8 maggio 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di venerdì 8 maggio 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Concludiamo gli esempi di applicazione della logica dei predicati con la discussione di un modello della riproduzione sessuata.

Consideriamo le seguenti premesse:

(i) Ognuno è maschio oppure femmina;
(ii) Chi è femmina non è maschio;
(iii) Ognuno ha un genitore maschio;
(iv) Ognuno ha un genitore femmina;

Ci chiediamo se da tali premesse si possa trarre come conseguenza logica la

(v) Ognuno ha un genitore che non è femmina;

e/o la

(vi) Esiste qualcuno che è genitore di tutti.

Consideriamo un linguaggio di logica dei predicati con due simboli di predicato unario (M, F) e un simbolo di predicato binario (G), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

$\mathrm{M}(x) \coloneqq x$ è maschio;
$\mathrm{F}(x) \coloneqq x$ è femmina;
$\mathrm{G}(x,y) \coloneqq x$ è genitore di y.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $\quad(\forall x)(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x))$;
(ii) $\quad(\forall x)(\mathrm{F}(x) \to \neg\mathrm{M}(x))$;
(iii) $\quad(\forall x)(\exists y)(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x))$;
(iv) $\quad(\forall x)(\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x))$;

e la prima conclusione diventa

(v) $\quad(\forall x)(\exists y)(\neg\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x))$.

Dobbiamo pertanto vedere se

$$(\forall x)(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)) \wedge (\forall x)(\mathrm{F}(x) \to \neg\mathrm{M}(x)) \wedge$$
$$\wedge (\forall x)(\exists y)(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)) \wedge (\forall x)(\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)) \vDash (\forall x)(\exists y)(\neg\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)) .$$

e questo è vero se e soltanto se la formula φ definita da

$$\varphi \coloneqq (\forall x)(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)) \wedge (\forall x)(\mathrm{F}(x) \to \neg\mathrm{M}(x)) \wedge$$
$$\wedge (\forall x)(\exists y)(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)) \wedge (\forall x)(\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)) \wedge \neg(\forall x)(\exists y)(\neg\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x))$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa in modo che la parte della formula che segue i quantificatori sia in forma normale congiuntiva:

$$\varphi \equiv (\forall x)(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{M}(x)) \wedge$$
$$\wedge (\forall x)(\exists y)(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)) \wedge (\forall x)(\exists y)(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)) \wedge (\exists x)(\forall y)(\mathrm{F}(y) \vee \neg\mathrm{G}(y,x)) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{M}(x)) \wedge$$
$$\wedge (\forall x)(\exists y)(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)) \wedge (\forall x)(\exists z)(\mathrm{F}(z) \wedge \mathrm{G}(z,x)) \wedge (\exists t)(\forall x)(\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{G}(x,t)) \equiv$$
$$\equiv (\exists t)(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)) \wedge (\neg\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{M}(x)) \wedge$$
$$\wedge (\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)) \wedge (\mathrm{F}(z) \wedge \mathrm{G}(z,x)) \wedge (\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{G}(x,t))$$

Per la skolemizzazione possiamo introdurre un simbolo di costante c che sostituirà la variabile individuale t e due simboli di funzione $h(x)$ e $k(x)$ che sostituiranno rispettivamente la variabile individuale y e la variabile individuale z ; si ottiene la formula

$$((\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)) \wedge (\neg\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{M}(x)) \wedge$$
$$\wedge (\mathrm{M}(h(x)) \wedge \mathrm{G}(h(x),x)) \wedge (\mathrm{F}(k(x)) \wedge \mathrm{G}(k(x),x)) \wedge (\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{G}(x,c))$$

che dà luogo al seguente schema di clausole:

$$\{\{\mathrm{F}(x), \mathrm{M}(x)\}, \{\neg\mathrm{F}(x), \neg\mathrm{M}(x)\}, \{\mathrm{M}(h(x))\}, \{\mathrm{G}(h(x), x)\}, \{\mathrm{F}(k(x))\}, \{\mathrm{G}(k(x), x)\}, \{\mathrm{F}(x), \neg\mathrm{G}(x, c)\}\}\,.$$

Poiché l’universo di Herbrandt è infinito (vi appartengono ad esempio i termini c, $h(c)$, $k(c)$, $h(h(c))$, $h(k(c))$, $k(h(c))$, $k(k(c))$, $\dots$) non possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam ma soltanto tentare una confutazione rapida, assegnando alla x (in clausole astutamente scelte) elementi (scelti in modo altrettanto astuto) dell’universo di Herbrand.

Per chiarezza, poniamo:

$$\mathcal{C}_1(x) \coloneqq \{\mathrm{F}(x), \mathrm{M}(x)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_2(x) \coloneqq \{\neg\mathrm{F}(x), \neg\mathrm{M}(x)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_3(x) \coloneqq \{\mathrm{M}(h(x))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_4(x) \coloneqq \{\mathrm{G}(h(x), x)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_5(x) \coloneqq \{\mathrm{F}(k(x))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_6(x) \coloneqq \{\mathrm{G}(k(x), x)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_7(x) \coloneqq \{\mathrm{F}(x), \neg\mathrm{G}(x, c)\}\,;$$

Una possibile confutazione rapida è:

$$\mathcal{C}_8 \coloneqq \mathcal{C}_7(h(c)) = \{\mathrm{F}(h(c)), \neg\mathrm{G}(h(c), c)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_9 \coloneqq \mathcal{C}_4(c) = \{\mathrm{G}(h(c), c)\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{10} \coloneqq \mathrm{Res}_{\mathrm{G}(h(c),\, c)}(\mathcal{C}_8, \mathcal{C}_9) = \{\mathrm{F}(h(c))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{11} \coloneqq \mathcal{C}_2(h(c)) = \{\neg\mathrm{F}(h(c)), \neg\mathrm{M}(h(c))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{12} \coloneqq \mathrm{Res}_{\mathrm{F}(h(c))}(\mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{11}) = \{\neg\mathrm{M}(h(c))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{13} \coloneqq \mathcal{C}_3(c) = \{\mathrm{M}(h(c))\}\,;$$
$$\mathcal{C}_{14} \coloneqq \mathrm{Res}_{\mathrm{M}(h(c))}(\mathcal{C}_{12}, \mathcal{C}_{13}) = [\,]\,.$$

Abbiamo così provato che dalle (i), (ii), (iii) e (iv) si può dedurre logicamente la (v).

Nello stesso linguaggio di logica dei predicati, nel quale le premesse sono state “tradotte” come segue:

(i) $\quad(\forall x)\big(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)\big)\,;$
(ii) $\quad(\forall x)\big(\mathrm{F}(x) \to \neg\mathrm{M}(x)\big)\,;$
(iii) $\quad(\forall x)(\exists y)\big(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y, x)\big)\,;$
(iv) $\quad(\forall x)(\exists y)\big(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y, x)\big)\,;$

la seconda conclusione diventa

(vi) $\quad(\exists x)(\forall y)\mathrm{G}(x, y)\,.$

Dobbiamo adesso vedere se

$$(\forall x)\big(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\mathrm{F}(x) \rightarrow \neg\mathrm{M}(x)\big) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall x)(\exists y)\big(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)\big) \wedge (\forall x)(\exists y)\big(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)\big) \vDash (\exists x)(\forall y)\mathrm{G}(x,y)$$

e questo è vero se e soltanto se la formula φ definita da

$$\varphi \coloneqq (\forall x)\big(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\mathrm{F}(x) \rightarrow \neg\mathrm{M}(x)\big) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall x)(\exists y)\big(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)\big) \wedge (\forall x)(\exists y)\big(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)\big) \wedge \neg(\exists x)(\forall y)\mathrm{G}(x,y)$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa in modo che la parte della formula che segue i quantificatori sia in forma normale congiuntiva:

$$(\forall x)\big(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\mathrm{F}(x) \rightarrow \neg\mathrm{M}(x)\big) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall x)(\exists y)\big(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)\big) \wedge (\forall x)(\exists y)\big(\mathrm{F}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)\big) \wedge (\forall x)(\exists y)\neg\mathrm{G}(x,y) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)\big(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\neg\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{M}(x)\big) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall x)(\exists y)\big(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x)\big) \wedge (\forall x)(\exists z)\big(\mathrm{F}(z) \wedge \mathrm{G}(z,x)\big) \wedge (\forall x)(\exists t)\neg\mathrm{G}(x,t) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)\big(\big(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{M}(x)\big) \wedge$$
$$\wedge\, \mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{G}(y,x) \wedge \mathrm{F}(z) \wedge \mathrm{G}(z,x) \wedge \neg\mathrm{G}(x,t)\big)\,.$$

Per la skolemizzazione dobbiamo introdurre tre simboli di funzione $h(x)$, $k(x)$ e $w(x)$ che sostituiranno rispettivamente la variabile individuale y, la variabile individuale z e la variabile individuale t ; si ottiene la formula

$$\big(\big(\mathrm{F}(x) \vee \mathrm{M}(x)\big) \wedge \big(\neg\mathrm{F}(x) \vee \neg\mathrm{M}(x)\big) \wedge$$
$$\wedge\, \mathrm{M}(h(x)) \wedge \mathrm{G}(h(x),x) \wedge \mathrm{F}(k(x)) \wedge \mathrm{G}(k(x),x) \wedge \neg\mathrm{G}(x,w(x))\big)$$

che dà luogo al seguente schema di clausole:

$$\{\{\mathrm{F}(x),\mathrm{M}(x)\},\ \{\neg\mathrm{F}(x),\neg\mathrm{M}(x)\},\ \{\mathrm{M}(h(x))\},\{\mathrm{G}(h(x),x)\},\ \{\mathrm{F}(k(x))\},\{\mathrm{G}(k(x),x)\},\ \{\neg\mathrm{G}(x,w(x))\}\}\,.$$

Poiché l’universo di Herbrandt è infinito (dobbiamo infatti introdurre un simbolo di costante c, ed otterremo di conseguenza i termini c, $h(c)$, $k(c)$, $h(h(c))$, $h(k(c))$, $k(h(c))$, $k(k(c))$, $\ldots$) non possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam; questa volta però nessuna confutazione è possibile, perché la formula ottenuta è soddisfacibile (e quindi la (vi) non è conseguenza logica delle (i), (ii), (iii) e (iv)).

Per dimostrare che la formula è soddisfacibile, basta costruire un’opportuna struttura ***finita*** adeguata al linguaggio e dare un’interpretazione nella quale tutte le clausole sono soddisfatte. Scegliamo un insieme con quattro elementi m_1, m_2, f_1, f_2, e definiamo tre funzioni $h_0(x)$, $k_0(x)$ e $w_0(x)$ (nelle quali interpreteremo rispettivamente i simboli di funzione $h(x)$, $k(x)$ e $w(x)$) come segue:

$$h(m_1) \coloneqq m_2\,; \quad h(f_1) \coloneqq m_2\,; \quad h(m_2) \coloneqq m_1\,; \quad h(f_2) \coloneqq m_1\,;$$

$$k(m_1) \coloneqq f_2\,; \quad k(f_1) \coloneqq f_2\,; \quad k(m_2) \coloneqq f_1\,; \quad k(f_2) \coloneqq f_1\,;$$

$$w(m_1) \coloneqq f_1\,; \quad w(f_1) \coloneqq m_1\,; \quad w(m_2) \coloneqq f_2\,; \quad w(f_2) \coloneqq m_2\,.$$

Definiamo infine i predicati F_0, M_0 e G_0 (nei quali interpreteremo rispettivamente i simboli di predicato F, M e G) ponendo $\mathrm{F}_0(m_1) = \mathrm{F}_0(m_2) = 0$, $\mathrm{F}_0(f_1) = \mathrm{F}_0(f_2) = 1$, $\mathrm{M}_0(m_1) = \mathrm{M}_0(m_2) = 1$, $\mathrm{M}_0(f_1) = \mathrm{M}_0(f_2) = 0$, $\mathrm{G}_0(m_1, m_2) = \mathrm{G}_0(m_1, f_2) = 1$, $\mathrm{G}_0(m_2, m_1) = \mathrm{G}_0(m_2, f_1) = \mathrm{G}_0(f_1, m_2) = \mathrm{G}_0(f_1, f_2) = .\mathrm{G}_0(f_2, m_1) = .\mathrm{G}_0(f_2, m_2) = 1$, $\mathrm{G}_0(m_1, m_1) = \mathrm{G}_0(m_1, f_1) = \mathrm{G}_0(m_2, m_2) = \mathrm{G}_0(m_2, f_2) = \mathrm{G}_0(f_1, m_1) = \mathrm{G}_0(f_1, f_1) = 0$, $\mathrm{G}_0(f_2, m_2) = \mathrm{G}_0(f_2, f_2) = 0\,.$

In questa struttura, le clausole che si ottengono dallo schema sostituendo alla x in tutti i modi possibili i quattro elementi m_1, m_2, f_1, f_2 della struttura sono

$\{\mathrm{F}(m_1), \mathrm{M}(m_1)\}$, $\{\mathrm{F}(m_2), \mathrm{M}(m_2)\}$, $\{\mathrm{F}(f_1), \mathrm{M}(f_1)\}$, $\{\mathrm{F}(f_2), \mathrm{M}(f_2)\}$, $\{\neg\mathrm{F}(m_1), \neg\mathrm{M}(m_1)\}$, $\{\neg\mathrm{F}(m_2), \neg\mathrm{M}(m_2)\}$, $\{\neg\mathrm{F}(f_1), \neg\mathrm{M}(f_1)\}$, $\{\neg\mathrm{F}(f_2), \neg\mathrm{M}(f_2)\}$, $\{\mathrm{M}(h(m_1))\}$, $\{\mathrm{M}(h(m_2))\}$, $\{\mathrm{M}(h(f_1))\}$, $\{\mathrm{M}(h(f_2))\}$, $\{\mathrm{G}(h(m_1), m_1)\}$, $\{\mathrm{G}(h(m_2), m_2)\}$, $\{\mathrm{G}(h(f_1), f_1)\}$, $\{\mathrm{G}(h(f_2), f_2)\}$, $\{\mathrm{F}(k(m_1))\}$, $\{\mathrm{F}(k(m_2))\}$, $\{\mathrm{F}(k(f_1))\}$, $\{\mathrm{F}(k(f_2))\}$, $\{\mathrm{G}(k(m_1), m_1)\}$, $\{\mathrm{G}(k(m_2), m_2)\}$, $\{\mathrm{G}(k(f_1), f_1)\}$, $\{\mathrm{G}(k(f_2),f_2)\}$, $\{\neg\mathrm{G}(m_1, w(m_1)\}$, $\{\neg\mathrm{G}(m_2, w(m_2)\}$, $\{\neg\mathrm{G}(f_1, w(f_1)\}$, $\{\neg\mathrm{G}(f_2, w(f_2)\}$

cioè, tenendo conto della nostra interpretazione e di come operano le funzioni h, k e w,

$\{\mathrm{F}(m_1), \mathrm{M}(m_1)\}$, $\{\mathrm{F}(m_2), \mathrm{M}(m_2)\}$, $\{\mathrm{F}(f_1), \mathrm{M}(f_1)\}$, $\{\mathrm{F}(f_2), \mathrm{M}(f_2)\}$, $\{\neg\mathrm{F}(m_1), \neg\mathrm{M}(m_1)\}$, $\{\neg\mathrm{F}(m_2), \neg\mathrm{M}(m_2)\}$, $\{\neg\mathrm{F}(f_1), \neg\mathrm{M}(f_1)\}$, $\{\neg\mathrm{F}(f_2), \neg\mathrm{M}(f_2)\}$, $\{\mathrm{M}(m_2)\}$, $\{\mathrm{M}(m_1)\}$, $\{\mathrm{M}(m_2)\}$, $\{\mathrm{M}(m_1)\}$, $\{\mathrm{G}(m_2, m_1)\}$, $\{\mathrm{G}(m_1, m_2)\}$, $\{\mathrm{G}(f_2, f_1)\}$, $\{\mathrm{G}(f_1, f_2)\}$, $\{\mathrm{F}(f_2)\}$, $\{\mathrm{F}(f_1)\}$, $\{\mathrm{F}(f_2)\}$, $\{\mathrm{F}(f_1)\}$, $\{\mathrm{G}(f_2, m_1)\}$, $\{\mathrm{G}(f_1, m_2)\}$, $\{\mathrm{G}(f_2, f_1)\}$, $\{\mathrm{G}(f_1,f_2)\}$, $\{\neg\mathrm{G}(m_1, f_1\}$, $\{\neg\mathrm{G}(m_2, f_2\}$, $\{\neg\mathrm{G}(f_1, m_1\}$, $\{\neg\mathrm{G}(f_2, m_2\}$

ed è facile verificare che ogni clausola è soddisfatta!

Penso che ormai anche voi non ne possiate più di questi esempi, che alla fine sono tutti più o meno uguali. Vi rinnovo l’invito a proporre richieste per esercizi che vorreste vedere svolti nell’ultima ora di lezione, martedì prossimo 12 maggio 2020. Se non ne riceverò, sceglierò io qualche esercizio nuovo, ma non saranno certamente esercizi di logica dei predicati…