1.1 1 11): (se f è contenue co 1/2 => sono definite gli intigali in (2))

e (3)

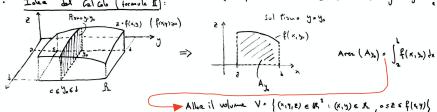
· I de a del Gol Go (formule II):



ed integer poi x -> g(x) sull'internallo [e16]. In manica simile, "quendo ha comeso", possiono usare le formule (1) au le quele si intègre prime in cell le furione f(x,y) rispetto elle vonabile x, ottenende così une funcione y -> ho(9) = [f(x,y) dx ed intigene successionmente y -> h(y) mell' intralb [al] rispetto alla variabile y.

· Com l'affermezaione "quendo he semo" ci ni kaiema al fatto de sieno venna ipolosi de garantessemo de gli integrali semplici in gios sieno ben definite.

(se f è suturve co se a) sura definite gli integrali in (2)



pro essere col Glato come "somme telle are (Ay) et virian di y= yo
tre c e d, cioè come l'integrale:

[f d x d) . [(f (x,y) d x) dy]

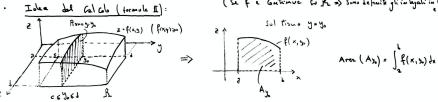
ed integer poi $x\mapsto g(x)$ sull'intervalle [a16]. In manica simile, "quando ha cause", possime usar le formula (3) on le quale si integra porme la [a12] (e funcione f(x,y) trispetto elle usoràbile x, ottenende casì une funcione $y\mapsto h(y)=\int_{a}^{b}f(x,y)\,dx$ and integra successivamente $y\mapsto h(y)$ mell'intervalle [a1] rispetto alla variabile x.

· Com l'affermezione "quenob he sens" ci rikajem el fetto de sieno verificate le ipolisi de generatione de gli integrali semplica in gios sieno ben definita.

· Idea del Colo (formule II):

(Se f è Guturure cu se es sur definita gli integrali in (II)

(1) l'ima yeyo



Alba il volume V = {(x,y,e) \in R^2: (x,y) \in X, 0.52 \in f(x,y)\}

pro essere coldiste come "somme telle see Ay, at soiene ti yay,

the c e d, cioc come l'integate:

If \(\frac{1}{2} \text{ the c} \) = \int \(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ (x,y) dx} \) dy

If \(\text{Continue in } \text{ R} \) = \int \(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ (x,y) dx} \) dy

12

Esempio

Sie $R = [0,1] \times [2,3]$ il rettangolo consiolerato. Consiolerato $f:R \to R$ definite de $f(x,y) \cdot x^{2}y$ ((he à chiaramente continue su st.) e calcoliano: $\iiint_{R} x^{2}y \, dx \, dy$

Esempio

Sie R = [0,1]x [2,3] il rellanzolo ansioleato. Consioleriemo
$$f:R \longrightarrow R$$
 delimite de $f(R_3) \cdot x^4y$ ((he à chiaramente antimve so K) e calculiano:
$$\iiint_{R} x^4y \ dx \ dy$$

Esempio

Sie $R = [0,1] \times [2,3]$ il rettaugob consiolento. Consiolentomo $f:R \longrightarrow R$ definite de f(xy). X'y ((he à chianamente cutimue su st.) e colchiano: $\iint_{\mathbb{R}^d} x^{\ell} y \, dx \, dy$

Applicand it tereme to Foliai (formule (I)) abbisons de:

$$\iint_{\mathcal{R}} x^{2} y dx dy = \int_{0}^{1} \left(\int_{1}^{2} x^{2} y dy \right) dx = \int_{1}^{1} \left(\frac{x^{2}}{2} y^{2} \right)_{y=1}^{y=2} dx = \int_{1}^{1} \frac{x^{2}}{2} (y-4) dx = \frac{5}{2} \int_{1}^{1} x^{2} dx = \frac{5}{2}$$

· Aolesso voglique estendere le mozione di integrale leppis zel insiemi che non sione vettengoli Con i leti palleli ogli ossi Corolineti. Dato un insieme A di \mathbb{R}^4 c data $f:A \to \mathbb{R}$, considerimo le frazione $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de finite le: $\widehat{f}(x_1y) = \begin{cases} f(x_1y) & \in (x_1y) \in A, \\ 0 & \in (x_1y) \notin A, \end{cases}$

tale Pun xione si Chiame estensione Stanolard Li f (relative ad A).

Esempio

Sie $R = [0,1] \times [2,3]$ il rettoujolo Gusiolexto. Gusiolextour $f:R \longrightarrow R$ definite de $f(x,y) = x^{k}y$ ((he à chiarment outine su K) e cololiseur: $\int \int x^{k}y \, dx \, dy$

Applicated it tereme to Foliai (formule (I)) alliano de:

$$\iint_{\mathbb{R}} x^{2} dx dy = \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{2} x^{2} y dy \right) dx = \int_{0}^{1} \left(x^{2} \frac{y^{2}}{2} \right)_{y=1}^{y=2} dx = \int_{0}^{1} \frac{x^{2}}{2} (y-4) dx = \frac{5}{2} \int_{0}^{1} x^{2} dx = \frac{5}{2} \int_$$

· Abbesso voylique estender le motione de integrale leppis ed insiemi de mon sione rettengoli Con i lete palleli egliossi Corolineti. Deto un insieme A de 18° c data $f:A \rightarrow 18$, considerimo le funcione $f:18^{2} \rightarrow 18$ definite le: $f(x_{1}y) = \begin{cases} f(x_{1}y) & \text{if } (x_{1}y) \in A, \\ 0 & \text{if } (x_{1}y) \notin A, \end{cases}$

tale funcione si chiame estensione stanolard Lif (relative 2014).

. Sie (X19) -> f(X19) une fun sione de duc verietili definite in un sottoinieme <u>limitete</u> A de 18th. Considerieme un (erbitrario) rettengolo La Contenente A. Allore direme ch f è integabile in A se à integabile in R le sur estansione standard \widehat{f} .

In tal Gase l'integale 12 f in A si definise met mode sequente: $\iint_A f(x,y) \, dx \, dy := \iint_R \widehat{f}(x,y) \, dx \, dy. \tag{III}$

f à integatib in A se à integatib in R le sur estensione stenoterol \widehat{f} .

In tal Gaso l'integate D f in A si definise met mode sequente: $\iint f(x,y) \, dx \, dy := \iint \widehat{f}(x,y) \, dx \, dy. \qquad (TI)$

D21 bits ch f e mulle provi dell'in sieme A si può beolure che il secondo in Figule melle francole (III) mon dependo nole dol rettengolo K contemente A. Quinoli le behinizzone in (III) è ben poste (ce si prenobro due distinti rettengolo K, e Retoli Che A & K, e A & K, , K, 7 K2, ebbieno che si findo si fi del si fi

f à integatib in A se à integatib in R le sue estensione stenoterol \widehat{x} .

In tel ceso l'integate D f in A si D thinise net mode sequente: $\iint_A f(x_i,y) \, dx \, dy := \iint_R \widehat{x}(x_i,y) \, dx \, dy. \tag{III}$

Del bito che fè e molle bossi dell'in sième A si poi beolore che il secondo in Figule melle francole (III) mon dipendo nole del rettengolo K contenente A. Quinoli le de hinizione In (III) à ben poste (ce si prenolono due distinti rettengolo K, e Retolic Che A = K, e A = K, K, 7 K, e bbieno che II f delg= II f dedg)

The che A = K, e A = K, K, 7 K, 1 K, ebbieno che II f delg= II f dedg)

Definizione

Um bottoinsieure A do Mt si dia misorabile (secondo Peaus- Jordan) quando è integrabile in A le pursone f(x,y)=1. In tel coso le misure (biolimensionale di A), dette zvez di A, è il numero:

f à integabile in A se à integabile in R le sue estensione stenolerol \widehat{f} .

In tal sess l'integale de f in A si definise met mode soyuents: $\iint f(x,y) \, dx \, dy := \iint \widehat{f}(x,y) \, dx \, dy. \qquad (III)$

Del pto che fi e mulle promi dell'in siene A si pri beologie che il secondo in Figale melle france (III) mon dipendo unh del pettengolo K contenente A. Quinoli le de più sione In (III) è ben poste (se si prenobro due distinti rettengolo K, e Retoli che A = R, e A = K, K, ‡ K, ebbieno che II f dely= II f dedy)

De fi<u>mi zione</u>

Um bottoinsieure A do 185 si dia misorabile (secundo Peaus- Jordan) quando è integabile in A le fouzione f(x17)=1. In tel seso le misore (biolimensionele d A), dette evez le A, è il momero:

Osservaisme: si può provere cle un sollainsieme limitetà A è misurabile () le sus frontiere à trescuabile. Ad esempio è maisurabile un inssenne le cui frontiere à unione timite d'gresici (y-pa) o x-p(y) di punsioni cartique.

Alane populate tell'integale typis:

2. Proprietà li limentà: Siemo f. 8: A→R fourioni integrabili in un insiema limitato A ∈ R
e Siemo X, M ∈ VB. Allon n'iulte che:
 \[
\iiii (\lambda \f(\pi_1\pi_1) + \mu g(\pi_1\pi_1)) \, \dagger \frac{1}{2} \, \dagger \frac{

Alane populate dell'integrale depois:

Proprietè Li limerate : Siono f, g: A→B fonzioni integrabili in un insiema limitato A GR^t
 e siono X, M ∈ Uh · Allon n'iulte che:

2. $\frac{p_0p_0'eta'}{k}$ by monotonie: Siamo $f_1g:A \rightarrow B$ functional integrabilities on instance limitals Ask e supportant $f(x_{i,j}) \leq g(x_{i,j}) + \xi(x_{i,j}) = A$. Alba visult: $\iint_A f(x_{i,j}) dx dy \leq \iint_A g(x_{i,j}) dx dy$

Alone populate bell'integrale typis:

4. Proprietà di limerate : Siamo f.g: A→R fouzioni integrabili in un insieme limitato A ERL e Siamo X, M ∈ VB . Allon n'iulte che:

2. <u>Paprietà le monstruie</u>: Siemo f.g. A -> 18 fouzeburi integrabili in un insieme limiteto Asset e suppuniero f(x,y) & g(x,y) + (x,y) e A. Alba visulte:

3. Proprietà Li edditività (rispetto all'insieme di integratione): Supposizione cle f sie une funcione integrabile sie in un insieme A cle in un insieme B, com ARB = \$\phi\$ (or, \$\phi^2\$) in genere, ARB trassurbile). Allon f è integrabile in AUB a si he cle i