Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi) -parte 3-

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Firenze, 14/04/2020

Integrali doppi

Insiemi di integrazione più generali (dei rettangoli): Insiemi regolari

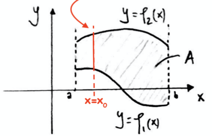
- Si considerano insiemi con la seguente proprietà: presa una retta parallela ad uno degli assi che interseca l'insieme, allora l'intersezione è un unico intervallo.

Integrali doppi

Insiemi di integrazione più generali (dei rettangoli): Insiemi regolari

- Si considerano insiemi con le seguente proprietà: presa una retta parallela ad uno degli assi che interseca l'insieme, allora l'intersezione è un unico intervallo.

Definizione: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme del tipo $\boxed{A = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}}$ dove $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue. Si dice che A è semplice rispetto all'asse delle y (o y-semplice). Infatti ogni retta parallela all'asse y interseca in un unico intervallo l'insieme A: tale intervallo ha estremi $f_1(x)$, $f_2(x)$, per $x \in [a,b]$

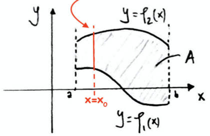


Integrali doppi

Insiemi di integrazione più generali (dei rettangoli): Insiemi regolari

- Si considerano insiemi con la seguente proprietà: presa una retta parallela ad uno degli assi che interseca l'insieme, allora l'intersezione è un unico intervallo.

Definizione: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme del tipo $\boxed{A = \{(x,y) : a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}}$ dove $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue. Si dice che A è semplice rispetto all'asse delle y (normale rispetto all'asse x). Infatti ogni retta parallela all'asse y interseca in un unico intervallo l'insieme A: tale intervallo ha estremi $f_1(x)$, $f_2(x)$, per $x \in [a,b]$

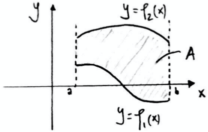


Integrali doppi

Insiemi di integrazione più generali (dei rettangoli): Insiemi regolari

- Si considerano insiemi con la seguente proprietà: presa una retta parallela ad uno degli assi che interseca l'insieme, allora l'intersezione è un unico intervallo.

Definizione: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme del tipo $A = \{(x,y) : a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ dove $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue. Si dice che A è semplice rispetto all'asse delle y (o y-semplice). Infatti ogni retta parallela all'asse y interseca in un unico intervallo l'insieme A: tale intervallo ha estremi $f_1(x)$, $f_2(x)$, per $x \in [a,b]$



Supponiamo adesso che $f = f(x,y)$ sia integrabile in A (come sopra). Dato un rettangolo R contenente A, allora per definizione, l'integrale di f su A è:

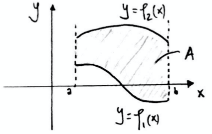
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy \quad (\mathrm{I})$$

Integrali doppi

Insiemi di integrazione più generali (dei rettangoli): Insiemi regolari

- Si considerano insiemi con la seguente proprietà: presa una retta parallela ad uno degli assi che interseca l'insieme, allora l'intersezione è un unico intervallo.

Definizione: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme del tipo $A = \{(x,y) : a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ dove $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue. Si dice che A è semplice rispetto all'asse delle y (o y-semplice). Infatti ogni retta parallela all'asse y interseca in un unico intervallo l'insieme A: tale intervallo ha estremi $f_1(x)$, $f_2(x)$, per $x \in [a,b]$



Supponiamo adesso che $f = f(x,y)$ sia integrabile in A (come sopra). Dato un rettangolo R contenente A, allora per definizione, l'integrale di f su A è:

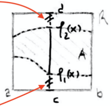
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy \quad (\mathrm{I})$$

- Per quanto già osservato in precedenza, l'integrale in (I) non dipende dal rettangolo R contenente A. Per semplicità prendiamo $R = [a,b] \times [c,d]$ con $c \le \min\{f_1(x) : x \in [a,b]\}$ e in maniera simile $d \ge \max\{f_2(x) : x \in [a,b]\}$. Dal teorema di Fubini segue che:

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy \right) dx} \quad (\mathrm{II})$$

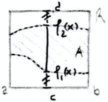
D'altra parte, per l'additività degli integrali di funzioni di una variabile rispetto agli intervalli segue che:

$$\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \boxed{\underbrace{\int_c^{\varphi_1(x)} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0}} + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x,y)\,dy + \boxed{\underbrace{\int_{\varphi_2(x)}^{d} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0}}$$



D'altra parte, per l'additività degli integrali di funzioni di una variabile rispetto agli intervalli segue che:

$$\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \underbrace{\int_c^{f_1(x)} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0} + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \hat{f}(x,y)\,dy + \underbrace{\int_{f_2(x)}^{d} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0}$$

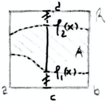


Poiché $\hat{f}$ è nulla fuori di A segue che:

$$\boxed{\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \hat{f}(x,y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } A \\ \hat{f} \text{ e } f \text{ coincidono}}}{=} \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy} \quad (\mathrm{III})$$

D'altra parte, per l'additività degli integrali di funzioni di una variabile rispetto agli intervalli segue che:

$$\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \underbrace{\int_c^{\varphi_1(x)} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0} + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x,y)\,dy + \underbrace{\int_{\varphi_2(x)}^{d} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0}$$



Poiché $\hat{f}$ è nulla fuori di A segue che:

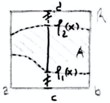
$$\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x,y)\,dy \underset{\substack{\text{in } A \\ \hat{f} \text{ e } f \text{ coincidono}}}{=} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad (\mathrm{III})$$

Quindi usando insieme (II) e (III) otteniamo la seguente formula di riduzione (per gli insiemi semplici rispetto all'asse y):

$$\boxed{\iint_A f(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \underset{\substack{\text{o più} \\ \text{semplicemente}}}{=} \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx} \quad (\underline{\mathrm{IV}})$$

D'altra parte, per l'additività degli integrali di funzioni di una variabile rispetto agli intervalli segue che:

$$\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \underbrace{\int_c^{\varphi_1(x)} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0} + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x,y)\,dy + \underbrace{\int_{\varphi_2(x)}^{d} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0}$$



Poiché $\hat{f}$ è nulla fuori di A segue che:

$$\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x,y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } A \\ \hat{f} \text{ e } f \text{ coincidono}}}{=} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad \text{(III)}$$

Quindi usando insieme (II) e (III) otteniamo la seguente formula di riduzione (per gli insiemi semplici rispetto all'asse y):

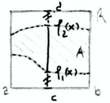
$$\iint_A f(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{o più} \\ \text{semplicemente}}}{=} \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{(IV)}$$

Analogamente

Definizione: se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme del tipo $A = \{(x,y) : c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ dove $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, allora A si dice semplice rispetto all'asse x (o x-semplice). Ogni retta parallela all'asse x interseca A in un intervallo di estremi $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$

D'altra parte, per l'additività degli integrali di funzioni di una variabile rispetto agli intervalli segue che:

$$\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \underbrace{\int_c^{\varphi_1(x)} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0} + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x,y)\,dy + \underbrace{\int_{\varphi_2(x)}^{d} \hat{f}(x,y)\,dy}_{=0}$$



Poiché $\hat{f}$ è nulla fuori di A segue che:

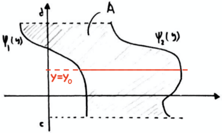
$$\int_c^d \hat{f}(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \hat{f}(x,y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } A \\ \hat{f} \text{ e } f \text{ coincidono}}}{=} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad (\mathrm{III})$$

Quindi usando insieme (II) e (III) otteniamo la seguente formula di riduzione (per gli insiemi semplici rispetto all'asse y):

$$\iint_A f(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{o più} \\ \text{semplicemente}}}{=} \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \quad (\mathrm{IV})$$

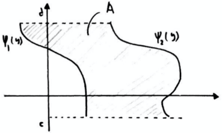
Analogamente

Definizione: se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme del tipo $A = \{(x,y) : c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ dove $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, allora A si dice semplice rispetto all'asse x (normale rispetto all'asse y). Ogni retta parallela all'asse x interseca A in un intervallo di estremi $\psi_1(y), \psi_2(y)$



Se $f = f(x,y)$ è integrabile in A, ragionando come nel caso precedente si ha l'altra formula di risoluzione, valida quando A è semplice rispetto all'asse delle x:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (V)$$

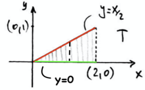


Se $f = f(x,y)$ è integrabile in A, ragionando come nel caso precedente si ha l'altra formula di riduzione, valida quando A è semplice rispetto all'asse delle x:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (\mathrm{V})$$

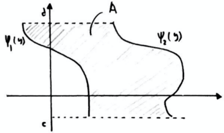
Definizione: Un insieme è semplice se è x-semplice oppure y-semplice.
Un insieme si dice regolare se è unione finita di insiemi semplici.

Esempi



Sia x-semplice che y-semplice

y-semplice $\Rightarrow$ $\boxed{T = \left\{ (x,y) : 0 \le x \le 2 \,,\ \overset{f_1(x)}{\overset{\|}{0}} \le y \le \overset{f_2(x)}{\overset{\|}{\tfrac{x}{2}}} \right\}}$

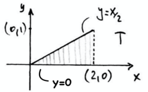


Se $f = f(x,y)$ è integrabile in A, ragionando come nel caso precedente si ha l'altra formula di riduzione, valida quando A è semplice rispetto all'asse delle x:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (\mathrm{V})$$

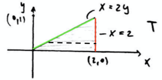
<u>Definizione</u>: Un insieme è <u>semplice</u> se è x-semplice oppure y-semplice.
Un insieme si dice <u>regolare</u> se è unione finita di insiemi semplici.

<u>Esempi</u>

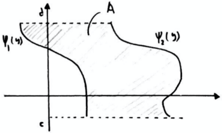


Sia x-semplice che y-semplice

y-semplice $\Rightarrow$ $T = \left\{ (x,y) : 0 \le x \le 2 \,,\; \overset{f_1(x)}{\overset{\shortparallel}{0}} \le y \le \overset{f_2(x)}{\overset{\shortparallel}{\frac{x}{2}}} \right\}$



x-semplice $\Rightarrow$ $\boxed{T = \left\{ (x,y) : 0 \le y \le 1 \,,\; \underset{\psi_1(y)}{\underset{\shortparallel}{2y}} \le x \le \underset{\psi_2(y)}{\underset{\shortparallel}{2}} \right\}}$

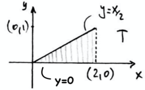


Se $f = f(x,y)$ è integrabile in A, ragionando come nel caso precedente si ha l'altra formula di risoluzione, valida quando A è semplice rispetto all'asse delle x:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (\mathrm{V})$$

<u>Definizione</u>: Un insieme è <u>semplice</u> se è x-semplice oppure y-semplice.
Un insieme si dice <u>regolare</u> se è unione finita di insiemi semplici.

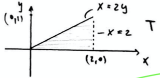
<u>Esempio</u>



Sia x-semplice che y-semplice

$$\text{y-semplice} \Rightarrow T = \Big\{ (x,y) : 0 \le x \le 2,\ \underset{f_1(x)}{\overset{}{0}} \le y \le \underset{f_2(x)}{\frac{x}{2}} \Big\}$$

$$0 = f_1(x), \qquad \frac{x}{2} = f_2(x)$$



$$\text{x-semplice} \Rightarrow T = \{ (x,y) : 0 \le y \le 1,\ 2y \le x \le 2 \}$$

$$2y = \psi_1(y), \qquad 2 = \psi_2(y)$$

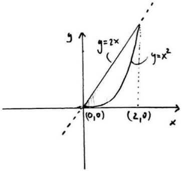
f(x,y) = xy

$$\boxed{\iint_T xy\,dx\,dy \underset{\text{y-semplice}}{=} \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} xy\,dy \right) dx = \int_0^2 x \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=x/2} dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{4} - 0\right) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{8} = \frac{1}{8}\,\frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{16}{4} = \frac{1}{2}}$$ ■

Esempio

Calcoliamo il seguente integrale usando le formule di riduzione:

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 2x\} \qquad f(x,y) = x^2 y}$$

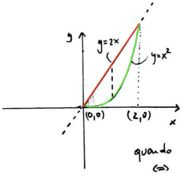


<u>Esempio</u>

Calcoliamo il seguente integrale usando le formule di riduzione:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le 2x\}$$

$$f(x,y)=x^2y$$



quando $x^2=2x$
$\iff x^2-2x=0$
$\iff x(x-2)=0$
$\iff x=0 \text{ o } x=2$

$$\boxed{A:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ x^2\le y\le 2x\}}$$

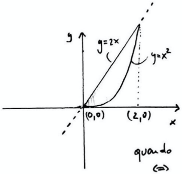
Applichiamo le formule di riduzione con $\boxed{f_1(x)=x^2}$ e $\boxed{f_2(x)=2x}$ e osserviamo (si veda anche il disegno) che $f_1(x)\le f_2(x)$ per $0\le x\le 2$ (quindi, in questo caso, guardiamo il dominio come semplice rispetto all'asse y).

Esempio

Calcoliamo il seguente integrale usando le formule di riduzione:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2\le y\le 2x\}$$

$$f(x,y)=x^2y$$



quando $x^2=2x$

$\iff x^2-2x=0$

$\iff x(x-2)=0$

$\iff x=0 \text{ o } x=2$

$A:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ x^2\le y\le 2x\}$

Applichiamo le formule di riduzione con $f_1(x)=x^2$ e $f_2(x)=2x$ e osserviamo (si veda anche il disegno) che $f_1(x)\le f_2(x)$ per $0\le x\le 2$ (quindi, in questo caso, guardiamo il dominio come semplice rispetto all'asse y). Allora:

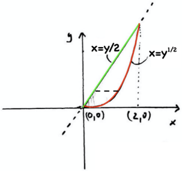
$$\boxed{\iint_A x^2y\,dx\,dy=\int_0^2\left(\int_{x^2}^{2x}x^2y\,dy\right)dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}\left(4x^2-x^4\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}x^5-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2}=\frac{128}{35}}$$

Esempio

Calcoliamo il seguente integrale usando le formule di riduzione:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \le y \le 2x\}$$

$$f(x,y) = x^2 y$$



Applichiamo le formule di riduzione con $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = 2x$ e osserviamo (si veda anche il disegno) che $f_1(x) \le f_2(x)$ per $0 \le x \le 2$ (quindi, in questo caso, guardiamo il dominio come semplice rispetto all'asse y). Allora:

$$\iint_A x^2 y\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} x^2 y\,dy \right) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\left(4x^2 - x^4\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{128}{35}$$

- Si osservi che: $\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 4, \ y/2 \le x \le y^{1/2}\}}$ e prendendo $\boxed{\psi_1(y) = y/2}$ e $\boxed{\psi_2(y) = y^{1/2}}$ allora

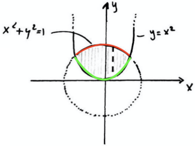
$$\boxed{\iint_A x^2 y\,dx\,dy = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{y^{1/2}} x^2 y\,dx \right) dy = \frac{1}{3}\int_0^4 y\left(y^{3/2} - y^3/8\right) dy = \frac{1}{24}\left(16\frac{y^{7/2}}{7} - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_{y=0}^{y=4} = \frac{128}{35}}$$

e chiaramente in questo secondo caso il dominio è stato considerato come semplice rispetto all'asse x

Esempio

Calcolare il seguente integrale: $\iint_A (x-y)\,dx\,dy$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

Dato che il dominio è y-semplice $\Rightarrow$ posto $\boxed{f_1(x) = x^2}$ e $\boxed{f_2(x) = \sqrt{1-x^2}}$

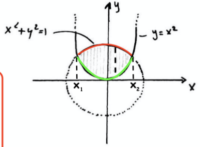


Esempio

Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\iint_A (x-y)\,dx\,dy$ dove $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y,\ x^2+y^2\le 1\}$

Dato che il dominio è y-semplice $\Rightarrow$ posto $f_1(x)=x^2$ e $f_2(x)=\sqrt{1-x^2}$

segue che:



$$\iint_A (x-y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}}^{\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}}^{\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}} \left(x\sqrt{1-x^2} - x^3 - \frac{1}{2}\left(1-x^2-x^4\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - x - \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\right)\Bigg|_{x=-\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}}^{x=\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}}$$

$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x^4+x^2-1=0$ quindi $x^2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

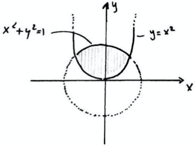
$x=x_1=-\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}$, $x=x_2=\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}$

■

<u>Esempio</u>

Calcolare il seguente integrale: $\iint_A (x-y)\, dx\, dy$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

Dato che il dominio è y-semplice $\Rightarrow$ posto $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$



segue che:

$$\iint_A (x-y)\, dx\, dy = \int_{-\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}}^{\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{-\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}}^{\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}} \left(x\sqrt{1-x^2} - x^3 - \frac{1}{2}(1-x^2-x^4) \right) dx$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^4 - 1 = 0$$

quindi $x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

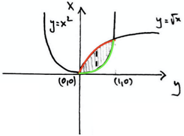
$x = -\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}$ o $x = \sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - x - \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \right) \Bigg|_{x=-\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}}^{x=\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}} \quad \blacksquare$$

<u>Esempio</u>

Calcolare l'integrale $\iint_A xy\, dx\, dy$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2,\ y \leq \sqrt{x}\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

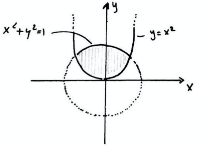


Esempio

Calcolare il seguente integrale: $\iint_A (x-y)\,dx\,dy$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y,\ x^2+y^2 \le 1\}$

Dato che il dominio è y-semplice $\Rightarrow$ posto $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$

segue che:



$$\iint_A (x-y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{(-1+\sqrt5)/2}}^{\sqrt{(-1+\sqrt5)/2}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{-\sqrt{(-1+\sqrt5)/2}}^{\sqrt{(-1+\sqrt5)/2}} \left(x\sqrt{1-x^2} - x^3 - \frac{1}{2}(1-x^2-x^4) \right) dx$$

$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+x^4-1=0$ quindi $x^2 = \frac{-1+\sqrt5}{2}$

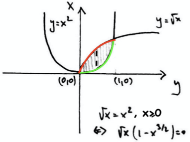
$x = -\sqrt{(-1+\sqrt5)/2}$ o $x = \sqrt{(-1+\sqrt5)/2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - x - \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \right) \Bigg|_{x=-\sqrt{(-1+\sqrt5)/2}}^{x=\sqrt{(-1+\sqrt5)/2}}$$ ∎

Esempio

Calcolare l'integrale: $\iint_A xy\,dx\,dy$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2,\ y \le \sqrt{x}\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$



$$\boxed{\iint_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2} y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}}$$

$\sqrt{x} = x^2,\ x \ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1-x^{3/2}) = 0$

$\Leftrightarrow x=0$ o $x=1$ ∎