# Integrazione multipla in $\mathbb{R}^2$ (Integrali doppi) -parte 5-

Luca Bisconti



## Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

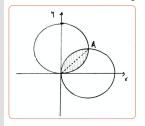
Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli studenti e alle studentesse sotto licenza:

**Creative Commons BY-NC-ND** 

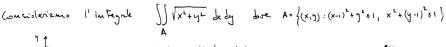
Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate

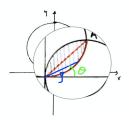


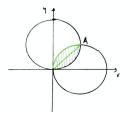
Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

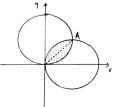


Considerizmo l'integral 
$$\iint \sqrt{x^{2}+y^{2}} \, dx \, dy$$
 bre  $A = \{(x,y) : (x-1)^{2}+y^{2} \in I, x^{2}+(y-1)^{2} \in I\}$ 









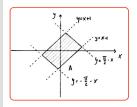
Usualo le cordinate pobai troviano:

$$x^2 + (y-1)^2 \le 1 \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 \le 1 \iff y^2 - 2y \le 2y + 1 \le 1 \implies y^2 - 2y \le 2y + 1 \le 1 \implies y^2 - 2y \le 2y + 1$$

e il businio A diverte l'immersione dell'insience D: 
$$D = \left\{ (f, \theta) \in \mathbb{R}^L : 0 \le f \le 2 \text{ sen}(\theta), 0 \le \theta \le \overline{L_{\alpha}} \right\} \cup \left\{ (f, \theta) : 0 \le f \le 2 \text{ GaD}, \frac{1}{4} \le \theta \le \overline{L_{\alpha}} \right\}$$

#### Esemplo

(216)20 il sequente integrale 
$$\iint_A \cos(x+y) e^{x-y} dx dy dose A e la pornione di piano Compresa tra le rette di caprazione  $y = \overline{\mathbb{Z}}^{-x}, y = -\overline{\mathbb{Z}}^{-x}, y = x-1 e y = x+1$  ovuero  $A = \{(x,y) \in \mathbb{K}^L : -1 \le x - y \le 1, -\overline{\mathbb{Z}} \le x + y \le \overline{\mathbb{Z}} \}$$$

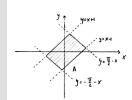


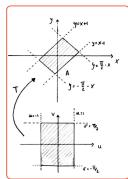
#### Esemplo

(216br. il sequente integral 
$$\iint_A cos(x+y) e^{x-y} dx dy dove A e la porsione$$

do pieno Comprese tra le rette di cquezione  $y = \overline{2} - x$ ,  $y = -\overline{2} - x$ , y = x - 1 e y = x + 1

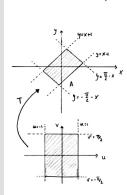
Usizmo il Bunti amento lo variatili  $\begin{cases} x = \frac{M+J}{2} \\ J = \frac{J-M}{2} \end{cases}$ 





Usizmo il Quali amenta la variatili { x = \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{2} \text{ che in Parliabe prostua / M=X-y e diconseguenza il Lominos è l'immagine, tranite le mappe T, le lominio D mel pieno Mil definite come D= { (n, v) = 12 : -1 < u < 1 , - I < v < I }

(216)20. il sequente in tegrh 
$$\iint_A \cos(x+y) e^{x-y} dx dy dose A e le portione du pieno Comprese tre le rette di caprezione  $y = \overline{\mathbb{Z}}^{-x}, y = -\overline{\mathbb{Z}}^{-x}, y = x-1$  e  $y = x+1$  ovvero  $A = \begin{cases} (x,y) \in \mathbb{K}^L : -1 \le x - y \le 1 \\ -1 \le x - y \le 1 \end{cases}$   $(u,v) \stackrel{\longrightarrow}{\longleftarrow} T(u,v) = (\underbrace{u,v},\underbrace{v-u}_L)$$$



Usizmo : | Runti ament lo variatiti 
$$\begin{cases} x = \frac{M+J}{2} \\ J = \frac{J-M}{2} \end{cases}$$
 che in

Parliabe prostule / M= X-y e di conseguenza il Laminos

A è l'immagine, tranite le mappet, le bominio D mel pisus MIV

. Det un insieme de miser non nolle A E Kt, il too centre de messe (geometris) è il pouts de Coordinate (xc, yc) che he per escisse le medie delle escisse e per ordinate le medie delle ordinate:

- . Ost un insieme de miser non nulle A = Kt, il tro centre de messe (geometris) è il punts de coordinate (xc, yc) che he per socissa le medie delle ascisse
  - e pa ordinate le medie delle ordinate:

$$\times_{c} = \frac{1}{\mu(a)} \iint_{A} \times dx dy$$
,  $\Im_{c} = \frac{1}{\mu(a)} \iint_{A} y dx dy$  by  $\Im_{c} = \iint_{A} 1 \cdot dx dy$ 

## E sempis

Determinare il cento la massa geometrio del semicarchio (X4) e 1R1: x2+y1 x r2, y >0}

. Ost un insieme de miser non nelle A = Kt, il to centre de messe (geometris)
è il pouts de Coordinate (xc, yc) che he per escisse le medie delle escisse
e per ordinate le medie delle ordinate:

## E sempis

Determinare il cento La massa geometrió del semicorchio A= (Ky) e 182: x2+y2 6 x2, y 20}

Qui 
$$M(A) = \pi r/2$$
 e per vegloui à simmetrie  $x_c = 0$ 

Comunque  $x_c = \frac{2}{\pi r^2} \iint_A x dx dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} \int_{-r}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \frac{2}{3\pi r^2} (r^2 - x^2)^{3/2} \int_{-r}^{r} = 0$ 

. Ost un insieme de misera non nulle A ≤ Kt, il to centre de messe (geometris)

è il pourts de coordinate (xc, yc) che he per escisse le medie delle escisse

e per ordinate le medie delle ordinate:

$$\times_{c} = \frac{1}{\mu(A)} \iint_{A} \times dx dy$$
,  $\Im_{c} = \frac{1}{\mu(A)} \iint_{A} y dx dy$  by  $\Im_{c} = \iint_{A} (-dx dy)$ 

## E sempis

Determinare il cento Li massa geometrio del semicorchio A= (Ky) e Rt: x2+y2 5 r2, y >0}

Qui M(A)= Tr/2 e per regioni à simmetrie x ==0

Comunque 
$$x_c = \frac{z}{\pi r^2} \iint_A x \, dx \, dy = \frac{z}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} \int_{3}^{1} x \, dy \, dx = \frac{z}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} x \, \sqrt{r^2 \times r^2} \, dx = -\frac{z}{3\pi r^2} (r^2 - x^2)^{3/2} \int_{-r}^{r} = 0$$

$$\int_{C} = \frac{2}{\pi r^{L}} \iint_{A} y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi r^{L}} \int_{-r}^{r} \int_{0}^{\sqrt{r^{L} - x^{L}}} dy \, dx = \frac{1}{\pi r^{L}} \int_{-r}^{r} (r^{L} - x^{L}) \, dx = \frac{4r}{3\pi}.$$

. Osts un insieme de miser non nulle A = 18th, il to centre de messe (geometris) è il pouts de Corolinate (xc, yc) che ha per escissa le medie delle escisse e per ordinate le medie delle ordinate:

$$\times_{c} = \frac{1}{\mu(A)} \iint_{A} \times dx dy$$
,  $\iint_{C} \frac{1}{\mu(A)} \iint_{A} y dx dy$  bore  $M(A) = \iint_{A} 1 \cdot dx dy$ 

## E sempis

Determinance il conto la massa geometrio del semicarchio A= (Ky) e 1K1: x2+y25 r2, y >0}

Qui M(A) = Tr7/2 e pa regioni à simmetrie x ==0

$$\int_{C} -\frac{2}{\pi r \iota} \iint y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi r \iota} \int_{-r}^{r} \int_{-r}^{r} \int_{0}^{r} y \, dy \, dx = \frac{1}{\pi r \iota} \int_{-r}^{r} (r^{2} - x^{2}) \, dx = \frac{4r}{3\pi}.$$

· Le massa m do une piastra A S R2 ( Mon ne lessoriemente omogenea) de dentité superhiciale f(x,y) poi essere calculate per moin delle seguente formule

m = | [(x,y) & x &y

se un solbinsieme (limitet.) A sille soppresente une piestre ( non neasseremente omoganee

di densità superficiale p(1,19), le Gordinate del cento d' mayra sono date de

dove m è le messe belle piestre.

Se om junes => g(x,y) = 6 strute = m

· Se un solbinsieure (limitet.) A SIN vappresente une piestra (non neasserèmente omoganee)

di densità superficiale p(1,19), le Gordinate del cento d'unappre sono date de

dove m è le messe belle piestre.

• Sie A  $\leq$  K<sup>2</sup> une pristie (non neassziement omogenee) di messe un. Fisseto un ponti  $f_0 = (x_0, y_0) \in K^2$ , il momento d'inere's d A rispetto d (o, equivalentementi, vispetto ad une rette pessente per d e perpendiabre el pieco) è il mumero:  $T = \int \int d(r_1 r_0)^2 f(x_1 y_0)^{-1} x \, dy \qquad dore \qquad d(r_1 r_0) = \sqrt{(x_1 x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ 

0 4440 1

Se emplouse =) f(x,y) = Gestimble• Se omplouse =) f(x,y) = Gestimble• Se omplouse =) f(x,y) = Gestimbledi densible superficiale f(x,y), le Gordinate del cento d'unaryor sono dete de

dove m è le massa lelle piastra.

. Sie A  $\leq$  IRt une pizztre (non neassoriement omogenee) di massa un. Fissato un ponta  $P_0 = (x_0, y_0) \in IR^{\perp}$ , il momento d'inercia di A rispetto a fo (o, equivalentementi, vispetto ad une rette passante per Po e perpodiabre al piano) è il mumero:  $I = \iint d(P_1R_1)^{\perp} f(x_1y_1)^{\perp} x dy \qquad dore \qquad d(P_1R_2) = \sqrt{(x_1x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ 

#### Esempio

CalGliamo il momento d'inersio di un disco omogeneo di massa me raggio r nispetto al culto. Denotriano con A il disco a poniamola, por semplicità, nal piano xy con cuntro l'origina degli assi

In questi aso
$$\begin{bmatrix}
I = \iint \frac{(x^{L} + y^{L})}{S} \int_{0}^{1} dy = 2\pi \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} dy = \frac{1}{2}\pi r^{4} d = \frac{1}{2}m r^{2}$$
(denotions con
$$\frac{1}{S} = \int_{0}^{1} \frac{(x^{L} + y^{L})}{S} \int_{0}^{1} dy = 2\pi \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} dy = \frac{1}{2}\pi r^{4} d = \frac{1}{2}m r^{2}$$
(denotions con
$$\frac{1}{S} = \int_{0}^{1} \frac{(x^{L} + y^{L})}{S} \int_{0}^{1} dy = 2\pi \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} dy = \frac{1}{2}\pi r^{4} d = \frac{1}{2}m r^{2}$$
(denotions con
$$\frac{1}{S} = \int_{0}^{1} \frac{(x^{L} + y^{L})}{S} \int_{0}^{1} dy = 2\pi \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} dy = \frac{1}{2}\pi r^{4} d = \frac{1}{2}m r^{2}$$
(denotions con
$$\frac{1}{S} = \int_{0}^{1} \frac{(x^{L} + y^{L})}{S} \int_{0}^{1} dy = 2\pi \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} dy = \frac{1}{2}\pi r^{4} d = \frac{1}{2}m r^{2}$$
(denotions con
$$\frac{1}{S} = \int_{0}^{1} \frac{(x^{L} + y^{L})}{S} \int_{0}^{1} dy = 2\pi \int_{0}^{1} \frac{1}{S} \int_{0}^{1} dy = \frac{1}{2}\pi r^{4} d = \frac{1}{2}m r^{2}$$
(below the problem) (a)

In questices 
$$I = \iint_{A} \frac{(x^2 + y^2)}{dt} \int_{a}^{2\pi} \int_{a}^{2\pi}$$

## Teoreme & Pappo-Gulolino (per i salidi di rotazione)

SIE A un insieme misovabile e limitato Gutenuto in un amipiano delimitato de une relte d. Il volume del solido che si ottiene ruotando A di un angulo de añ intorno alla retta de à dato del prodotto dell'area di A per le lunglette delle Circulerenze pergosa del cento di massa di A.

In questices 
$$I = \iint_{A} \frac{(x^{2}+y^{2})}{dt} \int_{a}^{2\pi} \int_{a}^{2\pi$$

## Teoreme & Pappo-Gulolino (per i sdioli di rotazione)

Sie A un insieme misorabile e limitato contenuto in un amipiano delimitato de une relte d. Il volume del colido che si ottiene ruotando A di un anydo di añ intorno alla relta de à deto del prodotto dell'area d'A per le lunglesse delle curculerenze pergrae del cento di massa di A.

#### Esempio

Alblismo il volume è une ster di reggio r (buil teoreme preadente). Take stere può essere o Hernte facuolo fare un giro completo intorno ell'esse x al somicarchio A di reggio r (che gira mel pièno xy) di coi ebbieno determinato le coordinate del centro di massa in un esempio precedente.

In questi as 
$$I = \iint_A \frac{(x^2 + y^2)}{5} \frac{(x^2$$

## Teoreme & Pappo-Gulolino (per i solioli di rotazione)

Sie A un insieme misurabile e limitats Gutenuto in un amipiano delimitato de une relte d. Il volume del colido che si ottiene ruotando A di un anydo de añ intorno alla retta de à deto del prodotto dell'area d'A per le lunglesse delle circulerenze pergrae del cento do massa di A.

#### Esempio

Calcolizmo il volume & une ster & reggio r (Guil teoreme precidente). Tole ster può essere o Hente facudo fore un giro completo intorno ell'esse x el semicarchio A & reggio r (Ch gira mel pièno xy) do cui ebbieno determinato le coordinate del centro di massa in un esempio precedente.

Poiché le distante ye del centre de massie L' A dell'asse X (asse Li votezione) à 47/30 => tale pouto, melle votezione, dessive une circularente de longlette 20 (47/30)

In questi cero 
$$I = \iint_A \frac{(x^2 + y^2)}{s} \frac{\sin t}{1 \times t} = \frac{1}{2} \pi r^4 d = \frac{1}{2}$$

## Teoreme & Pappo-Gulolino (per i solidi di rotazione)

Sie A un insieme missibile e limitit. Contenuto in un amipieno delimitito de une relte d. Il volume del solido che si ottiene ruotendo A Li un engolo Li eti intorno elle relte d è deto del prodotto dell'erez d'A per le lunglette delle Circulterenze perGrez del cento la massa di A.

alcolizmo il volume è une stere è reggio r (Guil teoreme preadente). Tale stere può essere o Hente facudo fare un giro completo intorno ell'esse x al semicarchio A è reggio r (che gira mel pieno xy) di cui abbieno diferminato le coordinate del centro di massa in un esempio precedente. Poiché le distança y del cento de maria l' A dell'asse x (asse 1 votazione) à 41/35 => tale pouto, mello voto home, descrive une circularente do longlette at (4 m/st) > visto che M(A)= TT /2 segre V(stee)= TT. 3" = 9.7"

Simmetric del piano

Une simulties 
$$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
 is one mapper bivolvoke tole  $S(S(X,Y)) = (X,Y) \in \mathbb{R}$   
(be mantioned by distance overod(P, P<sub>0</sub>) = d(S(P), S(P<sub>0</sub>))

Une simulative  $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  è une mappe bionivose tate de S(S(X,Y)) = (X,Y) e tale (he mantione le distance overo  $d(P,P_0) = d(S(P),S(P_0))$ 

#### Simmetric del piano

Une simulative  $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$  è une mappe bivuivole tale che S(S(x,y))=(x,y) e tale (he mautième le distance overo d(P, P<sub>0</sub>) = d(S(P), S(P<sub>0</sub>))

#### E sempi

1. (\*14) (\*14)

٤.

#### Simmetric del piano

Une simulative  $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  à une mappe bisuivole tale che S(S(x,y)) = (x,y) e tale (he mantième le distance overod(P, P<sub>0</sub>) = d(S(P), S(P<sub>0</sub>))

#### E sempi

1. (- x,y) (x,y) →

2. (x,y) (x,-y)

). (\*,1)

$$S_3(x,y) = (-x,-y)$$
 simmethe vispetti all origine  $S_3 = S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$ 

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$
 si Lia "pan'" vispetto elle simmetria  $S$  se:  $f(S(x,y)) = f(x,y)$ 

Si Lia "Lispai" rispetto elle simmetria  $S$  se:  $f(S(x,y)) = -f(x,y)$ 

#### Esempi

$$f(x,y) = x$$
 dispori rispetto e  $S_1$  pori rispetto e  $S_2$  dispori rispetto e  $S_3$  dispori rispetto e  $S_3$  pori rispetto e  $S_3$ 

#### Definizione

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$
 si dia "pan'" vispetto elle simmetria  $S$  se:  $f(S(x,y)) = f(x,y)$ 

si dia "Lispan" vispetto elle simmetria  $S$  se:  $f(S(x,y)) = -f(x,y)$ 

#### Esempi

$$f(x_1y) = x$$
 disposi vispetto e  $S_1$   $f(x_1y) = xy$  disposi vispetto e  $S_2$  disposi vispetto e  $S_3$  disposi vispetto e  $S_3$  posi vispetto e  $S_3$ 

## Proposizione

Sie AsIK regolar, simmetais nispetto elle simmetais Se f: A -> K integrabile, Alber:

#### Definizione

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^{2} \rightarrow \mathbb{R}$$
 si Lie "par" vispetto elle simmetria  $S$  se:  $f(S(x,y)) - f(x,y)$ 

Si Lie "Liepzi" vispetto elle simmetria  $S$  se:  $f(S(x,y)) - f(x,y)$ 

#### Esempi

$$f(x_1y) = x$$
 dispari vispetto e  $s_1$   
 $p_2n'$  vispetto e  $s_2$   
 $f(x_1y) = xy$  dispari vispetto e  $s_2$   
 $f(x_1y) = xy$  dispari vispetto e  $s_2$   
 $f(x_1y) = xy$  dispari vispetto e  $s_2$ 

#### Proposizione

Sie A = 1K2 regolar, simmetaio nispetto elle simmetais S e f: A -> 1K integrabile. Albe:

2. Se 
$$f \ge pani$$
 vispetto alle simmetriz  $S \Rightarrow \iint f(x_1) dx dy = 2 \iint f(x_1) dx dy$ 
dose  $A = A_1 \cup S(A_1)$ 

### Definizione

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$
 si Liepzi' vispetto elle simmetrie  $S$  se:  $f(S(x,y)) = f(x,y)$ 

Si Lie "Liepzi' vispetto elle simmetrie  $S$  se:  $f(S(x,y)) = f(x,y)$ 

#### Esempi

$$f(x_1y) = x$$
 dispar vispetto e  $x_1$   $f(x_1y) = xy$  dispar vispetto e  $x_2$  dispar vispetto e  $x_2$  dispar vispetto e  $x_3$  dispar vispetto e  $x_3$ 

#### Proposizione

Sie AsIK regolar, simmetrio nispetto elle simmetria Se f: A -> K integrabile. Albe:

- 1. Se f è l'spori nispetto elle simmetrie s => II f(x,y) dx dy =0
- 2. Se f i peni rispetto alle simmetrie S => \( \int f(x\_1) \) \( \dy = 2 \) \( f(x\_1) \) \( \dy \) \( \dy

#### A è simmetrico rispetto a S<sub>1</sub>

$$\frac{\text{Essumpto}}{\iint (x+y^{\perp}) dx dy} = \iint x dx dy + \iint y^{\perp} dx dy = 0 + \iint y^{\perp} dx dy = z \iint y^{\perp} dx dy = f(x,y) = y^{\perp} part rispertors}$$