Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi) -parte 2-

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/04/2020

Integrali doppi

Per effettuare il calcolo di un integrale doppio è possibile usare, sotto opportune ipotesi, il seguente risultato che permette di passare dall'integrazione su $\boxed{K = [a,b] \times [c,d]}$ a due successive integrazioni semplici:

Integrali doppi

Per effettuare il calcolo di un integrale doppio è possibile usare, sotto opportune ipotesi, il seguente risultato che permette di passare dall'integrazione su $R = [a,b] \times [c,d]$ a due successive integrazioni semplici:

Teorema di Fubini (per gli integrali doppi)

Sia f una funzione reale delle variabili (x,y) definita sul rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$ (ovvero $f : R \to \mathbb{R}$, $R \ni (x,y) \mapsto f(x,y)$). Allora, "quando ha senso", risulta:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{=g(x)} \Big)\,dx \qquad (\mathrm{I})}$$

Integrali doppi

Per effettuare il calcolo di un integrale doppio è possibile usare, sotto opportune ipotesi, il seguente risultato che permette di passare dall'integrazione su $R = [a,b] \times [c,d]$ a due successive integrazioni semplici:

Teorema di Fubini (per gli integrali doppi)

Sia f una funzione reale delle variabili (x,y) definita sul rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$ (ovvero $f : R \to \mathbb{R}$, $R \ni (x,y) \mapsto f(x,y)$). Allora, "quando ha senso", risulta:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{=g(x)} \Big)\,dx \qquad \text{(I)}$$

$$\boxed{\left(\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{=h(y)} \Big)\,dy \right)} \qquad \text{(II)}$$

Integrali doppi

Per effettuare il calcolo di un integrale doppio è possibile usare, sotto opportune ipotesi, il seguente risultato che permette di passare dall'integrazione su $R = [a,b] \times [c,d]$ a due successive integrazioni semplici:

Teorema di Fubini (per gli integrali doppi)

Sia f una funzione reale delle variabili (x,y) definita sul rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$ (ovvero $f : R \to \mathbb{R}$, $R \ni (x,y) \mapsto f(x,y)$). Allora, "quando ha senso", risulta:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{=g(x)} \Big)\,dx \qquad (I)$$

$$\left(\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{=h(y)} \Big)\,dy \right) \qquad (II)$$

In sostanza il teorema di Fubini afferma che è possibile calcolare l'integrale doppio di $f(x,y)$ su $R = [a,b] \times [c,d]$ è possibile, in base alla formula (I), prima integrare in $[c,d]$ la funzione $f(x,y)$ rispetto alla variabile y ottenendo così una funzione $x \mapsto g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

ed integrare poi $x \mapsto g(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ rispetto alla variabile x.

ed integrare poi $x \mapsto g(x)$ sull'intervallo $[a,b]$. In maniera simile, "quando ha senso", possiamo usare la formula (II) con la quale si integra prima in $[a,b]$ la funzione $f(x,y)$ rispetto alla variabile x, ottenendo così una funzione $y \mapsto h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ ed integrare successivamente $y \mapsto h(y)$ nell'intervallo $[c,d]$ rispetto alla variabile y.

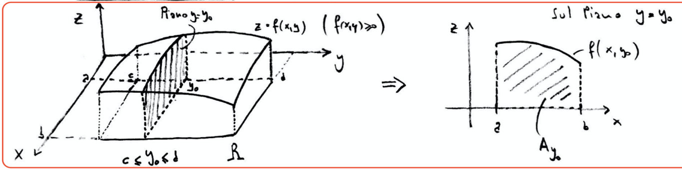
ed integrare poi $x \mapsto g(x)$ sull'intervallo $[a,b]$. In maniera simile, "quando ha senso", possiamo usare la formula (II) con la quale si integra prima in $[a,b]$ la funzione $f(x,y)$ rispetto alla variabile x, ottenendo così una funzione $y \mapsto h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ ed integrare successivamente $y \mapsto h(y)$ nell'intervallo $[c,d]$ rispetto alla variabile y.

- Con l'affermazione "quando ha senso" ci riferiamo al fatto che siano verificate le ipotesi che garantiscono che gli integrali semplici in gioco siano ben definiti.

(se f è continua su R $\Rightarrow$ sono definiti gli integrali in (I) e (II))

ed integrare poi $x \mapsto g(x)$ sull'intervallo $[a,b]$. In maniera simile, "quando ha senso", possiamo usare la formula (II) con la quale si integra prima in $[a,b]$ la funzione $f(x,y)$ rispetto alla variabile x, ottenendo così una funzione $y \mapsto h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ ed integrare successivamente $y \mapsto h(y)$ nell'intervallo $[c,d]$ rispetto alla variabile y.

- Con l'affermazione "quando ha senso" ci riferiamo al fatto che siano verificate le ipotesi che garantiscono che gli integrali semplici in gioco siano ben definiti.
  (se f è continua su R $\Rightarrow$ sono definiti gli integrali in (I) e (II))
- Idea del calcolo (formula II):

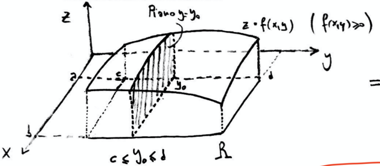


$$\text{Area}(A_{y_0}) = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

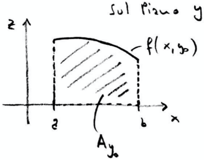
ed integrare poi $x \mapsto g(x)$ sull'intervallo $[a,b]$. In maniera simile, "quando ha senso", possiamo usare la formula (II) con la quale si integra prima in $[a,b]$ la funzione $f(x,y)$ rispetto alla variabile x, ottenendo così una funzione $y \mapsto h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ ed integrare successivamente $y \mapsto h(y)$ nell'intervallo $[c,d]$ rispetto alla variabile y.

- Con l'affermazione "quando ha senso" ci riferiamo al fatto che siano verificate le ipotesi che garantiscono che gli integrali semplici in gioco siano ben definiti. (Se f è continua su $R \Rightarrow$ sono definiti gli integrali in (I) e (II))

- Idea del calcolo (formula II):



$\Rightarrow$



$\text{Area}(A_{y_0}) = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$

Allora il volume $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$ può essere calcolato come "somma" delle aree (A_{y_0}) al variare di $y = y_0$ tra c e d, cioè come l'integrale:

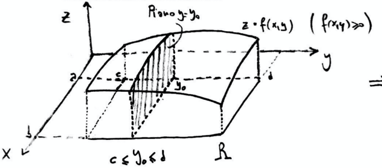
$$\boxed{\iint_R f\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy}$$

ed integrare poi $x \mapsto g(x)$ sull'intervallo $[a,b]$. In maniera simile, "quando ha senso", possiamo usare la formula (II) con la quale si integra prima in $[a,b]$ la funzione $f(x,y)$ rispetto alla variabile x, ottenendo così una funzione $y \mapsto h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ ed integrare successivamente $y \mapsto h(y)$ nell'intervallo $[c,d]$ rispetto alla variabile y.

- Con l'affermazione "quando ha senso" ci riferiamo al fatto che siano verificate le ipotesi che garantiscono che gli integrali semplici in gioco siano ben definiti.

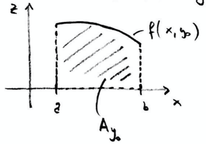
(se f è continua su $R \Rightarrow$ sono definiti gli integrali in (I) e (II))

- Idea del calcolo (formula II):



$\Rightarrow$

Sul Piano $y=y_0$



$$\text{Area}(A_{y_0}) = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

Allora il volume $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$ può essere calcolato come "somma" delle aree A_{y_0} al variare di $y=y_0$ tra c e d, cioè come l'integrale:

$$\iint_R f\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

- $\boxed{f \text{ continua in } R \Rightarrow \iint_R f\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy}$

<u>Esempio</u>

Sia $R = [0,1] \times [2,3]$ il rettangolo considerato. Consideriamo $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 y$ (che è chiaramente continua su R) e calcoliamo:

$$\boxed{\iint_R x^2 y \, dx \, dy}$$

<u>Esempio</u>

Sia $R = [0,1] \times [2,3]$ il rettangolo considerato. Consideriamo $f : R \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 y$ (che è chiaramente continua su R) e calcoliamo:

$$\iint_R x^2 y \, dx \, dy$$

Applicando il Teorema di Fubini (formula (I)) abbiamo che:

$$\iint_R x^2 y \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_2^3 x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=2}^{y=3} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} (9-4) \, dx = \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{5}{6} \blacksquare$$

Esempio

Sia $R = [0,1]\times[2,3]$ il rettangolo considerato. Consideriamo $f: R \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 y$ (che è chiaramente continua su R) e calcoliamo:

$$\iint_R x^2 y \, dx \, dy$$

Applicando il Teorema di Fubini (formula (I)) abbiamo che:

$$\iint_R x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_2^3 x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=2}^{y=3} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}(9-4) \, dx = \frac{5}{2}\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{5}{6} \quad \blacksquare$$

- Adesso vogliamo estendere la nozione di integrale doppio ad insiemi che non siano rettangoli con i lati paralleli agli assi coordinati. Dato un insieme A di $\mathbb{R}^2$ e data $f: A \to \mathbb{R}$, consideriamo la funzione $\hat{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\boxed{\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A, \end{cases}}$$

tale funzione si chiama estensione standard di f (relativa ad A).

Esempio

Sia $R = [0,1]\times[2,3]$ il rettangolo considerato. Consideriamo $f: R \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 y$ (che è chiaramente continua su R) e calcoliamo:

$$\iint_R x^2 y \, dx\, dy$$

Applicando il Teorema di Fubini (formula (I)) abbiamo che:

$$\iint_R x^2 y\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_2^3 x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=2}^{y=3} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}(9-4)\, dx = \frac{5}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{5}{6} \blacksquare$$

- Adesso vogliamo estendere la nozione di integrale doppio ad insiemi che non siano rettangoli con i lati paralleli agli assi coordinati. Dato un insieme A di $\mathbb{R}^2$ e data $f: A \to \mathbb{R}$, consideriamo la funzione $\hat{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A, \end{cases}$$

tale funzione si chiama estensione standard di f (relativa ad A).

- Sia $(x,y) \mapsto f(x,y)$ una funzione di due variabili definita in un sottoinsieme <u>limitato</u> A di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo un (arbitrario) rettangolo R contenente A. Allora diremo che

f è integrabile in A se è integrabile in R la sua estensione standard $\hat{f}$.

In tal caso l'integrale di f in A si definisce nel modo seguente:

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy := \iint_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy.} \qquad \text{(III)}$$

f è integrabile in A se è integrabile in R la sua estensione standard $\hat{f}$.

In tal caso l'integrale di f in A si definisce nel modo seguente:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy := \iint_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy. \qquad \text{(III)}$$

Dal fatto che $\hat{f}$ è nulla fuori dell'insieme A si può dedurre che il secondo integrale nella formula (III) non dipende dal rettangolo R contenente A. Quindi la definizione in (III) è ben posta (se si prendono due distinti rettangoli R_1 e R_2 tali che $A \subseteq R_1$ e $A \subseteq R_2$, $R_1 \neq R_2$, abbiamo che $\iint_{R_1} \hat{f}\,dx\,dy = \iint_{R_2} \hat{f}\,dx\,dy = \iint_A f\,dx\,dy$)

f è integrabile in A se è integrabile in R la sua estensione standard $\hat{f}$.

In tal caso l'integrale di f in A si definisce nel modo seguente:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy := \iint_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy. \qquad \text{(III)}$$

Dal fatto che $\hat{f}$ è nulla fuori dell'insieme A si può dedurre che il secondo integrale nella formula (III) non dipende dal rettangolo R contenente A. Quindi la definizione in (III) è ben posta (se si prendono due distinti rettangoli R_1 e R_2 tali che $A \subseteq R_1$ e $A \subseteq R_2$, $R_1 \neq R_2$, abbiamo che $\iint_{R_1} \hat{f}\,dx\,dy = \iint_{R_2} \hat{f}\,dx\,dy = \iint_A f\,dx\,dy$)

Definizione

Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) quando è integrabile in A la funzione $f(x,y) \equiv 1$. In tal caso la misura (bidimensionale di A), detta area di A, è il numero:

$$\mu(A) = \iint_A 1\,dx\,dy$$

f è integrabile in A se è integrabile in R la sua estensione standard $\hat{f}$.

In tal caso l'integrale di f in A si definisce nel modo seguente:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy := \iint_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy. \qquad \text{(III)}$$

Dal fatto che $\hat{f}$ è nulla fuori dell'insieme A si può dedurre che il secondo integrale nella formula (III) non dipende dal rettangolo R contenente A. Quindi la definizione in (III) è ben posta (se si prendono due distinti rettangoli R_1 e R_2 tali che $A \subseteq R_1$ e $A \subseteq R_2$, $R_1 \neq R_2$, abbiamo che $\iint_{R_1} \hat{f}\,dx\,dy = \iint_{R_2} \hat{f}\,dx\,dy = \iint_A f\,dx\,dy$)

<u>Definizione</u>

Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) quando è integrabile in A la funzione $f(x,y) \equiv 1$. In tal caso la misura (bidimensionale di A), detta area di A, è il numero:

$$\mu(A) = \iint_A 1\,dx\,dy$$

<u>Osservazione</u>: Si può provare che un sottoinsieme limitato A è misurabile $\Longleftrightarrow$ la sua frontiera è trascurabile. Ad esempio è misurabile un insieme la cui frontiera è unione finita di grafici ($y=\phi(x)$ o $x=\phi(y)$) di funzioni continue.

Alcune proprietà dell'integrale doppio:

1. Proprietà di linearità: Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili in un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora risulta che:

$$\iint_A (\lambda f(x,y) + \mu\, g(x,y))\, dx\, dy = \lambda \iint_A f\, dx\, dy + \mu \iint_A g\, dx\, dy$$

Alcune proprietà dell'integrale doppio:

1. Proprietà di linearità: Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili in un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora risulta che:

$$\iint_A (\lambda f(x,y) + \mu\, g(x,y))\, dx\, dy = \lambda \iint_A f\, dx\, dy + \mu \iint_A g\, dx\, dy$$

2. Proprietà di monotonia: Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili in un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e supponiamo $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in A$. Allora risulta:

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \leq \iint_A g(x,y)\, dx\, dy$$

Alcune proprietà dell'integrale doppio:

1. Proprietà di linearità: Siano $f, g: A \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili in un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora risulta che:

$$\iint_A (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\, dx\, dy = \lambda \iint_A f\, dx\, dy + \mu \iint_A g\, dx\, dy$$

2. Proprietà di monotonia: Siano $f, g: A \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili in un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e supponiamo $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in A$. Allora risulta:

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \leq \iint_A g(x,y)\, dx\, dy$$

3. Proprietà di additività (rispetto all'insieme di integrazione): Supponiamo che f sia una funzione integrabile sia in un insieme A che in un insieme B, con $A \cap B = \phi$ (o, più in generale, $A \cap B$ trascurabile). Allora f è integrabile in $A \cup B$ e si ha che:

$$\iint_{A \cup B} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy + \iint_B f(x,y)\, dx\, dy$$