Integrazione multipla in \mathbb{R}^2 (Integrali doppi) -parte 4-

Integrazione multipla in \mathbb{R}^2 (Integrali doppi) -parte 4-

Luca Bisconti



Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli studenti e alle studentesse sotto licenza:

Creative Commons BY-NC-ND

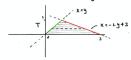
Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Esempio

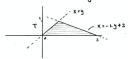
· Considerieme il seguette insieme:



Domini samplici e domini regolari

T poo essar visto como x-samplia, in lelti:

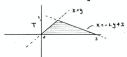
<u>Esempio</u>
· Consioleriem» il seguente insieme:





Domini samplici e domini regolari

Esempio · Consideriemo il seguente insieme:



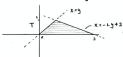


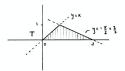
Domini samplici e domini regolori

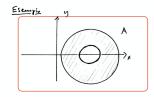
T poo esse visto como x- somplia, in lelti:

T pro essure vist such form y-samplia, inhti: inhodulant
$$\begin{cases} X , & \text{se of } x \in \mathbb{Z} \\ -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & \text{se } (x \times x) \end{cases} \qquad \text{e.} \begin{cases} P(x) = 0 \text{ for } x \in \mathbb{Z} \neq 0 \text{ for }$$

Esempio · Consideriemo il seguente insieme:







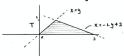
Domini sampliai e domini regolori

T poo esse visto como x- somplia, in lelhi:

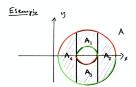
T può essere vist anch com y-semplia, intati:

A nou è ne'x-samplia ne y-samplia (quindi A nou è samplia). Tuttavio A è un insieme repobre impli:

<u>Esempio</u>
. Consioleriemo il segunte insieme:







Domini somplici e domini regolori

T poo essare visto como x-semplia, in helhi:

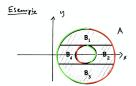
T poò essere vist and low y-semplia, intati:

A mon è ne'x-samplia ne y-samplia (quindi A non è samplia). Tuttavia A è un insiame pegabre implii:

Esempio · Consideriemo il seguente insieme:







Domini somplici e domini regolori

T poo esse visto como x- somplia, in lalti:

T può essere vist anch com y-semplia, in this in hodulud $f_{\epsilon(N)} = \begin{cases} \times & \text{se or } \epsilon : \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, \text{ se } \text{ in } \kappa \times \epsilon : \end{cases}$ < P(x) = 0 +x € [0, 1)

ellor T = } (x14): 0 < x < 3 , P(10 & y & P2 (x)

A mon è ne'x-samplia ne y-samplia (quindi A non è samplia). Tuttavia A è un insiame pegabre implii:

1. A = A, UAz UAs UA4 e gli Ai i+1,-, 4 sono y-samplic

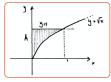
2. A = B, U B, U B, U B, U B, is instemi B; i=1,-,4

Alloe A è regolere.

Sous x-semplies

Esempio (importanza dell'orolina di integeziona)

Considerizme l'insieme A = N^2 dat. delle perte di piemo comprese tre l'esse y , le rette y =1, e il gratio delle foursione y = N^2 , ovoco:



Esempio (importanze dell'ordine l'integezione)

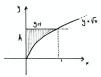
Consideraum l'insieme A = 15 dats dalla perte di pieno comprese tre l'esce y , la rette y = 1, e :1 gve/i6 dalle fourzione y = \sqrt{x} , overo:

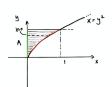


(alcolismo
$$\iint_{A} Sin(y^{3}) dx dy :$$
If burints A & J-sumplie (A = \left(\epsilon, \gamma) : \cos \times \xi \, \gamma \times \gamma \xi \\
Allow \int Sin(y^{3}) dx dy = \int \left(\left(\frac{1}{3}\sin(y^{3}) dy\right) dx

Esempio (importanza dell'ordine li integezione)

Considerame l'insieme A = 18th date dalle perte di pieno comprese tre l'esse y , le rette y al, e il grapio delle fourione y = VX, overo:





Allow
$$\iint_{A} Sin(y^{3}) dx dy = \int_{A}^{A} \left(\int_{A}^{A} Sin(y^{3}) dy \right) dx$$

$$\text{Mon (applicum GliGlark)}$$

Allow
$$\iint_{A} Sim(y^{2}) dx dy = \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{y^{2}} Sim(y^{2}) dx \right) dy = \int_{0}^{1} \left(Sim(y^{2}) dx \right) dx dx$$

Combiementi de Corolinete

· Prime L'introduce le nozione d'Cembiemente de Corolinete introduciono elcui petti Prelimineri:

Combizmenti de Gorolinste

· Prime L'introduce le nozione d'Cembiemente de Coordinate introduciono alcuni petti <u>Preliminari</u>:

Sie $A \subseteq IR^K$ un insieme expert e Considerismo une fonzione leninchile $f: A \longrightarrow IR^M$ quimoli $f(x) = (f_i(x), f_i(x), ..., f_i(x))$ ellor ojui $f_i = f_i(x)$ è une fonzione di K-variabili reali $A \ni x = (x_1, x_1, ..., x_K)$ i = 1, -, m

Cambiamenti de Corolinate

· Prime l'introducre le nozione l' Combiamente de Cospolinate introduciono alcuni tetti Preliminer:

Sie A SIR" un insieme experte e Consideramo une formatione emisabile f: A -> 18th quind: $f(x) = (f_i(x), f_i(x), ..., f_i(x))$ allor ojui $f_i = f_i(x)$ è une trutione di K-viriahili
reali

f è devielile in A se Y XEA sono derivelile le componente fi, lè f, in X (Ciòè 3 le derivate paradi di (x) i =1,7m, j=1,7k). Fissate X. EA le matria:

Cembiementi de Gorolinete

· Prime L'introduce le nozione d'Cembiemente de Coordinate introduciono alconi patri Reliminari:

Sie $A \subseteq IK^K$ un insieme aperte e Considerismo une funzione denirabile $f: A \longrightarrow IK^M$ quinoli $f(x) = (f_i(x), f_i(x), ..., f_i(x))$ allor ojui $f_i = f_i(x)$ è une funzione di K-variabili reali $A \ni X = (x_1, x_1, ..., x_K)$

f è deniehik in A se \forall xe A somo deniehik le Componente f; h f, in X (Cioè \exists le deniete paradi $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$ i =1,-m, j =1,- k). Fissat $X_0 \in A$ le metria:

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} f\left(\frac{x_{n}}{x_{n}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{1}}{\partial x_{1}} & \dots & \frac{\partial f_{n}}{\partial x_{n}} \\ \frac{\partial f_{n}}{\partial x_{1}} & \dots & \frac{\partial f_{n}}{\partial x_{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n} \end{pmatrix}$$
 Si chiome metric job biene belle metric job biene b

· Le metria jachiens è tele de le sue righe coincisteur con i gastiente Tfi delle ma componente f, , fe, ..., fm delle maypre f. Integrazione multipla in \mathbb{R}^2 (Integrali doppi) -parte 4-

Definitione: T: A⊆ |K → B S |K & on combinante & Goodinate su à biunivea cice à gladmente invertible su A.

Osserkhome:

Definitione: T: A⊆|K → BS|K è un combismente li coordinate su à biunivou ciceè glademente invertible su A.

Osserkhome:

- . Se M=1 Se T: IR → IR (T: A ⊆ IR → IR) è & clesse c'e q'+0 V ∈ EIR (V + EA)

 → p'invertibile globalmente.
- . <u>Se m</u>ze se T: A = M → B = M è l classe c'e det J (8) to tx e A ælloa T è localmente inventible, cioè t xo e A 3 un intermo U li xo hr. T: U → T(U) è bionivosa

Definitione: T: A = IK -> B = IK i un combiamente li coordinate su à biunivou cioè globalmente invertible su A.

Osserkhome:

- . Se M=1 Se T: IR → IR (T: A S IR → IR) è là clesse c'e q' x » V E E IR (V + E A)

 → l'inventibile globalmente.
 - . <u>Se m</u>ze Sc T: A = 18th -> B = 18th e b chasse c'e det J(x) +0 +x e A ellon T e'
 localmente inverlible, coe' + x o E A 3 un intermo U & x o ho. T: U -> T(U)
 e' Linnivos

Esempio (Gordinst polori)

In 1th Considerame (x,y)=(1650, 18m2) over T(1,0)=(160, 18m9)

$$= \begin{cases} \text{ foh } J^{\perp}(\delta^{\dagger} \delta) = \delta + 0 \\ \text{ in deals cen} \end{cases} J^{\perp}(\delta^{\dagger} \delta) = \delta + 0 \end{cases} = \begin{pmatrix} (\kappa^{\dagger} \delta_{+} \delta) \\ \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\kappa^{\dagger} \delta_{+} \delta) \\ (\kappa^{\dagger} \delta_{-} \delta) \\ \kappa^{\dagger} & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta \delta + 0 \\ \kappa^{\dagger} \delta & \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa^{\dagger} \delta$$

Definitione: T: A = 1K4 -> B = 1K 2 i un combirmento di cordinate en à bivnivace cioè globalmente invertibile su A.

Osserbione

- . <u>Se M=1</u> Se T: IR → IR (T: A S IR → IR) è là clesse c'e q' x3 x E & IR (¥ F & A) → p'inventibile globalmente.
 - . <u>Se n</u> > 2 C T: A ⊆ M → B ∈ M è là classe c'e det J (8) ≠0 ∀x ∈ A œlloa T è localmente inveclible, cioè y xo ∈ A ± un intormo U là xo ho. T: U → T(U)
 è himivos

Esempio (Gordinate polori)

In 11th Considerane (x,y)=(1650, 18m2) over T(1,0)=(160, 18m2)

Com
$$T: (O_1+\infty)\times IR \longrightarrow IR^2 \setminus \{e_1,e_1\}$$

$$(f_1,e_2) \longmapsto T(f_1,e_2) \qquad \text{in questo Cero} \qquad J_T(f_1,e_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & -f_2 & G_2 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & -f_2 & G_2 \\ g_2 & g_3 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2 & -f_2 & G_3 \\ g_2 & g_3 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & -f_2 & G_2 \\ g_2 & g_3 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2 & -f_2 & G_3 \\ g_3 & g_3 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_3 & -f_2 & G_3 \\ g_4 & g_3 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & -f_2 & G_3 \\ g_4 & g_3 & g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & -f_2 & G_4 \\ g_4 & g_4 & g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & g_4 & g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & g_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & g_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \\ g_4 & G_4 & G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 & G_4 & G_4 \\ g_5 & G_4 & G_4 \\ g_5 & G_4 & G_4 \\ g_5 & G_5 & G_4 \\ g_6 & G_5 & G_6 \\ g_7 & G_7 & G_7 \\ g$$

mentre (T: (0,+∞) x [0,2π) → KL\ (0,0)} è bivnivo (e!!)

Teoreme (li combiamente li variabile per gli integali loppi)

Sie T: D∈111 → 111 con T(11,0): (T,(11,0), Tz(11,0)) un epplicazione continue sull'insieme dins e

limitato D. Supponiamo che le trontiere di D e di T(D) sieme traccondili e che T sie

C', det J(P) to VP melli internodi D e T sie iniettiva in B.

Teoreme (di combizmento li verishile per gli integali doppi)

Sie $T: D \subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^2$ can $T(u,\sigma) : (T_1(u,\sigma), T_2(u,\sigma))$ on explications continue sull'insteme clims or limitets D. Suppositions the frontier of D is defined to a transmitted of T sie C', def $J_1(P)$ to VP mell intermed D or T sie intellive in B. Allows data be foundable of variability T continues so T(D), results:

$$\iint\limits_{T(\Sigma)} f(x,y) \, dx \, dy = \iint\limits_{D} f\left(T_{i}(n,x), T_{i}(n,x)\right) \, \Big| \, \det J_{T}(n,x) \, \Big| \, J_{n} \, dx$$

Teoreme (di combismente li verishile per gli integali doppi)

Sie $T: D \subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^2$ can $T(u,\sigma) : (T_1(u,\sigma), T_2(u,\sigma))$ on explications continue sull'instens clims e limitets D. Suppose the le frontiere de D e de T(D) siens traccontille e de T sie C', let J(P) to VP well internable D e T sie intellive in D. Allows data be fourtime de due variabilité Continue su T(D), résulte:

$$\iint\limits_{\text{area infinitesima in (x, y)}} f\left(T_{1}(u, s), T_{2}(u, s)\right) \underbrace{\left[\text{let }J_{T}(u, s) \mid Ju \mid s\right]}_{\text{area infinitesima in (x, y)}} D$$

Teoreme (di combismento li verishile per gli integali doppi)

Sie $T: D \subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^2$ for $T(u,\sigma): (T_1(u,\sigma),T_2(u,r))$ on applications continue sull'insieme dius e limiteto D. Suppontame the le trontière di D e di T(D) siem traccualilie et C T sie C', let J(P) to VP well intermoli D e T sie iniethiva in B. Allors date le fourzione di due voniabili F continue su T(D), risulte:

$$\iint\limits_{T(\Sigma)} f(x,z) \, dx \, dy = \iint\limits_{D} f\left(T_{i}(n^{i}x), T_{2}(n^{i}x)\right) \, \Big| \, \det J_{T}(n^{i}x) \, \Big| \, \int\limits_{T} \int\limits_{T$$

Esemplo

Facundo us. Lelle coordinate poleri e del teoreme di cambiamento di variabile calcoliano:

$$\begin{cases} A & \begin{cases} f(x^2) \cdot x_5 \\ \begin{cases} x, y \neq 0 \end{cases} \end{cases} & \text{for } A = \begin{cases} (x^2) : 1 \leq x_1 + \lambda_1 \leq 3 \end{cases}$$

Teoreme (di combizmento li verizbile per gli integali doppi)

Ste T: DEM2 -> 112 Con T(4, T): (T, (4, T), TE(4, T)) un explicazione continue sull'insieme dino e limiteto D. Suppomismo ch le trontiere di De di T(D) siem trecuratili e ch T sie C', let J(P) to 4p mell' internoli De T sie iniettive in B. Allore date le fouzione de due voniabili f continue su T(D), risulte:

$$\iint_{T(x,y)} f(x,y) dx dy = \iint_{D} f(T_{1}(u,v), T_{2}(u,v)) | det J_{T}(u,v) | du dv$$

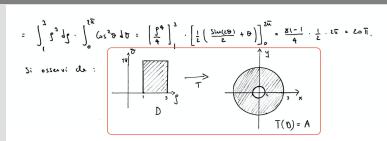
Esemplo

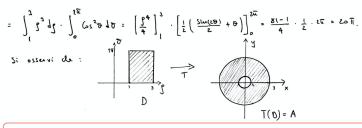
Facundo uso delle coordinate poteri e del teoreme di cambiamento di usvishile calcolizuro:

$$\iint_{A} x^{2} dx dy \qquad \text{fix (2): } x^{2}$$

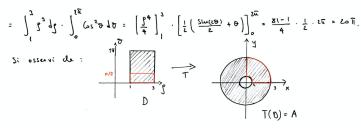
Se T è letinite de T(1,0)=(5000,5 seno), i pout do A si ottenzous tranile T te Gusto verière (5,8) met rettempolo chius e limiteto D= ((50): 12523,000 e zir = [1,2]x[0,2] e quindi T(D)=A. Alloe: [[x22xb] = [] 2 620 \$ 440 = [(] 2 620 do) by.] 9 (] 600 do) by

$$=\int_{1}^{1} \int_{3}^{2} \int_{1}^{2} \cdot \int_{2g}^{\infty} \left(\cos_{2} \theta + 1 \right) = \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{b} \right]_{2}^{1} \cdot \left[\frac{1}{b} \left(\frac{s}{2 |m(l \cdot \theta)} + \theta \right) \right]_{2g}^{\infty} = \frac{4}{8 l - 1} \cdot \frac{1}{l} \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot 1$$





e le ipoksi bel teoreme sono soddistatte: Intatti Dèckiuso a limitato, dDe dA=dT(0) Sono insiemi trascrabili, Tècuntinua in Dèc'nell'interno Deiviniettiva (non su tutto D, poiche' non loèsu dD, intalti per B=0 e B=20 si ottengono gli stessi pruti DA)



e le ivolesi bel teoreme sono soddistatte: Infatti Dè chiuso a limitato, dDe dA=DT(O) Sous insiemi trascrabili, Tà continue in Dà c' mell' interno De ivi iniettiva (non su tutto D, poicker non lo è su da, in falti per B=0 e 0=20 si ottengono gli stessi pouti W A)

$$= \int_{1}^{2} s^{2} ds \cdot \int_{0}^{2\pi} (cs^{2} + b)^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2im(t\theta)}{2} + b\right)\right]_{0}^{2\pi} = \frac{8(-1)}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot 1$$

$$= \int_{1}^{2} s^{2} ds \cdot \int_{0}^{2\pi} (cs^{2} + b)^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2im(t\theta)}{2} + b\right)\right]_{0}^{2\pi} = \frac{8(-1)}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot 1$$

$$= \int_{1}^{2} s^{2} ds \cdot \int_{0}^{2\pi} (cs^{2} + b)^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2im(t\theta)}{2} + b\right)\right]_{0}^{2\pi} = \frac{8(-1)}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot 1$$

$$= \int_{1}^{2} s^{2} ds \cdot \int_{0}^{2\pi} (cs^{2} + b)^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2im(t\theta)}{2} + b\right)\right]_{0}^{2\pi} = \frac{8(-1)}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot 1$$

$$= \int_{1}^{2\pi} s^{2} ds \cdot \int_{0}^{2\pi} (cs^{2} + b)^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2im(t\theta)}{2} + b\right)\right]_{0}^{2\pi} = \frac{8(-1)}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2\pi = 2\pi \cdot 1$$

$$= \int_{1}^{2\pi} s^{2} ds \cdot \int_{0}^{2\pi} (cs^{2} + b)^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2im(t\theta)}{2} + b\right)\right]_{0}^{2\pi} = \frac{8(-1)}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2\pi \cdot 2\pi \cdot 1$$

$$= \int_{1}^{2\pi} s^{2} ds \cdot \int_{0}^{2\pi} (cs^{2} + b)^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2im(t\theta)}{2} + b\right)\right]_{0}^{2\pi} = \frac{8(-1)}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2\pi \cdot 2\pi \cdot 1$$

e le iyoksi bel teoreme somo sodolisptte: Infatt Dèchius a limiteto, dDe dA=dT(0)
somo insiemi trascrabili, Tè continua in Dè c'nell'interno De ivi iniettiva (non su tutto
D, poiche non loè su dD, infatti per B=0 e B=2 si ottengono gli stessi pruti DA)

Allow Con le Corolinate pobre segue ch: D= \((J, \text{\$\pi}): 1 < p < 3, 0 < \text{\$\pi} \text{\$\frac{1}{2}\$} \te