Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi) -parte 4-

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

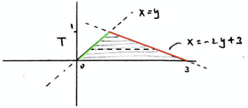
Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Firenze, 14/04/2020

Domini semplici e domini regolari

Esempio

- Consideriamo il seguente insieme:



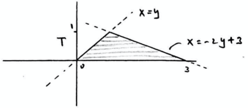
T può essere visto come x-semplice, infatti:

$$\boxed{T = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1 ,\ y \leq x \leq -2y+3 \}}$$

Domini semplici e domini regolari

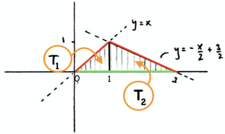
Esempio

- Consideriamo il seguente insieme:



T può essere visto come x-semplice, infatti:

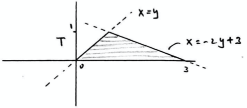
$$T = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1, \ y \leq x \leq -2y+3 \}$$



Domini semplici e domini regolari

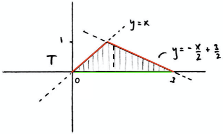
Esempio

- Consideriamo il seguente insieme:



T può essere visto come x-semplice, infatti:

$$T = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1 ,\ y \leq x \leq -2y+3 \}$$



T può essere visto anche come y-semplice, infatti:

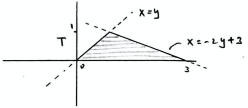
introducendo $\boxed{f_2(x) = \begin{cases} x , & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x}{2}+\frac{3}{2} , & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}}$ e $\boxed{f_1(x) = 0 \ \forall x \in [0,3]}$

allora $\boxed{T = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 3 ,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \}}$

Domini semplici e domini regolari

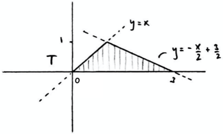
Esempio

- Consideriamo il seguente insieme:



T può essere visto come x-semplice, infatti:

$$T = \{ (x,y) : 0 \le y \le 1 ,\ y \le x \le -2y+3 \}$$

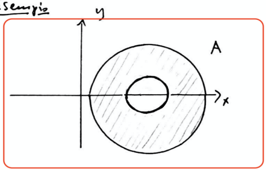


T può essere visto anche come y-semplice, infatti:

introduciamo $f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}, & \text{se } 1 < x \le 3 \end{cases}$ e $f_1(x) = 0 \ \forall x \in [0,3]$

allora $T = \{ (x,y) : 0 \le x \le 3 ,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)$

Esempio

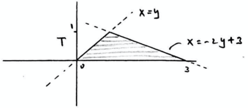


A non è né x-semplice né y-semplice (quindi A non è semplice). Tuttavia A è un insieme regolare infatti:

Domini semplici e domini regolari

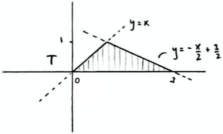
Esempio

- Consideriamo il seguente insieme:



T può essere visto come x-semplice, infatti:

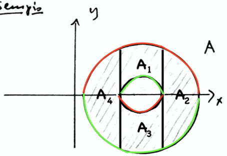
$$T = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq -2y+3 \}$$



T può essere visto anche come y-semplice, infatti: introducendo $f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}, & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ e $f_1(x) = 0 \ \forall x \in [0,3]$

allora $T = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 3,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$

Esempio



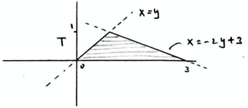
A non è né x-semplice né y-semplice (quindi A non è semplice). Tuttavia A è un insieme regolare infatti:

1. $\boxed{A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \text{ e gli } A_i \ i=1,..,4 \text{ sono y-semplic}}$

Domini semplici e domini regolari

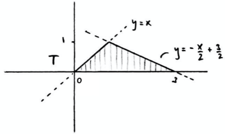
Esempio

- Consideriamo il seguente insieme:



T può essere visto come x-semplice, infatti:

$$T = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1 ,\ y \leq x \leq -2y+3 \}$$

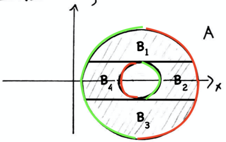


T può essere visto anche come y-semplice, infatti:

introducendo $f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x}{2}+\frac{3}{2}, & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ e $f_1(x) = 0 \ \forall x \in [0,3]$

allora $T = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 3 ,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \}$

Esempio



A non è né x-semplice né y-semplice (quindi A non è semplice). Tuttavia A è un insieme regolare infatti:

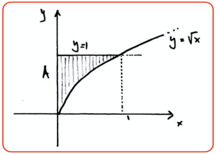
1. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ e gli A_i $i=1,..,4$ sono y-semplici

2. $\boxed{A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4}$ e gli insiemi B_i $i=1,..,4$ sono x-semplici

Allora A è regolare.

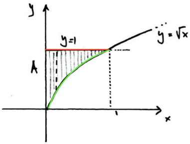
Esempio (importanza dell'ordine di integrazione)

Consideriamo l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dato dalla parte di piano compresa tra l'asse y, la retta $y=1$, e il grafico della funzione $y=\sqrt{x}$, ovvero:



Esempio (importanza dell'ordine di integrazione)

Consideriamo l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dato dalla parte di piano compresa tra l'asse y, la retta $y=1$, e il grafico della funzione $y=\sqrt{x}$, ovvero:



Calcoliamo $\displaystyle\iint_A \sin(y^3)\,dx\,dy$:

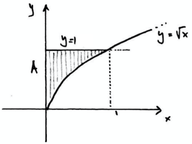
Il dominio A è y-semplice $\boxed{A = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \,,\, \sqrt{x} \le y \le 1\}}$

Allora $\displaystyle\iint_A \sin(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3)\,dy \right) dx$

non sappiamo calcolarlo!

<u>Esempio</u> (importanza dell'ordine di integrazione)

Consideriamo l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dato dalla parte di piano compresa tra l'asse y, la retta $y=1$, e il grafico della funzione $y=\sqrt{x}$, ovvero:

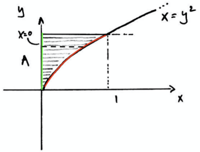


Calcoliamo $\displaystyle\iint_A \sin(y^3)\,dx\,dy$:

Il dominio A è y-semplice $A=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ \sqrt{x}\le y\le 1\}$

Allora $$\iint_A \sin(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3)\,dy\right)dx$$

non sappiamo calcolarlo!



Il dominio A è x-semplice $\boxed{A=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2\}}$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Allora } \iint_A \sin(y^3)\,dx\,dy &= \int_0^1\left(\int_0^{y^2}\sin(y^3)\,dx\right)dy = \int_0^1\Big(\sin(y^3)\,x\Big)_{x=0}^{x=y^2}dy \\ &= \int_0^1 y^2\sin(y^3)\,dy = -\frac{\cos(y^3)}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\Big(-\cos(1)+1\Big) = \frac{1-\cos(1)}{3}\end{aligned}}$$

Cambiamenti di Coordinate

- Prima di introdurre la nozione di Cambiamento di Coordinate introduciamo alcuni fatti Preliminari:

Cambiamenti di Coordinate

- Prima di introdurre la nozione di Cambiamento di Coordinate introduciamo alcuni fatti Preliminari:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^k$ un insieme aperto e consideriamo una funzione derivabile $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$

quindi $f(\underline{x}) = \big(f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}) \big)$ allora ogni $f_i = f_i(\underline{x})$ è una funzione di k-variabili reali

$A \ni \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ $\qquad i = 1, \dots, m$

Cambiamenti di Coordinate

- Prima di introdurre la nozione di Cambiamento di Coordinate introduciamo alcuni fatti

Preliminari:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^k$ un insieme aperto e consideriamo una funzione derivabile $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$

quindi $\underset{A \ni \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)}{f(\underline{x})} = \left(f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}) \right)$ allora ogni $\underset{i=1,\dots,m}{f_i = f_i(\underline{x})}$ è una funzione di k-variabili reali

f è derivabile in A se $\forall\ \underline{x} \in A$ sono derivabili le componenti f_i, di f, in $\underline{x}$

(Cioè $\exists$ le derivate parziali $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x})$ $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,k$). Fissato $\underline{x}_0 \in A$ la matrice:

$$\boxed{\underset{m \times k}{J_f}(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}(\underline{x}_0)}$$

Si chiama matrice jacobiana della mappa f nel punto $\underline{x}_0$.

Cambiamenti di Coordinate

- Prima di introdurre la nozione di Cambiamento di Coordinate introduciamo alcuni fatti

Preliminari:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^K$ un insieme aperto e consideriamo una funzione derivabile $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$

quindi $f(\underline{x}) = \left(f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}) \right)$ allora ogni $f_i = f_i(\underline{x})$ è una funzione di K-variabili reali

$A \ni \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_K)$ $\qquad i = 1, \dots, m$

f è derivabile in A se $\forall\, \underline{x} \in A$ sono derivabili le componenti f_i, di f, in $\underline{x}$

(Cioè $\exists$ le derivate parziali $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x})$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, K$). Fissato $\underline{x}_0 \in A$ la matrice:

$$\underset{m \times K}{J_f}(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_K} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_K} \end{pmatrix}(\underline{x}_0)$$

si chiama matrice jacobiana della mappa f nel punto $\underline{x}_0$.

- $\boxed{\text{La matrice jacobiana è tale che le sue righe coincidono con i gradienti } \nabla f_i \text{ delle } m \text{ componenti } f_1, f_2, \dots, f_m \text{ della mappa } f.}$

<u>Definizione</u>: $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cambiamento di coordinate se è biunivoca cioè globalmente invertibile su A.

Definizione: $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cambiamento di coordinate se è biunivoca cioè globalmente invertibile su A.

Osservazione:

- Se $n=1$ se $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($T : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) è di classe C^1 e $f' \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ($\forall t \in A$) $\Rightarrow$ f invertibile globalmente.

<u>Definizione</u>: $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cambiamento di coordinate se è biunivoca cioè globalmente invertibile su A.

<u>Osservazione</u>:

- <u>Se $n=1$</u> Se $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($T : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) è di classe C^1 e $f' \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ($\forall t \in A$) $\Rightarrow$ f invertibile globalmente.

- <u>Se $n \geq 2$</u> Se $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e $\det J_T(\underline{x}) \neq 0$ $\forall \underline{x} \in A$ allora T è localmente invertibile, cioè $\forall \underline{x}_0 \in A$ $\exists$ un intorno U di $\underline{x}_0$ t.c. $T : U \to T(U)$ è biunivoca

<u>Definizione</u>: $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cambiamento di coordinate se è biunivoca cioè globalmente invertibile su A.

<u>Osservazione</u>:

- <u>Se $n = 1$</u> se $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($T : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) è di classe C^1 e $f' \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ($\forall t \in A$) $\Rightarrow$ f invertibile globalmente.

- <u>Se $n \geq 2$</u> se $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e $\det J_T(\underline{x}) \neq 0$ $\forall \underline{x} \in A$ allora T è localmente invertibile, cioè $\forall\, \underline{x}_0 \in A$ $\exists$ un intorno U di $\underline{x}_0$ t.c. $T : U \to T(U)$ è biunivoca

<u>Esempio</u> (coordinate polari)

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo $(x, y) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$ ovvero $T(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$

Con $T : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(\rho, \theta) \longmapsto T(\rho, \theta)$

<u>non è biunivoca</u>

in questo caso $J_T(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\det J_T(\rho, \theta) = \rho \neq 0 \quad (\text{se } \rho \neq 0)}$

Definizione: $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cambiamento di coordinate se è biunivoca cioè globalmente invertibile su A.

Osservazione:

- Se $n=1$ se $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($T : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) è di classe C^1 e $f' \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ($\forall t \in A$) $\Rightarrow$ f invertibile globalmente.

- Se $n \geq 2$ se $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e $\det J_T(\underline{x}) \neq 0$ $\forall \underline{x} \in A$ allora T è localmente invertibile, cioè $\forall \underline{x}_0 \in A$ $\exists$ un intorno U di $\underline{x}_0$ t.c. $T : U \to T(U)$ è biunivoca

Esempio (coordinate polari)

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo $(x, y) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$ ovvero $T(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho \sin\theta)$

con $T : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$(\rho, \theta) \longmapsto T(\rho, \theta)$

non è biunivoca

in questo caso $J_T(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det J_T(\rho, \theta) = \rho \neq 0$ (se $\rho \neq 0$)

mentre $\boxed{T : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ è biunivoca!!}}$

Teorema (di cambiamento di variabile per gli integrali doppi)

Sia $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(u,v) = (T_1(u,v), T_2(u,v))$ un applicazione continua sull'insieme chiuso e limitato D. Supponiamo che la frontiera di D e di $T(D)$ siano trascurabili e che T sia C^1, $\det J_T(P) \neq 0$ $\forall P$ nell'interno di D e T sia iniettiva in $\mathring{D}$.

interno di D

Teorema (di cambiamento di variabile per gli integrali doppi)

Sia $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(u,v) = (T_1(u,v), T_2(u,v))$ un applicazione continua sull'insieme chiuso e limitato D. Supponiamo che le frontiere di D e di $T(D)$ siano trascurabili e che T sia C^1, $\det J_T(P) \neq 0$ $\forall p$ nell' interno di D e T sia iniettiva in $\mathring{D}$. Allora data la funzione di due variabili f continua su $T(D)$, risulta:

$$\boxed{\iint_{T(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} f\left(T_1(u,v), T_2(u,v)\right) \left|\det J_T(u,v)\right| du\,dv}$$

Teorema (di cambiamento di variabile per gli integrali doppi)

Sia $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(u,v) = (T_1(u,v), T_2(u,v))$ un'applicazione continua sull'insieme chiuso e limitato D. Supponiamo che le frontiere di D e di $T(D)$ siano trascurabili e che T sia C^1, $\det J_T(P) \neq 0$ $\forall p$ nell'interno di D e T sia iniettiva in $\mathring{D}$. Allora data la funzione di due variabili f continua su $T(D)$, risulta:

$$\boxed{\iint_{T(D)} f(x,y) \underbrace{dx\,dy}_{\text{area infinitesima in } (x,\, y)} = \iint_D f\big(T_1(u,v), T_2(u,v)\big) \underbrace{\left| \det J_T(u,v) \right| du\,dv}_{\text{area infinitesima in } (u,\, v)}}$$

Teorema (di cambiamento di variabile per gli integrali doppi)

Sia $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(u,v) = (T_1(u,v), T_2(u,v))$ un'applicazione continua sull'insieme chiuso e limitato D. Supponiamo che le frontiere di D e di $T(D)$ siano trascurabili e che T sia C^1, $\det J_T(P) \neq 0$ $\forall p$ nell'interno di D e T sia iniettiva in $\mathring{D}$. Allora data la funzione di due variabili f continua su $T(D)$, risulta:

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f\big(T_1(u,v), T_2(u,v)\big)\,\left|\det J_T(u,v)\right|\,du\,dv$$

Esempio

Facendo uso delle coordinate polari e del teorema di cambiamento di variabile calcoliamo:

$$\iint_A \underbrace{x^2}_{f(x,y)=x^2}\,dx\,dy \qquad \text{dove} \qquad A = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

Teorema (di cambiamento di variabile per gli integrali doppi)

Sia $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(u,v) = (T_1(u,v), T_2(u,v))$ un applicazione continua sull'insieme chiuso e limitato D. Supponiamo che le frontiere di D e di $T(D)$ siano trascurabili e che T sia C^1, $\det J_T(P) \neq 0$ $\forall p$ nell'interno di D e T sia iniettiva in $\mathring{D}$. Allora data la funzione di due variabili f continua su $T(D)$, risulta:

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} f\big(T_1(u,v), T_2(u,v)\big)\,\left|\det J_T(u,v)\right|\,du\,dv$$

Esempio

Facendo uso delle coordinate polari e del teorema di cambiamento di variabile calcoliamo:

$$\iint_A x^2\,dx\,dy \qquad \text{dove} \quad A = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 9\}$$

$f(x,y) = x^2$

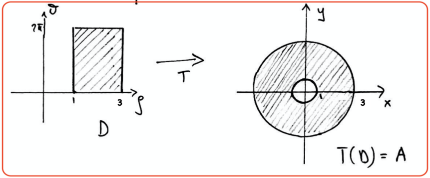
Se T è definita da $T(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$, i punti di A si ottengono tramite T facendo variare (ρ,θ) nel rettangolo chiuso e limitato $D = \{(\rho,\theta) : 1 \le \rho \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi\} = [1,3]\times[0,2\pi]$ e quindi $T(D) = A$. Allora:

$$\iint_A x^2\,dx\,dy = \iint_D \rho^2\cos^2\theta \underbrace{\rho}_{|\det J_T|}\,d\rho\,d\theta = \int_1^3 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3\cos^2\theta\,d\theta\right) d\rho = \int_1^3 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta\right) d\rho$$

$$= \int_1^3 \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^3 \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2\theta)}{2} + \theta \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{81-1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 20\pi .$$

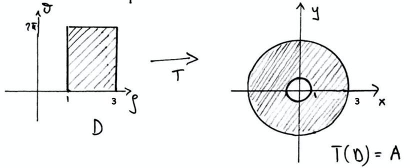
$$= \int_1^3 \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^3 \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2\vartheta)}{2} + \vartheta \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{81-1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 20\pi .$$

Si osservi che:



$$= \int_1^3 \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2\vartheta)}{2} + \vartheta\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{81-1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 20\pi.$$

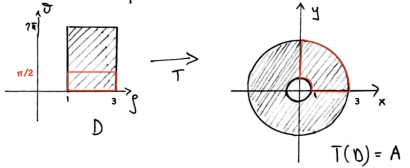
Si osservi che:



e le ipotesi del teorema sono soddisfatte: Infatti D è chiuso e limitato, ∂D e $\partial A = \partial T(D)$ sono insiemi trascurabili, T è continua in D è C^1 nell'interno di D e ivi iniettiva (non su tutto D, poiché non lo è su ∂D, infatti per $\vartheta = 0$ e $\vartheta = 2\pi$ si ottengono gli stessi punti di A)

$$= \int_1^3 \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2\vartheta)}{2} + \vartheta\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{81-1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 20\pi.$$

Si osservi che :



e le ipotesi del teorema sono soddisfatte: Infatti D è chiuso e limitato, ∂D e $\partial A = \partial T(D)$ sono insiemi trascurabili, T è continua in D è C^1 nell'interno di D e ivi iniettiva (non su tutto D, poiché non lo è su ∂D, infatti per $\vartheta = 0$ e $\vartheta = 2\pi$ si ottengono gli stessi punti di A)

<u>Esempio</u>

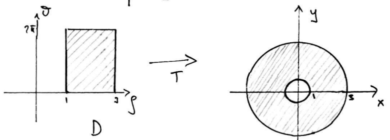
Calcoliamo $\displaystyle\iint_A \frac{y\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \, dx\, dy$ dove $\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}}$

Allora con le coordinate polari segue che: $\boxed{D = \{(\rho,\vartheta) : 1 \le \rho \le 3,\ 0 \le \vartheta \le \pi/2\} = [1,3] \times [0, \pi/2]}$

T

$$= \int_1^3 \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2\theta)}{2} + \theta\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{81-1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 20\pi.$$

Si osservi che:



$T(D) = A$

e le ipotesi del teorema sono soddisfatte: Infatti D è chiuso e limitato, ∂D e $\partial A = \partial T(D)$ sono insiemi trascurabili, T è continua in D è C^1 nell'interno di D e ivi iniettiva (non su tutto D, poiché non lo è su ∂D, infatti per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ si ottengono gli stessi punti di A)

Esempio

Calcoliamo $\displaystyle\iint_A \frac{y\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\, dx\, dy$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

Allora con le coordinate polari segue che: $D = \{(\rho,\vartheta) : 1 \le \rho \le 3,\ 0 \le \theta \le \pi/2\} = [1,3] \times [0, \pi/2]$

$$\boxed{\iint_A \frac{y\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_1^3 \frac{\rho \sin(\theta)\, e^{\rho}}{\rho^2} \overbrace{\rho}^{|\det J_T|} d\rho\right) d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_1^3 \sin(\theta)\, e^{\rho}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \cdot \int_1^3 e^{\rho}\, d\rho = 1 \cdot (e^3 - e^1) = e^3 - e}$$