Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi) -parte 5-

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

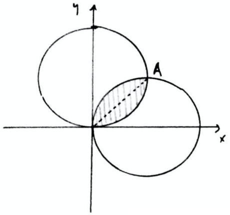
Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Firenze, 14/04/2020

Integrali doppi

Esempio

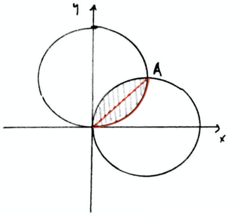
Consideriamo l'integrale $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove $\boxed{A=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\leq 1,\ x^2+(y-1)^2\leq 1\}}$



Integrali doppi

Esempio

Consideriamo l'integrale $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove $A = \{(x,y) : (x-1)^2+y^2 \le 1,\ x^2+(y-1)^2 \le 1\}$



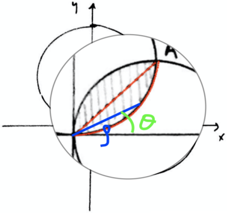
usando le coordinate polari troviamo:

$$x^2+(y-1)^2 \le 1 \iff \underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}-2y+1 \le 1 \iff \rho^2 - 2\rho\,\mathrm{sen}(\theta) \le 0 \overset{\rho \ge 0}{\iff} \boxed{\begin{array}{l}\rho \le 2\,\mathrm{sen}\theta \\ 0 \le \theta \le \pi/4\end{array}}$$

Integrali doppi

Esempio

Consideriamo l'integrale $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove $A=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\le 1,\ x^2+(y-1)^2\le 1\}$



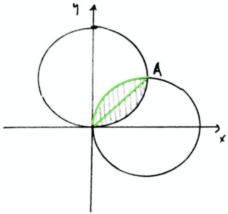
usando le coordinate polari troviamo:

$$x^2+(y-1)^2\le 1 \iff \underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}-2y+1\le 1 \iff \rho^2-2\rho\,\text{sen}(\theta)\le 0 \overset{\rho\ge 0}{\iff} \boxed{\begin{array}{l}\rho\le 2\,\text{sen}\theta\\ 0\le\theta\le\pi/4\end{array}}$$

Integrali doppi

Esempio

Consideriamo l'integrale $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove $A=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\le 1,\ x^2+(y-1)^2\le 1\}$



usando le coordinate polari troviamo:

$$x^2+(y-1)^2\le 1 \iff \underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}-2y+1\le 1 \iff \rho^2-2\rho\,\mathrm{sen}(\vartheta)\le 0 \overset{\rho\ge 0}{\iff} \rho\le 2\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

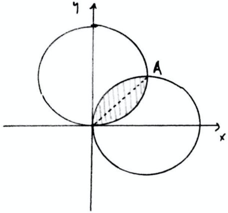
$$0\le\vartheta\le\pi/4$$

$$(x-1)^2+y^2\le 1 \iff \underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}-2x+1\le 1 \iff \rho^2-2\rho\cos\vartheta \overset{\rho\ge 0}{\iff} \boxed{\begin{array}{l}\rho\le 2\cos\vartheta\\ \pi/4\le\vartheta\le\pi/2\end{array}}$$

Integrali doppi

Esempio

Consideriamo l'integrale $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove $A=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\le 1,\ x^2+(y-1)^2\le 1\}$



usando le coordinate polari troviamo:

$$x^2+(y-1)^2\le 1 \iff \underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}-2y+1\le 1 \iff \rho^2-2\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\le 0 \overset{\rho\ge 0}{\iff} \boxed{\begin{array}{l}\rho\le 2\,\mathrm{sen}\theta\\ 0\le\theta\le\pi/4\end{array}}$$

$$(x-1)^2+y^2\le 1 \iff \underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}-2x+1\le 1 \iff \rho^2-2\rho\cos\theta \overset{\rho\ge 0}{\iff} \boxed{\begin{array}{l}\rho\le 2\cos\theta\\ \pi/4\le\theta\le\pi/2\end{array}}$$

e il dominio A diventa l'immagine dell'insieme D:

$$D=\boxed{\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le\rho\le 2\,\mathrm{sen}(\theta),\ 0\le\theta\le\pi/4\}}\cup\boxed{\{(\rho,\theta):\ 0\le\rho\le 2\cos\theta,\ \tfrac{\pi}{4}\le\theta\le\pi/2\}}$$

Si ha quindi:

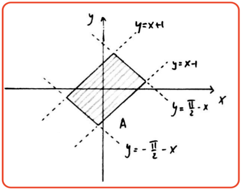
$$\iint_A\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint_D \rho\,\rho\,d\rho\,d\theta=\underline{\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\theta}\rho^2\,d\rho\,d\theta}+\underline{\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,d\rho\,d\theta}=\frac{8}{3}\left(\int_0^{\pi/4}\mathrm{sen}^3\theta\,d\theta+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta\right)$$

$$=\frac{8}{3}\left[\frac{1}{12}(8-5\sqrt{2})+\frac{1}{12}(8-5\sqrt{2})\right]=\frac{4}{9}(8-5\sqrt{2})\ \blacksquare$$

Esempio

Calcolare il seguente integrale $\iint_A \cos(x+y)\, e^{x-y}\, dx\, dy$ dove A è la porzione di piano compresa tra le rette di equazione $y = \frac{\pi}{2} - x$, $y = -\frac{\pi}{2} - x$, $y = x-1$ e $y = x+1$

ovvero $\boxed{A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x-y \leq 1 \,,\, -\frac{\pi}{2} \leq x+y \leq \frac{\pi}{2} \}}$



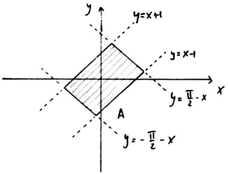
Esempio

Calcolare il seguente integrale $\iint_A \cos(x+y)\, e^{x-y}\, dx\, dy$ dove A è la porzione di piano compresa tra le rette di equazione $y=\frac{\pi}{2}-x$, $y=-\frac{\pi}{2}-x$, $y=x-1$ e $y=x+1$

ovvero $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq x-y\leq 1\ ,\ -\frac{\pi}{2}\leq x+y\leq\frac{\pi}{2}\}$

$$(u,v)\xmapsto{T} T(u,v)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{v-u}{2}\right)$$

usiamo il cambiamento di variabili $\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{v-u}{2}\end{cases}$

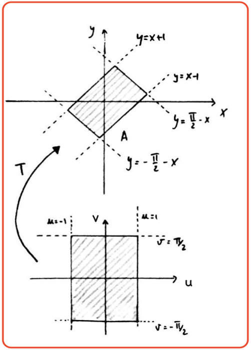


Esempio

Calcolare il seguente integrale $\displaystyle\iint_A \cos(x+y)\, e^{x-y}\, dx\, dy$ dove A è la porzione di piano compresa tra le rette di equazione $y=\frac{\pi}{2}-x$, $y=-\frac{\pi}{2}-x$, $y=x-1$ e $y=x+1$

ovvero $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le \underbrace{x-y}_{=u}\le 1 \,,\; -\frac{\pi}{2}\le \underbrace{x+y}_{=v}\le\frac{\pi}{2}\right\}$

$(u,v)\xrightarrow{T} T(u,v)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{v-u}{2}\right)$



usiamo il cambiamento di variabili $\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{v-u}{2} \end{cases}$ che in

particolare produce $\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases}$ e di conseguenza il dominio

A è l'immagine, tramite la mappa T, del dominio D nel piano u,v

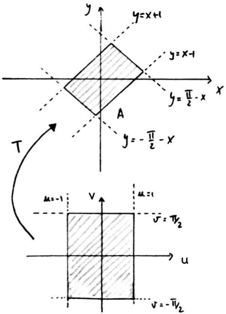
definito come $\boxed{D=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : -1\le u\le 1 \,,\; -\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2}\right\}}$

Esempio

Calcolare il seguente integrale $\iint_A \cos(x+y)\, e^{x-y}\, dx\, dy$ dove A è la porzione di piano compresa tra le rette di equazione $y=\frac{\pi}{2}-x$, $y=-\frac{\pi}{2}-x$, $y=x-1$ e $y=x+1$

ovvero $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x-y\le 1,\ -\frac{\pi}{2}\le x+y\le\frac{\pi}{2}\right\}$

$(u,v)\xrightarrow{T} T(u,v)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{v-u}{2}\right)$



usiamo il cambiamento di variabili $\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{v-u}{2}\end{cases}$ che in particolare produce $\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y\end{cases}$ e di conseguenza il dominio A è l'immagine, tramite la mappa T, del dominio D nel piano u,v definito come $D=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : -1\le u\le 1,\ -\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2}\right\}$

$$\det J_T = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow \iint_A \cos(x+y)\, e^{x-y}\, dx\, dy = \iint_D \cos(v)\, e^{u}\, \frac{1}{2}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(v)\, e^{u}\, dv\right) du = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{u}\left[\operatorname{sen}(v)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} du = \int_{-1}^{1} e^{u}\, du = e-e^{-1} = \frac{e^2-1}{2}$$

- Dato un insieme di misura non nulla $A \subseteq \mathbb{R}^2$, il suo centro di massa (geometrico) è il punto di coordinate (x_c, y_c) che ha per ascissa la media delle ascisse e per ordinata la media delle ordinate:

$$\boxed{x_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A x \, dx\, dy \quad , \quad y_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A y \, dx\, dy} \quad \text{dove } \underbrace{\mu(A)}_{\text{area di } A} = \iint_A 1 \cdot dx\, dy$$

- Dato un insieme di misura non nulla $A \subseteq \mathbb{R}^2$, il suo centro di massa (geometrico) è il punto di coordinate (x_c, y_c) che ha per ascissa le medie delle ascisse e per ordinate le medie delle ordinate:

$$x_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A x \, dx\, dy \quad , \quad y_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A y \, dx\, dy \quad \text{dove } \underbrace{\mu(A)}_{\text{area di } A} = \iint_A 1 \cdot dx\, dy$$

<u>Esempio</u>

Determinare il centro di massa geometrico del <u>semicerchio</u> $\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2, \ y \geq 0\}}$

- Dato un insieme di misura non nulla $A \subseteq \mathbb{R}^2$, il suo centro di massa (geometrico) è il punto di coordinate (x_c, y_c) che ha per ascissa la media delle ascisse e per ordinate le medie delle ordinate:

$$x_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A x \, dx\, dy \quad , \quad y_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A y \, dx\, dy \quad \text{dove} \quad \underbrace{\mu(A)}_{\text{area di } A} = \iint_A 1 \cdot dx\, dy$$

<u>Esempio</u>

Determinare il centro di massa geometrico del semicerchio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2, \ y \geq 0\}$

Qui $\mu(A) = \pi r^2/2$ e per ragioni di simmetria $x_c = 0$

comunque $\quad x_c = \frac{2}{\pi r^2} \iint_A x \, dx\, dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x \, dy \, dx = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2} \, dx = -\frac{2}{3\pi r^2} (r^2-x^2)^{3/2} \Big|_{-r}^{r} = 0$

- Dato un insieme di misura non nulla $A \subseteq \mathbb{R}^2$, il suo centro di massa (geometrico) è il punto di coordinate (x_c, y_c) che ha per ascissa la media delle ascisse e per ordinata la media delle ordinate:

$$x_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A x \, dx\, dy \quad , \quad y_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A y \, dx\, dy \quad \text{dove} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{area di } A}}{\mu(A)} = \iint_A 1 \cdot dx\, dy$$

<u>Esempio</u>

Determinare il centro di massa geometrico del semicerchio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le r^2,\ y \ge 0\}$

Qui $\mu(A) = \pi r^2/2$ e per ragioni di simmetria $x_c = 0$

comunque $\quad x_c = \frac{2}{\pi r^2} \iint_A x \, dx\, dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x \, dy\, dx = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\, dx = -\frac{2}{3\pi r^2} (r^2-x^2)^{3/2} \Big|_{-r}^{r} = 0$

$$\boxed{y_c = \frac{2}{\pi r^2} \iint_A y \, dx\, dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y \, dy\, dx = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\, dx = \frac{4r}{3\pi}.} \quad \blacksquare$$

- Dato un insieme di misura non nulla $A \subseteq \mathbb{R}^2$, il suo centro di massa (geometrico) è il punto di coordinate (x_c, y_c) che ha per ascissa le medie delle ascisse e per ordinate le medie delle ordinate:

$$x_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A x \, dx\, dy \quad , \quad y_c = \frac{1}{\mu(A)} \iint_A y \, dx\, dy \quad \text{dove} \quad \underbrace{\mu(A)}_{\text{area di } A} = \iint_A 1 \cdot dx\, dy$$

<u>Esempio</u>

Determinare il centro di massa geometrico del semicerchio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2, \; y \geq 0\}$

Qui $\mu(A) = \pi r^2/2$ e per ragioni di simmetria $x_c = 0$

comunque $\quad x_c = \frac{2}{\pi r^2} \iint_A x \, dx\, dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x \, dy\, dx = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2} \, dx = -\frac{2}{3\pi r^2} (r^2-x^2)^{3/2} \Big|_{-r}^{r} = 0$

$$y_c = \frac{2}{\pi r^2} \iint_A y \, dx\, dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y \, dy\, dx = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\, dx = \frac{4r}{3\pi}. \quad \blacksquare$$

- La massa m di una piastra $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (non necessariamente omogenea) di densità superficiale $\rho(x,y)$ può essere calcolata per mezzo delle seguenti formule ovvero :

$$\boxed{m = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy}$$

ovvero:

$$m = \iint_A \rho(x,y)\, dx\, dy$$

Se omogenea $\Rightarrow$ $\rho(x,y) = $ costante $= \frac{m}{\mu(A)}$

- Se un sottoinsieme (limitato) $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rappresenta una piastra (non necessariamente omogenea) di densità superficiale $\rho(x,y)$, le coordinate del centro di massa sono date da

$$\boxed{x_c = \frac{1}{m} \iint_A x\, \rho(x,y)\, dx\, dy \; ; \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_A y\, \rho(x,y)\, dx\, dy}$$

dove m è la massa della piastra.

ovvero:

$$m = \iint_A \rho(x,y)\,dx\,dy$$

se omogenea $\Rightarrow$ $\rho(x,y) = \text{costante} = \frac{m}{\mathcal{M}(A)}$

- Se un sottoinsieme (limitato) $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rappresenta una piastra (non necessariamente omogenea) di densità superficiale $\rho(x,y)$, le coordinate del centro di massa sono date da

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_A x\,\rho(x,y)\,dx\,dy \quad ; \quad y_c = \frac{1}{m}\iint_A y\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

dove m è la massa della piastra.

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ una piastra (non necessariamente omogenea) di massa m. Fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il momento d'inerzia di A rispetto a P_0 (o, equivalentemente, rispetto ad una retta passante per P_0 e perpendicolare al piano) è il numero:

$$I = \iint_A d(P,P_0)^2\,\rho(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad d(P,P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

ovvero:

$$m = \iint_A \rho(x,y)\,dx\,dy$$

se omogenea $\Rightarrow$ $\rho(x,y) = \text{costante} = \frac{m}{\mu(A)}$

- Se un sottoinsieme (limitato) $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rappresenta una piastra (non necessariamente omogenea) di densità superficiale $\rho(x,y)$, le coordinate del centro di massa sono date da

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_A x\,\rho(x,y)\,dx\,dy \quad ; \quad y_c = \frac{1}{m}\iint_A y\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

dove m è la massa della piastra.

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ una piastra (non necessariamente omogenea) di massa m. Fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il momento d'inerzia di A rispetto a P_0 (o, equivalentemente, rispetto ad una retta passante per P_0 e perpendicolare al piano) è il numero:

$$I = \iint_A d(P,P_0)^2\,\rho(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad d(P,P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Esempio

Calcoliamo il momento d'inerzia di un disco omogeneo di massa m e raggio r rispetto al centro. Denotiamo con A il disco e poniamolo, per semplicità, nel piano xy con centro l'origine degli assi

In questo caso (denotiamo con $\boxed{\delta = \delta(x,y) \text{ la densità superficiale}}$)

$$\boxed{I = \iint_A \underbrace{(x^2+y^2)}_{d^2(P,(0,0))} \overset{\text{Costante}}{\delta}\, dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coordinate} \\ \text{polari}}}{=} 2\pi\,\delta \int_0^r \rho^3\, d\rho = \frac{1}{2}\pi r^4 \underset{\substack{| \\ \frac{m}{\pi r^2}}}{\delta} = \frac{1}{2} m r^2.}$$

In questo caso (denotiamo con $\delta = \delta(x,y)$ la densità superficiale)

$$I = \iint_A \underbrace{(x^2+y^2)}_{d^2(P,(0,0))} \overset{\text{costante}}{\delta}\, dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coordinate} \\ \text{polari}}}{=} 2\pi\,\delta \int_0^r \rho^3\, d\rho = \frac{1}{2}\pi r^4 \underset{\substack{| \\ \frac{m}{\pi r^2}}}{\delta} = \frac{1}{2} m r^2.$$

Teorema di Pappo-Guldino (per i solidi di rotazione)

Sia A un insieme misurabile e limitato contenuto in un semipiano delimitato da una retta α. Il volume del solido che si ottiene ruotando A di un angolo di 2π intorno alla retta α è dato dal prodotto dell'area di A per la lunghezza della circonferenza percorsa dal centro di massa di A.

In questo caso (denotiamo con $\delta = \delta(x,y)$ la densità superficiale)

$$I = \iint_A \underbrace{(x^2+y^2)}_{d^2(P,(0,0))} \overset{\text{costante}}{\delta}\, dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coordinate} \\ \text{polari}}}{=} 2\pi\,\delta \int_0^r \rho^3\, d\rho = \frac{1}{2}\pi r^4 \underset{\substack{| \\ \frac{m}{\pi r^2}}}{\delta} = \frac{1}{2} m r^2 .$$

<u>Teorema di Pappo-Guldino</u> (per i solidi di rotazione)

Sia A un insieme misurabile e limitato contenuto in un semipiano delimitato da una retta α. Il volume del solido che si ottiene ruotando A di un angolo di 2π intorno alla retta α è dato dal prodotto dell'area di A per la lunghezza della circonferenza percorsa dal centro di massa di A.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il volume di una sfera di raggio r (con il teorema precedente). Tale sfera può essere ottenuta facendo fare un giro completo intorno all'asse x al semicerchio A di raggio r (che giace nel piano xy) di cui abbiamo determinato le coordinate del centro di massa in un esempio precedente.

In questo caso (denotiamo con $\delta = \delta(x,y)$ le densità superficiale)

$$I = \iint_A \underbrace{(x^2+y^2)}_{d^2(\underline{x},(0,0))} \overset{\text{costante}}{\delta}\, dx\,dy \underset{\text{Coordinate polari}}{=} 2\pi\delta \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{1}{2}\pi r^4 \underset{\frac{m}{\pi r^2}}{\delta} = \frac{1}{2} m r^2.$$

<u>Teorema di Pappo-Guldino</u> (per i solidi di rotazione)

Sia A un insieme misurabile e limitato contenuto in un semipiano delimitato da una retta α. Il volume del solido che si ottiene ruotando A di un angolo di 2π intorno alla retta α è dato dal prodotto dell'area di A per la lunghezza della circonferenza percorsa dal centro di massa di A.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il volume di una sfera di raggio r (con il teorema precedente). Tale sfera può essere ottenuta facendo fare un giro completo intorno all'asse x al semicerchio A di raggio r (che giace nel piano xy) di cui abbiamo determinato le coordinate del centro di massa in un esempio precedente.

Poiché la distanza y_c del centro di massa di A dall'asse x (asse di rotazione) è $\boxed{4r/3\pi}$

$\Rightarrow$ tale punto, nella rotazione, descrive una circonferenza di lunghezza $\boxed{2\pi\left(4r/3\pi\right)}$

In questo caso (denotiamo con $\delta = \delta(x,y)$ la densità superficiale)

$$I = \iint_A \underbrace{(x^2+y^2)}_{d^2(\underline{x},(0,0))} \overset{\text{costante}}{\delta}\, dx\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{coordinate}\\ \text{polari}}}{=} 2\pi\,\delta \int_0^r \rho^3\, d\rho = \frac{1}{2}\pi r^4 \underset{\substack{|\\ \frac{m}{\pi r^2}}}{\delta} = \frac{1}{2} m r^2.$$

<u>Teorema di Pappo-Guldino (per i solidi di rotazione)</u>

Sia A un insieme misurabile e limitato contenuto in un semipiano delimitato da una retta α. Il volume del solido che si ottiene ruotando A di un angolo di 2π intorno alla retta α è dato dal prodotto dell'area di A per la lunghezza della circonferenza percorsa dal centro di massa di A.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il volume di una sfera di raggio r (con il teorema precedente). Tale sfera può essere ottenuta facendo fare un giro completo intorno all'asse x al semicerchio A di raggio r (che giace nel piano xy) di cui abbiamo determinato le coordinate del centro di massa in un esempio precedente.

Poiché la distanza y_c del centro di massa di A dall'asse x (asse di rotazione) è $4r/3\pi$

$\Rightarrow$ tale punto, nella rotazione, descrive una circonferenza di lunghezza $2\pi\,(4r/3\pi)$ $\boxed{\Rightarrow \text{ visto che } \mu(A) = \pi r^2/2 \text{ segue } V(\text{sfera}) = \frac{\pi r^2}{2}\cdot\frac{8r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3}$

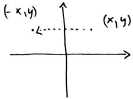
Simmetrie del piano

Una simmetria $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una mappa biunivoca tale che $S(S(x,y)) = (x,y)$ e tale che mantiene le distanze ovvero $d(P, P_0) = d(S(P), S(P_0))$

Simmetrie del piano

Una simmetria $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una mappa biunivoca tale che $S(S(x,y)) = (x,y)$ e tale che mantiene le distanze ovvero $d(P, P_0) = d(S(P), S(P_0))$

Esempi

1. 

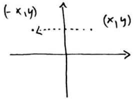
$$\boxed{S_1(x,y) = (-x,y) \quad \text{simmetria rispetto all'asse } y}$$

Simmetrie del piano

Una simmetria $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una mappa biunivoca tale che $S(S(x,y)) = (x,y)$ e tale che mantiene le distanze ovvero $d(P, P_0) = d(S(P), S(P_0))$

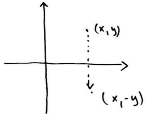
Esempi

1.



$S_1(x,y) = (-x,y)$ simmetria rispetto all'asse y.

2.

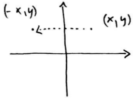


$\boxed{S_2(x,y) = (x,-y) \quad \text{simmetria rispetto all'asse } x}$

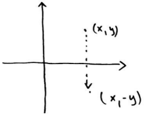
Simmetrie del piano

Una simmetria $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una mappa biunivoca tale che $S(S(x,y)) = (x,y)$ e tale che mantiene le distanze ovvero $d(P, P_0) = d(S(P), S(P_0))$

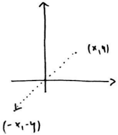
Esempi

1. 

$S_1(x,y) = (-x,y)$ simmetria rispetto all'asse y

2. 

$S_2(x,y) = (x,-y)$ simmetria rispetto all'asse x

3. 

$S_3(x,y) = (-x,-y)$ simmetria rispetto all'origine

$S_3 = S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$

Definizione

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice "pari" rispetto alla simmetria S se: $f(S(x,y)) = f(x,y)$

si dice "dispari" rispetto alla simmetria S se: $f(S(x,y)) = -f(x,y)$

Esempi

$f(x,y) = x$ dispari rispetto a S_1; pari rispetto a S_2; dispari rispetto a S_3

$f(x,y) = xy$ dispari rispetto a S_1; dispari rispetto a S_2; pari rispetto a S_3

<u>Definizione</u>

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice "<u>pari</u>" rispetto alla simmetria S se: $f(S(x,y)) = f(x,y)$

si dice "<u>dispari</u>" rispetto alla simmetria S se: $f(S(x,y)) = -f(x,y)$

<u>Esempi</u>

$f(x,y) = x$ $\left.\begin{array}{r}\text{dispari rispetto a } S_1 \\ \text{pari rispetto a } S_2 \\ \text{dispari rispetto a } S_3\end{array}\right\}$; $f(x,y) = xy$ $\left.\begin{array}{r}\text{dispari rispetto a } S_1 \\ \text{dispari rispetto a } S_2 \\ \text{pari rispetto a } S_3\end{array}\right\}$

<u>Proposizione</u>

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, simmetrico rispetto alla simmetria S e $f: A \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora:

1. $\boxed{\text{Se } f \text{ è dispari rispetto alla simmetria } S \Rightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = 0}$

Definizione

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice "pari" rispetto alla simmetria S se: $f(S(x,y)) = f(x,y)$

si dice "dispari" rispetto alla simmetria S se: $f(S(x,y)) = -f(x,y)$

Esempi

$f(x,y) = x$ $\left.\begin{array}{l} \text{dispari rispetto a } S_1 \\ \text{pari rispetto a } S_2 \\ \text{dispari rispetto a } S_3 \end{array}\right\}$; $f(x,y) = xy$ $\left.\begin{array}{l} \text{dispari rispetto a } S_1 \\ \text{dispari rispetto a } S_2 \\ \text{pari rispetto a } S_3 \end{array}\right\}$

Proposizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, simmetrico rispetto alla simmetria S e $f : A \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora:

1. Se f è dispari rispetto alla simmetria S $\Rightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = 0$

2. Se f è pari rispetto alla simmetria S $\Rightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = 2 \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy$

dove $A = A_1 \cup S(A_1)$

Definizione

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice "pari" rispetto alla simmetria S se: $f(S(x,y)) = f(x,y)$

si dice "dispari" rispetto alla simmetria S se: $f(S(x,y)) = -f(x,y)$

Esempi

$f(x,y) = x$ $\left.\begin{array}{l} \text{dispari rispetto a } S_1 \\ \text{pari rispetto a } S_2 \\ \text{dispari rispetto a } S_3 \end{array}\right\}$; $f(x,y) = xy$ $\left.\begin{array}{l} \text{dispari rispetto a } S_1 \\ \text{dispari rispetto a } S_2 \\ \text{pari rispetto a } S_3 \end{array}\right\}$

Proposizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, simmetrico rispetto alla simmetria S e $f: A \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora:

1. Se f è dispari rispetto alla simmetria S $\Rightarrow$ $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = 0$
2. Se f è pari rispetto alla simmetria S $\Rightarrow$ $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy$

dove $A = A_1 \cup S(A_1)$

A è simmetrico rispetto a S_1

Esempio $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$

$f(x,y) = x$ dispari rispetto $S_1(x,y) = (-x,y)$

$$\iint_A (x+y^2)\,dx\,dy = \iint_A x\,dx\,dy + \iint_A y^2\,dx\,dy = 0 + \iint_A y^2\,dx\,dy = 2\iint_{A_1} y^2\,dx\,dy$$

$f(x,y) = y^2$ pari rispetto S_1