

Capitolo 4

Sistemi dinamici stocastici

per gli studenti del corso di
Stima e identificazione

Luigi Chisci, 28 Febbraio 2019

Generalità e problemi di interesse

In molti contesti pratici vi sono ingressi che agiscono sul sistema reale di interesse con caratteristiche di irregolarità, complessità, incertezza, non riproducibilità ed imprevedibilità. Per descrivere tali segnali, risulta naturale adottare il paradigma dei processi stocastici. Un sistema dinamico con ingressi stocastici viene detto *sistema dinamico stocastico* o più semplicemente *sistema stocastico*. Un sistema stocastico con ingresso $U(t)$ ed uscita $Y(t)$ è schematizzato in figura 1.1. Si fa notare come nel caso stocastico non si considerano l'ingresso $U(t)$ e, di conseguenza, l'uscita $Y(t)$ come segnali deterministici il cui valore è specificato con esattezza ad ogni istante temporale t . Viceversa, tali segnali assumono valori casuali ad ogni istante temporale e vengono descritti tramite opportune *caratteristiche statistiche* che, a seconda della tipologia di descrizione adottata e/o della tipologia di segnali considerati, coincidono con

- le PDF di ogni ordine;
- il momento del primo ordine o funzione di media;
- il momento del secondo ordine o funzione di auto-covarianza;
- lo spettro e/o la densità spettrale nel caso stazionario.

In riferimento allo schema di figura 1.1, a seconda di ciò che si conosce e di ciò che si vuole determinare, si possono avere alcuni problemi di grande rilevanza ingegneristica, di seguito elencati.

1. **Analisi:** date le caratteristiche statistiche dell'ingresso $U(\cdot)$ ed il sistema dinamico S , determinare le caratteristiche statistiche dell'uscita $Y(\cdot)$.
2. **Sintesi/modellistica di un segnale:** fissate le caratteristiche statistiche dell'ingresso $U(\cdot)$ (ad esempio rumore bianco), progettare un sistema dinamico S in modo che l'uscita $Y(\cdot)$ abbia caratteristiche statistiche desiderate.

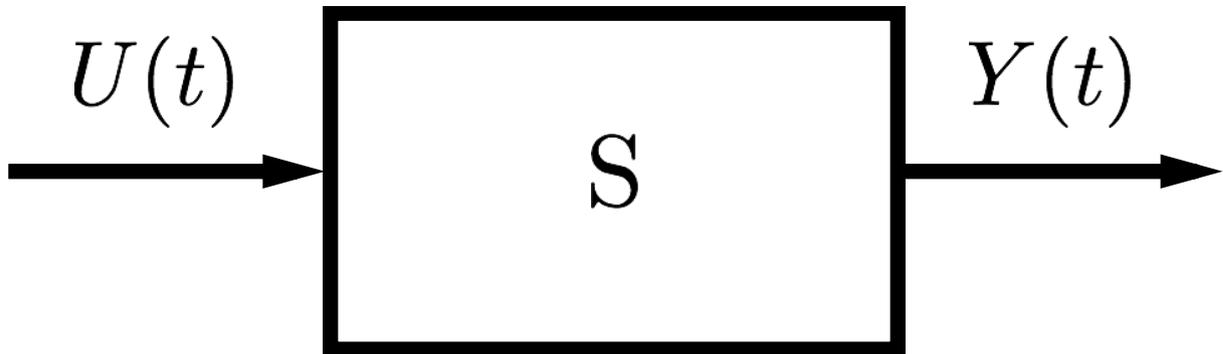


Figura 1.1: Sistema dinamico stocastico.

3. **Identificazione:** rilevate sperimentalmente le caratteristiche statistiche dell'ingresso $U(\cdot)$ e dell'uscita $Y(\cdot)$, determinare un modello matematico del sistema \mathbf{S} .
4. **Deconvoluzione:** date le caratteristiche statistiche dell'uscita $Y(\cdot)$ ed il sistema dinamico \mathbf{S} , determinare le caratteristiche statistiche dell'ingresso $U(\cdot)$.
5. **Deconvoluzione cieca:** date solamente le caratteristiche statistiche dell'uscita $Y(\cdot)$, determinare sia le caratteristiche statistiche dell'ingresso $U(\cdot)$ che un modello matematico del sistema \mathbf{S} .

A questo punto è opportuno fare alcune considerazioni di carattere generale sui suddetti problemi.

- Il problema di analisi posto non è altro che la versione stocastica del problema deterministico di analisi della risposta di un sistema dinamico
- Il secondo problema ha interessanti applicazioni sia per quanto riguarda la generazione di segnali con assegnate caratteristiche spettrali (e.g. sintesi vocale) che per quanto riguarda la modellazione matematica di segnali (e.g., disturbi) di cui siano note a priori le caratteristiche spettrali.
- Il problema di identificazione richiede che le caratteristiche statistiche, eventualmente congiunte, di ingresso ed uscita non siano note a-priori ma vengano ottenute tramite elaborazione di realizzazioni dei segnali $U(\cdot)$ e $Y(\cdot)$ acquisite tramite un opportuno esperimento effettuato sul sistema reale di interesse.
- Il termine “deconvoluzione” deriva dal fatto che, per un sistema dinamico lineare, l'uscita è la convoluzione dell'ingresso con la risposta impulsiva del sistema da cui il problema inverso di ricavare l'uscita dall'ingresso, conoscendo la risposta impulsiva, prende il nome di deconvoluzione. Il problema di deconvoluzione si presenta,

ad esempio, nei sistemi di telecomunicazione dove, conoscendo le caratteristiche del canale di trasmissione (sistema dinamico), occorre stimare/ricostruire il segnale trasmesso (ingresso) da quello ricevuto (uscita). Si noti che, in virtù della commutatività dell'operatore di convoluzione, il ruolo dell'ingresso e della risposta impulsiva è del tutto intercambiabile per cui talvolta si usa il termine deconvoluzione per riferirsi anche a problemi nei quali si vuole ricavare la risposta impulsiva del sistema dall'ingresso e dall'uscita del medesimo. Ad esempio, un altro problema di deconvoluzione di grande interesse applicativo è quello della *deconvoluzione sismica*, frequentemente impiegata nelle esplorazioni del sottosuolo allo scopo di rilevare giacimenti petroliferi o di gas. In questo caso, si eccita il terreno con una perturbazione sismica (ingresso) creata artificialmente da opportuni attuatori e si rileva il segnale riflesso (uscita) con opportuni sensori; l'obiettivo è quello di stimare la *riflettività* (risposta impulsiva) del terreno.

- Il problema di deconvoluzione cieca è una variante assai più complessa del problema di deconvoluzione nella quale, oltre a non conoscere il segnale trasmesso (ingresso), risulta ignoto anche il canale di comunicazione.

Analisi di un sistema dinamico LTI con ingresso stazionario

In questo paragrafo, si considera il problema di analisi relativamente ad un sistema lineare tempo-invariante e ad un ingresso $U(\cdot)$ stocastico stazionario.

Teorema di analisi - caso TD SISO - Si consideri un sistema lineare tempo-invariante SISO (un solo ingresso ed una sola uscita) \mathbf{S} con funzione di trasferimento

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g_k\} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}$$

ed un ingresso stocastico stazionario in senso lato $\{U(t)\}$ con media m_U e spettro

$$\Phi_U(z) = \mathcal{Z}\{R_U(t)\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} R_U(t) z^{-t}.$$

Allora, se il sistema è BIBO stabile, i.e.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty, \tag{1.1}$$

a regime (cioè per tempi tali da potersi considerare esaurito il transitorio) l'ingresso $U(t)$ e l'uscita $Y(t)$ risultano congiuntamente stazionari in senso lato, con

$$m_Y = E[Y(t)] = G_{dc} m_U \quad (1.2)$$

$$\Phi_Y(z) = G(z) G(z^{-1}) \Phi_U(z) \quad (1.3)$$

$$\varphi_Y(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \varphi_U(\omega) \quad (1.4)$$

$$\Phi_{YU}(z) = G(z) \Phi_U(z) \quad (1.5)$$

$$\varphi_{YU}(\omega) = G(e^{j\omega}) \varphi_U(\omega) \quad (1.6)$$

dove $G_{dc} = G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$ è il guadagno statico (in continua) del sistema.

Dimostrazione - L'uscita $Y(t)$ è espressa tramite la convoluzione discreta fra risposta impulsiva e ingresso:

$$Y(t) = (g * U)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k U(t-k).$$

Pertanto, per t sufficientemente elevato,

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[Y(t)] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} g_k U(t-k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} g_k E[U(t-k)] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} g_k\right] m_U \\ &= G_{dc} m_U \triangleq m_Y \end{aligned}$$

che dimostra la stazionarietà in media di $Y(\cdot)$. Definendo $\tilde{Y}(t) \triangleq Y(t) - m_Y$ e $\tilde{U}(t) \triangleq U(t) - m_U$, si verifica immediatamente che

$$\tilde{Y}(t) = Y(t) - m_Y = \sum_{k=0}^{\infty} g_k U(t-k) - \sum_{k=0}^{\infty} g_k m_U = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \tilde{U}(t-k).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} R_Y(t, s) &\triangleq E[\tilde{Y}(t)\tilde{Y}(s)] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i \tilde{U}(t-i)\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j \tilde{U}(s-j)\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g_i g_j E[\tilde{U}(t-i)\tilde{U}(s-j)] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g_i g_j R_U(t-s-i+j) \\ &= R_Y(t-s) \end{aligned}$$

con funzione di auto-covarianza

$$R_Y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g_i g_j R_U(k-i+j) \quad (1.7)$$

dipendente da un solo argomento temporale. Questo dimostra la stazionarietà in senso lato di $Y(\cdot)$. Si può quindi definire lo spettro dell'uscita

$$\begin{aligned}
\Phi_Y(z) &\triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_Y(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g_i g_j R_U(k - i + j) \right] z^{-k} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \sum_{j=0}^{\infty} g_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_U(k - i + j) z^{-k} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_U(k - i + j) z^{-(k-i+j)} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_U(\ell) z^{-\ell} \\
&= G(z) G(z^{-1}) \Phi_U(z)
\end{aligned}$$

e, di conseguenza, determinare la densità spettrale dell'uscita

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(\omega) &= \Phi_Y(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) G(e^{-j\omega}) \Phi_U(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) \overline{G(e^{j\omega})} \varphi_U(\omega) \\
&= |G(e^{j\omega})|^2 \varphi_U(\omega).
\end{aligned}$$

Si considera adesso la funzione di cross-covarianza

$$\begin{aligned}
R_{YU}(t, s) &= E[\tilde{Y}(t)\tilde{U}(s)] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i \tilde{U}(t - i)\right) \tilde{U}(s)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} g_i E[\tilde{U}(t - i)\tilde{U}(s)] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} g_i R_U(t - s - i) = R_{YU}(t - s)
\end{aligned}$$

con

$$R_{YU}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i R_U(k - i) \triangleq (g * R_U)(k). \quad (1.8)$$

Questo dimostra la stazionarietà in senso lato congiunta dei processi $U(\cdot)$ e $Y(\cdot)$. Conseguentemente si può definire il cross-spettro

$$\begin{aligned}
\Phi_{YU}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{YU}(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} g_i R_U(k - i) \right] z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_U(k - i) z^{-k} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^{-i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_U(k - i) z^{-(k-i)} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^{-i} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_U(\ell) z^{-\ell} \\
&= G(z) \Phi_U(z)
\end{aligned}$$

da cui si deduce la densità spettrale incrociata

$$\varphi_{YU}(\omega) = \Phi_{YU}(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) \Phi_U(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) \varphi_U(\omega)$$

a conclusione della dimostrazione. \square

Il precedente teorema è di fondamentale importanza per l'analisi e la sintesi di sistemi dinamici stocastici e pertanto merita alcune considerazioni.

- Dati $G(z)$ e $\Phi_U(z)$ è possibile determinare $\varphi_Y(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \varphi_U(\omega)$. Si noti in proposito che la densità spettrale in uscita risulta nulla alle frequenze in cui si annulla la risposta in frequenza $G(e^{j\omega})$ del sistema ed anche alle frequenze in cui si annulla la densità spettrale dell'ingresso $\varphi_U(\omega)$. In particolare, se $U(\cdot)$ è un rumore bianco, la sua densità spettrale è piatta, i.e. $\varphi_U(\omega) = \sigma_U^2$, mentre l'andamento in frequenza della densità spettrale in uscita $\varphi_Y(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \sigma_U^2$ risulta completamente determinato dal modulo $|G(e^{j\omega})|$ della risposta in frequenza del sistema. Un interessante quesito, a cui si risponderà nel seguito, è se risulta possibile scegliere il filtro digitale $G(z)$ in modo da assegnare arbitrariamente (sagomare nel modo desiderato) la densità spettrale in uscita dal filtro $\varphi_Y(\omega)$. In particolare, ci si chiede se è possibile generare, filtrando opportunamente rumore bianco, un processo stocastico con spettro arbitrario.
- Dati $\Phi_U(z)$ e $\Phi_Y(z)$ è possibile determinare solo il modulo (ma non la fase) della risposta in frequenza mediante

$$|G(e^{j\omega})|^2 = \frac{\varphi_Y(\omega)}{\varphi_U(\omega)}.$$

In altri termini, la conoscenza delle caratteristiche statistiche dell'ingresso e dell'uscita, consente di determinare solamente informazione sul modulo della risposta in frequenza $|G(e^{j\omega})|$ (guadagno del sistema alle varie frequenze) ma non informazione sulla fase $\angle G(e^{j\omega})$ (sfasamento del sistema alle varie frequenze).

- Dati lo spettro dell'ingresso $\Phi_U(z)$ e il cross-spettro ingresso-uscita $\Phi_{YU}(z)$ è possibile determinare la risposta in frequenza (modulo e fase) del sistema mediante

$$G(e^{j\omega}) = \frac{\varphi_{YU}(\omega)}{\varphi_U(\omega)}.$$

In altri termini, per l'identificazione del sistema è necessario rilevare sperimentalmente sia le caratteristiche statistiche dell'ingresso che le caratteristiche statistiche incrociate di ingresso ed uscita.

- Dati $G(z)$ e $\Phi_Y(z)$, è possibile determinare $\varphi_U(\omega)$ mediante

$$\varphi_U(\omega) = \frac{\varphi_Y(\omega)}{|G(e^{j\omega})|^2}.$$

In realtà, è sufficiente conoscere lo spettro dell'uscita ed il modulo della risposta in frequenza del sistema per risolvere il problema di deconvoluzione.

- Dato solo $\Phi_Y(z)$, non è possibile determinare congiuntamente $\Phi_U(z)$ e $G(z)$ (deconvoluzione cieca). In realtà esistono tecniche di soluzione del problema di deconvoluzione cieca basate su statistiche di ordine superiore al secondo del segnale $Y(\cdot)$ e che, pertanto, risultano fuori dai contenuti di questo corso.

Per illustrare l'utilizzo del teorema di analisi a tempo-discreto, si considera di seguito un semplice esempio.

Esempio: Calcolo dello spettro in uscita da un filtro digitale del primo ordine con ingresso bianco - Si consideri un sistema LTI a tempo-discreto del primo ordine con funzione di trasferimento

$$G(z) = G_{dc} \frac{1 - \rho}{1 - \rho z^{-1}} = G_{dc}(1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k z^{-k}, \quad \rho \in (-1, 1) \quad (1.9)$$

avente guadagno statico (in continua) $G(1) = G_{dc}$ e risposta impulsiva $g_k = G_{dc}(1 - \rho)\rho^k$. Inoltre, si consideri un segnale di ingresso bianco stazionario

$$U(t) = wn(m_U, \sigma_U^2) \quad (1.10)$$

Poiché $|\rho| < 1$ il sistema (1.9) risulta BIBO-stabile e siamo nelle condizioni di applicabilità del teorema di analisi. Pertanto, si ha che l'uscita $Y(t)$ del sistema ha media e spettro dati da

$$\begin{aligned} m_Y &= G_{dc} m_U \\ \Phi_Y(z) &= G(z)G(z^{-1})\Phi_U(z) = \frac{G_{dc}^2(1 - \rho)^2\sigma_U^2}{(1 - \rho z^{-1})(1 - \rho z)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ricordando che un rumore esponenzialmente correlato $Y(t) = ecn(\rho, m_Y, \sigma_Y^2)$ ha spettro

$$\Phi_Y(z) = \frac{(1 - \rho^2)\sigma_Y^2}{(1 - \rho z^{-1})(1 - \rho z)} \quad (1.12)$$

dal confronto di (1.11) e (1.12) si deduce che l'uscita del sistema (1.9) in risposta all'ingresso (1.10) è, a regime, un rumore esponenzialmente correlato stazionario con

- fattore di correlazione esponenziale ρ ,

- media $m_Y = G_{dc} m_U$,
- varianza $\sigma_Y^2 = \frac{G_{dc}^2 (1 - \rho)^2 \sigma_U^2}{1 - \rho^2}$.

Riassumendo:

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= wn(m_U, \sigma_U^2) \\ G(z) &= G_{dc} \frac{1 - \rho}{1 - \rho z^{-1}} \end{aligned} \right\} \implies Y(t) = ecn \left(\rho, m_Y = G_{dc} m_U, \sigma_Y^2 = \frac{G_{dc}^2 (1 - \rho)^2 \sigma_U^2}{1 - \rho^2} \right).$$

Il teorema di analisi a tempo-discreto precedentemente enunciato e dimostrato per un sistema SISO (ad un solo ingresso ed una sola uscita) può facilmente essere generalizzato ad un sistema MIMO (a più ingressi e più uscite). Si può verificare che nel caso MIMO le formule (1.2), (1.5) e (1.6) rimangono invariate mentre (1.3) e (1.4) si generalizzano a

$$\Phi_Y(z) = G(z) \Phi_U(z) G^T(z^{-1}) \quad (1.13)$$

$$\varphi_Y(\omega) = G(e^{j\omega}) \varphi_U(\omega) G^T(e^{-j\omega}) \quad (1.14)$$

Per completezza si riportano anche l'enunciato e la dimostrazione del teorema di analisi nel caso di segnali a tempo-continuo.

Teorema di analisi - caso TC - Si consideri un sistema lineare tempo-invariante **S** con funzione di trasferimento

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \triangleq \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt$$

ed un ingresso stocastico stazionario in senso lato $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ con media m_U e spettro

$$\Phi_U(s) = \mathcal{L}\{R_U(t)\} = \int_{-\infty}^\infty R_U(t) e^{-st} dt.$$

Allora, se il sistema è BIBO stabile, i.e. $G(s)$ ha tutti i poli con $Re(s) < 0$ o, equivalentemente,

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty, \quad (1.15)$$

a regime (cioè per tempi tali da potersi considerare esaurito il transitorio) l'ingresso $U(t)$ e l'uscita $Y(t)$ risultano congiuntamente stazionari in senso lato, con

$$m_Y = E[Y(t)] = G_{dc} m_U \quad (1.16)$$

$$\Phi_Y(s) = G(s) \Phi_U(s) G^T(-s) \quad (1.17)$$

$$\varphi_Y(\omega) = G(j\omega) \varphi_U(\omega) G^T(-j\omega) \quad (1.18)$$

$$\Phi_{YU}(s) = G(s) \Phi_U(s) \quad (1.19)$$

$$\varphi_{YU}(\omega) = G(j\omega) \varphi_U(\omega) \quad (1.20)$$

dove $G_{dc} = G(0) = \int_0^\infty g(t) dt$ è il guadagno statico (in continua) del sistema.

Dimostrazione - L'uscita $Y(t)$ è espressa tramite la convoluzione continua (integrale di convoluzione) fra risposta impulsiva e ingresso:

$$Y(t) = (g * U)(t) = \int_0^\infty g(\sigma) U(t - \sigma) d\sigma.$$

Pertanto, per t sufficientemente elevato,

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[Y(t)] = E\left[\int_0^\infty g(\sigma) U(t - \sigma) d\sigma\right] = \int_0^\infty g(\sigma) E[U(t - \sigma)] d\sigma \\ &= \left[\int_0^\infty g(\sigma) d\sigma\right] m_U = G_{dc} m_U \triangleq m_Y \end{aligned}$$

che dimostra la stazionarietà in media di $Y(\cdot)$. Definendo $\tilde{Y}(t) \triangleq Y(t) - m_Y$ e $\tilde{U}(t) \triangleq U(t) - m_U$, si verifica immediatamente che

$$\tilde{Y}(t) = Y(t) - m_Y = \int_0^\infty g(\sigma) U(t - \sigma) d\sigma - \int_0^\infty g(\sigma) m_U d\sigma = \int_0^\infty g(\sigma) \tilde{U}(t - \sigma) d\sigma.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} R_Y(t, s) &\triangleq E[\tilde{Y}(t) \tilde{Y}^T(s)] = E\left[\left(\int_0^\infty g(\sigma) \tilde{U}(t - \sigma) d\sigma\right) \left(\int_0^\infty g(\tau) \tilde{U}(s - \tau) d\tau\right)^T\right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(\sigma) E[\tilde{U}(t - \sigma) \tilde{U}^T(s - \tau)] g^T(\tau) d\sigma d\tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(\sigma) R_U(t - s - \sigma + \tau) g^T(\tau) d\sigma d\tau \\ &= R_Y(t - s) \end{aligned}$$

con funzione di auto-covarianza

$$R_Y(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(\sigma) R_U(t - \sigma + \tau) g^T(\tau) d\sigma d\tau \quad (1.21)$$

dipendente da un solo argomento temporale. Questo dimostra la stazionarietà in senso

lato di $Y(\cdot)$. Si può quindi definire lo spettro dell'uscita

$$\begin{aligned}
\Phi_Y(s) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\sigma) R_U(t - \sigma + \tau) g^T(\tau) d\sigma d\tau \right] e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} g(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} R_U(t - \sigma + \tau) e^{-st} \int_0^{\infty} g^T(\tau) d\sigma dt d\tau \\
&= \int_0^{\infty} g(\sigma) e^{-s\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} R_U(t - \sigma + \tau) e^{-s(t-\sigma+\tau)} \int_0^{\infty} g^T(\tau) e^{s\tau} d\sigma dt d\tau \\
&= \int_0^{\infty} g(\sigma) e^{-s\sigma} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} R_U(r) e^{-sr} dr \int_0^{\infty} g^T(\tau) e^{s\tau} d\tau \\
&= G(s) \Phi_U(s) G^T(-s)
\end{aligned}$$

e, di conseguenza, determinare la densità spettrale dell'uscita

$$\varphi_Y(\omega) = \Phi_Y(j\omega) = G(j\omega) \Phi_U(e^{j\omega}) G^T(-j\omega).$$

Si considera adesso la funzione di cross-covarianza

$$\begin{aligned}
R_{YU}(t, s) &= E \left[\tilde{Y}(t) \tilde{U}^T(s) \right] = E \left[\left(\int_0^{\infty} g(\sigma) \tilde{U}(t - \sigma) d\sigma \right) \tilde{U}^T(s) \right] \\
&= \int_0^{\infty} g(\sigma) E \left[\tilde{U}(t - \sigma) \tilde{U}^T(s) \right] d\sigma \\
&= \int_0^{\infty} g(\sigma) R_U(t - s - \sigma) d\sigma = R_{YU}(t - s)
\end{aligned}$$

con

$$R_{YU}(t) = \int_0^{\infty} g(\sigma) R_U(t - \sigma) d\sigma \triangleq (g * R_U)(t). \quad (1.22)$$

Questo dimostra la stazionarietà in senso lato congiunta dei processi $U(\cdot)$ e $Y(\cdot)$. Conseguentemente si può definire il cross-spettro

$$\begin{aligned}
\Phi_{YU}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YU}(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} g(\sigma) R_U(t - \sigma) d\sigma \right] e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} g(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} R_U(t - \sigma) e^{-st} d\sigma dt \\
&= \int_0^{\infty} g(\sigma) e^{-s\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} R_U(t - \sigma) e^{-s(t-\sigma)} d\sigma dt \\
&= \int_0^{\infty} g(\sigma) e^{-s\sigma} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} R_U(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
&= G(s) \Phi_U(s)
\end{aligned}$$

da cui si deduce la densità spettrale incrociata

$$\varphi_{YU}(\omega) = \Phi_{YU}(j\omega) = G(j\omega) \Phi_U(j\omega) = G(j\omega) \varphi_U(\omega)$$

a conclusione della dimostrazione. \square

Anche per il caso a tempo-continuo, si considera di seguito un semplice esempio.

Esempio: Calcolo dello spettro in uscita da un filtro analogico del primo ordine con ingresso bianco - Si consideri un sistema LTI a tempo-continuo del primo ordine con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{G_{dc}}{1 + \tau s} = G_{dc} \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} e^{-st} dt, \quad \tau > 0 \quad (1.23)$$

avente guadagno statico (in continua) $G(0) = G_{dc}$ e risposta impulsiva $g(t) = G_{dc} e^{-t/\tau}$. Inoltre, si consideri un segnale di ingresso bianco stazionario

$$U(t) = wn(m_U, \sigma_U^2). \quad (1.24)$$

Poiché $\tau > 0$, il sistema (1.23) risulta BIBO-stabile e siamo nelle condizioni di applicabilità del teorema di analisi. Pertanto, si ha che l'uscita $Y(t)$ del sistema ha media e spettro dati da

$$\begin{aligned} m_Y &= G_{dc} m_U \\ \Phi_Y(s) &= G(s)G(-s) \Phi_U(s) = \frac{G_{dc}^2 \sigma_U^2}{(1 + \tau s)(1 - \tau s)}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ricordando che un rumore esponenzialmente correlato a tempo-continuo $Y(t) = ecn(\tau, m_Y, \sigma_Y^2)$ ha spettro

$$\Phi_Y(s) = \frac{2\tau \sigma_Y^2}{(1 + \tau s)(1 - \tau s)}, \quad (1.26)$$

dal confronto di (1.25) e (1.26) si deduce che l'uscita del sistema (1.23) in risposta all'ingresso (1.24) è, a regime, un rumore esponenzialmente correlato stazionario a tempo-continuo con

- costante di tempo τ ,
- media $m_Y = G_{dc} m_U$,
- varianza $\sigma_Y^2 = \frac{G_{dc}^2 \sigma_U^2}{2\tau}$.

Riassumendo:

$$\left. \begin{array}{l} U(t) = wn(m_U, \sigma_U^2) \\ G(s) = \frac{G_{dc}}{1 + \tau s} \end{array} \right\} \Rightarrow Y(t) = ecn \left(\tau, m_Y = G_{dc} m_U, \sigma_Y^2 = \frac{G_{dc}^2 \sigma_U^2}{2\tau} \right). \quad (1.27)$$

Esempio: Calcolo degli spettri in un sistema di controllo - Si consideri un sistema di controllo a retroazione, per semplicità SISO, descritto dalle seguenti equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} r_f = Fr \\ e = r_f - y_f \\ y_f = Hy + n \\ y = Pu + d_y \\ u = Ce + d_u \\ n \sim \varphi_n \\ d_u \sim \varphi_{d_u} \\ d_y \sim \varphi_{d_y} \\ n(\cdot) \perp d_u(\cdot) \perp d_y(\cdot) \end{array} \right. \quad (1.28)$$

dove: $r, r_f, y, y_f, e, u, n, d_u, d_y$ sono segnali nella variabile temporale t ($t \in \mathbb{Z}$ nel caso TD oppure $t \in \mathbb{R}$ nel caso TC); F, H, P, C sono funzioni di trasferimento (nella variabile z o s rispettivamente nel caso TD o TC); r, d_u, d_y, n (rispettivamente segnale di riferimento, disturbo sull'ingresso, disturbo sull'uscita, rumore di misura) sono ingressi stocastici stazionari fra loro incorrelati, di densità spettrali $\varphi_r, \varphi_{d_u}, \varphi_{d_y}, \varphi_n$ nell'indeterminata ω . Si vogliono determinare le densità spettrali $\varphi_e, \varphi_u, \varphi_y$ dei segnali d'anello e, u, y facendo uso del teorema di analisi e delle suddette ipotesi. A titolo di esempio, si considera il calcolo di φ_y lasciando al lettore, per esercizio, l'analogo calcolo di φ_u e φ_e . Sfruttando la formula di Mason, si ottiene la seguente relazione che lega gli ingressi r, d_u, d_y, n all'uscita y :

$$y = \frac{CPF}{1 + CPH} r + \frac{P}{1 + CPH} d_u + \frac{1}{1 + CPH} d_y - \frac{CP}{1 + CPH} n$$

da cui, tenendo conto dell'incorrelazione dei quattro ingressi r, d_u, d_y, n ed applicando il teorema di analisi, si deduce

$$\varphi_y = \frac{|CPF|^2}{|1 + CPH|^2} \varphi_r + \frac{|P|^2}{|1 + CPH|^2} \varphi_{d_u} + \frac{1}{|1 + CPH|^2} \varphi_{d_y} + \frac{|CP|^2}{|1 + CPH|^2} \varphi_n$$

dove

$$|G|^2 \triangleq \begin{cases} |G(e^{j\omega})|^2, & \text{nel caso TD} \\ |G(j\omega)|^2, & \text{nel caso TC.} \end{cases}$$

Sistema dinamico LTI con ingresso bianco

Nel precedente paragrafo si è visto come un rumore bianco si trasforma, per effetto di un filtraggio lineare del primo ordine, in un rumore esponenzialmente correlato. Viene, quindi, naturale chiedersi cosa succede applicando ad un rumore bianco un generico filtro lineare tempo-invariante. Iniziando dal caso a tempo-discreto, si consideri quindi l'applicazione di un rumore bianco stazionario $U(t) = \text{swn}(m_U, \sigma_U^2)$ ad un sistema LTI con generica funzione di trasferimento di ordine $n \geq 1$

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b(z)}{a(z)}.$$

Per il teorema di analisi, assumendo il sistema BIBO-stabile ovvero che il polinomio $a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ha tutte le radici in $|z| < 1$, si ha che lo spettro dell'uscita $Y(\cdot)$ del sistema è della seguente forma:

$$\begin{aligned} \Phi_Y(z) &= G(z) G(z^{-1}) \sigma_U^2 = \frac{b(z)}{a(z)} \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} \sigma_U^2 \\ &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \frac{b_0 z^{-n} + b_1 z^{-(n-1)} + \dots + b_n}{z^{-n} + a_1 z^{-(n-1)} + \dots + a_n} \sigma_U^2 \\ &= \frac{\beta_0 + \beta_1 (z + z^{-1}) + \dots + \beta_n (z^n + z^{-n})}{1 + \alpha_1 (z + z^{-1}) + \dots + \alpha_n (z^n + z^{-n})} = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \end{aligned} \quad (1.29)$$

con coefficienti

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \frac{\sum_{k=0}^{n-i} a_k a_{k+i}}{\sum_{k=0}^n a_k^2}, \quad i = 1, \dots, n \\ \beta_j = \frac{\left(\sum_{k=0}^{n-i} b_k b_{k+i} \right) \sigma_U^2}{\sum_{k=0}^n a_k^2}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Definizione (Polinomio simmetrico) - Una funzione della forma

$$\begin{aligned} p(z) &= p_0 + p_1(z + z^{-1}) + \dots + p_n(z^n + z^{-n}) \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^n p_k(z^k + z^{-k}) \\ &= \sum_{k=-n}^n p_k z^k \quad p_k = p_{-k} \quad (\text{per } k = 1, \dots, n) \quad p_n \neq 0 \end{aligned}$$

dicesi *polinomio simmetrico di ordine n* nella indeterminata z . □

Definizione (Spettro razionale) - Una funzione della forma

$$R(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$$

dove $n(z)$ e $d(z)$ sono polinomi simmetrici, prende il nome di *spettro razionale* se $R(e^{j\omega}) \geq 0$ per ogni ω . □

Dalla precedente analisi si evince che lo spettro dell'uscita di un sistema LTI a dimensione finita, quando l'ingresso è un rumore bianco, è razionale nel senso della precedente definizione. Allo spettro razionale (1.29) corrisponde la densità spettrale

$$\varphi_Y(\omega) = \frac{\beta(e^{j\omega})}{\alpha(e^{j\omega})} = \frac{\beta_0 + 2 \sum_{j=1}^n \beta_j \cos(j\omega)}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(i\omega)} \quad (1.31)$$

In molte applicazioni ingegneristiche si ha l'esigenza di sintetizzare un segnale di caratteristiche spettrali desiderate (e.g., sintesi vocale), oppure di modellare un segnale di caratteristiche spettrali note. A questo proposito viene naturale chiedersi se sia sempre possibile realizzare questo obiettivo avvalendosi unicamente di un generatore di rumore bianco e di un sistema (filtro) LTI, scegliendo opportunamente la varianza del rumore bianco in ingresso e la funzione di trasferimento del filtro in modo da ottenere lo spettro di uscita assegnato. Questo, a sua volta, pone all'attenzione i seguenti due problemi.

Problema 1 (Approssimazione razionale) - Data una generica densità spettrale $\varphi(\omega)$ è possibile determinare una densità spettrale razionale $\hat{\varphi}(\omega)$, i.e. della forma (1.31), che la approssima con arbitrario grado di accuratezza ?

Problema 2 (Fattorizzazione spettrale) - Dato uno spettro razionale $\hat{\Phi}(z)$, i.e. della forma (1.29), è sempre possibile determinare un filtro BIBO-stabile e la varianza

del rumore bianco in ingresso al filtro in modo che l'uscita del filtro abbia a regime lo spettro desiderato? In termini matematici, invocando il teorema di analisi, si vogliono determinare una funzione di trasferimento $H(z)$ con poli in $|z| < 1$ ed uno scalare positivo σ^2 tali che $\widehat{\Phi}(z) = H(z)H(z^{-1})\sigma^2$.

I successivi due paragrafi saranno dedicati alla soluzione di questi due problemi.

Approssimazione razionale di uno spettro

È ben noto dalla teoria dei numeri come un numero reale possa essere approssimato con arbitraria precisione da un numero razionale, ovvero che l'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} costituisce un sottoinsieme denso dell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} . In modo analogo, nella teoria delle funzioni, funzioni razionali (e.g., approssimanti di Padé) vengono impiegate per approssimare funzioni generiche. Ci si chiede pertanto se risulta anche possibile, data una densità spettrale $\varphi(\omega)$ e fissato $\varepsilon > 0$, trovare una densità spettrale razionale

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{\beta(e^{j\omega})}{\alpha(e^{j\omega})} = \frac{\beta_0 + 2 \sum_{j=1}^n \beta_j \cos(j\omega)}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(i\omega)} \quad (1.32)$$

di ordine n sufficientemente elevato e opportuni coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\beta_j\}_{j=0}^n$ in modo tale che

$$|\varphi(\omega) - \widehat{\varphi}(\omega)| < \varepsilon \quad \forall \omega \quad (1.33)$$

ovvero la densità spettrale assegnata $\varphi(\omega)$ non si discosti da quella razionale approssimata $\widehat{\varphi}(\omega)$ più di ε . Questo problema prende il nome di *approssimazione razionale dello spettro*. Da un punto di vista algoritmico conviene affrontarlo aumentando progressivamente l'ordine n dell'approssimazione (1.32), a partire da $n = 1$, fino a che la condizione (1.33) risulta verificata. Fissato l'ordine n dell'approssimazione e considerando la densità spettrale da approssimare in un certo numero N , possibilmente molto elevato, di valori di pulsazione

$$\varphi(\omega_k), \quad k = 1, \dots, N \quad 0 < \omega_1 < \dots < \omega_N$$

l'obiettivo dell'approssimazione razionale di $\varphi(\omega)$ è quello di soddisfare in modo approssimato le relazioni

$$\varphi(\omega_k) \cong \frac{\beta_0 + 2 \sum_{j=1}^n \beta_j \cos(j\omega_k)}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(i\omega_k)} \quad k = 1, \dots, N$$

ovvero

$$\left[1 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(i\omega_k) \right] \varphi(\omega_k) \cong \beta_0 + 2 \sum_{j=1}^n \beta_j \cos(j\omega_k) \quad k = 1, \dots, N$$

da cui

$$\varphi(\omega_k) \cong \sum_{i=1}^n [-2\cos(i\omega_k) \varphi(\omega_k)] \alpha_i + \beta_0 + \sum_{j=1}^n [2\cos(j\omega_k)] \beta_j \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.34)$$

Definendo con ε_k l'errore di approssimazione della k -esima equazione in (1.35), (1.35) diventa

$$\varphi(\omega_k) = \sum_{i=1}^n [-2\cos(i\omega_k) \varphi(\omega_k)] \alpha_i + \beta_0 + \sum_{j=1}^n [2\cos(j\omega_k)] \beta_j + \varepsilon_k \quad k = 1, \dots, N \quad (1.35)$$

Un ragionevole criterio di approssimazione, detto dei *minimi quadrati*, è quello di minimizzare la somma dei quadrati degli errori ε_k . Con le definizioni

$$\begin{cases} y_k = \varphi(\omega_k) \\ \varphi_k = [-2\cos(\omega_k) \varphi(\omega_k), \dots, -2\cos(n\omega_k) \varphi(\omega_k), 1, 2\cos(\omega_k), \dots, 2\cos(n\omega_k)]^T \in \mathbb{R}^{n_\theta} \\ \theta = [\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n]^T \in \mathbb{R}^{n_\theta} \\ n_\theta = 2n + 1 \end{cases} \quad (1.36)$$

(1.35) può essere riscritto sotto forma di generico modello di regressione lineare

$$y_k = \varphi_k^T \theta + \varepsilon_k \implies \varepsilon_k = y_k - \varphi_k^T \theta \quad k = 1, \dots, N \quad (1.37)$$

con θ vettore di parametri da determinare e φ_k (regressori), y_k (osservazioni) quantità note. Pertanto, il problema dei minimi quadrati (*least squares = LS*) è formulato come il seguente problema di ottimizzazione

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2 = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}} \underbrace{\sum_{k=1}^N (y_k - \varphi_k^T \theta)^2}_{J(\theta)}. \quad (1.38)$$

Si noti che il problema dei minimi quadrati (1.38), a cui è stato ricondotto il problema originario di approssimazione razionale (di ordine n fissato) dello spettro mediante le definizioni (1.36), ha validità molto più generale nel senso che può essere utilizzato in una grande varietà di problemi pratici di stima/approssimazione il cui obiettivo è quello di

adattare il vettore dei parametri θ nel modello di regressione lineare (1.37) alle osservazioni sperimentali $\{y_k, \varphi_k\}_{k=1}^N$. Con semplici calcoli, si verifica che il costo da minimizzare

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \sum_{k=1}^N y_k^2 + \theta^T \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^T \right) \theta - \theta^T \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k y_k \right) - \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k y_k \right)^T \theta \\ &= \theta^T R \theta - \theta^T z - z^T \theta + c \end{aligned} \quad (1.39)$$

è una forma quadratica in θ con

$$R \triangleq \sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^T = R^T \geq 0, \quad z \triangleq \sum_{k=1}^N \varphi_k y_k, \quad c \triangleq \sum_{k=1}^N y_k^2. \quad (1.40)$$

Per minimizzare la forma quadratica (1.39) si può adottare il metodo del *completamento del quadrato* di seguito esposto. Per semplicità si considera inizialmente il caso scalare ($n_\theta = 1$), in cui si vuole esprimere la forma quadratica $J(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$ come combinazione lineare di un quadrato perfetto $(\theta - \hat{\theta})^2$ e di un termine noto. In altri termini, assumendo $a \neq 0$, si vogliono determinare $\hat{\theta}$ e c' tali che

$$J(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c = a(\theta - \hat{\theta})^2 + c'.$$

Con semplici calcoli si ha:

$$\hat{\theta} = -\frac{b}{2a}, \quad c' = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Quindi la forma quadratica $J(\theta)$ ha un minimo/massimo a seconda che $a > 0$ / $a < 0$ in corrispondenza di $\theta = \hat{\theta} = -\frac{b}{2a}$ (vertice della parabola) di valore $c' = c - \frac{b^2}{4a}$. Nel caso generale (vettoriale), il completamento del quadrato desiderato è:

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \theta^T R \theta - 2\theta^T z + c \\ &= (\theta - \hat{\theta})^T R (\theta - \hat{\theta}) + c' \\ &= \theta^T R \theta - 2\theta^T R \hat{\theta} + c' + \hat{\theta}^T R \hat{\theta} \end{aligned}$$

da cui

$$z = R \hat{\theta}, \quad c = c' + \hat{\theta}^T R \hat{\theta}.$$

Pertanto, se la matrice R definita in (1.40) risulta invertibile (condizione il cui significato sarà discusso in seguito), si ha

$$\hat{\theta} = R^{-1} z, \quad c' = c - z^T R^{-1} z$$

dove $\hat{\theta}$ è il valore di θ che rende minimo il costo $J(\theta)$ e c' è il corrispondente minimo del costo. Riassumendo, la stima/approssimazione ottima di θ in (1.37) nel senso dei minimi

quadrati è data da

$$\hat{\theta} = R^{-1}z = \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^T \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k y_k \right) \quad (1.41)$$

a patto che la matrice R definita in (1.40) sia invertibile (definita positiva). A tale proposito si osserva che:

- $R \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ è una matrice simmetrica non-negativa definita risultante dalla somma di N diadi $\varphi_k \varphi_k^T$;
- ciascuna diade $\varphi_k \varphi_k^T$ è una matrice di rango 1 se il vettore φ_k è non nullo;
- la somma di diadi $\{\varphi_k \varphi_k^T\}_{k=1}^i$ ha rango i se e solo se i vettori $\{\varphi_k\}_{k=1}^i$ sono linearmente indipendenti.

Quindi la matrice R risulta invertibile se e solo se l'insieme di regressori $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ contiene n_θ vettori linearmente indipendenti. Condizione necessaria è quindi $N \geq n_\theta$ cioè che il numero di osservazioni sia non inferiore al numero di parametri da stimare. È evidente come per avere una buona approssimazione/stima convenga operare con $N \gg n_\theta$, cioè con un numero di osservazioni molto maggiore del numero di parametri da stimare, in modo da avere con probabilità 1 l'esistenza di n_θ regressori linearmente indipendenti.

Nel seguito, dato il vettore $\theta = [\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n]^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$, con $\varphi_n(\omega, \theta)$ si indicherà la densità spettrale razionale di ordine n definita come segue

$$\varphi_n(\omega, \theta) = \frac{\beta_0 + 2 \sum_{j=1}^n \beta_j \cos(j\omega)}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(i\omega)}.$$

Nei precedenti sviluppi si è appena mostrato come fissato l'ordine n , si possa determinare in modo analitico il vettore $\hat{\theta}_n$ dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\beta_j\}_{j=0}^n$ che caratterizzano la migliore approssimazione razionale, di ordine n , $\hat{\varphi}_n(\omega) = \varphi_n(\omega, \hat{\theta}_n)$ di $\varphi(\omega)$ nel senso dei minimi quadrati (1.35)-(1.38). Pertanto, si può procedere iterativamente alla soluzione del problema di approssimazione spettrale posto secondo l'algoritmo che segue.

Algoritmo di approssimazione razionale di uno spettro

Dati:

- errore massimo $\varepsilon > 0$;
- ordine massimo \bar{n} ;

- densità spettrale per punti $\{\varphi(\omega_k)\}_{k=1}^N$.

Poni $n = 0$.

Ripeti

$n = n + 1$;
determina $\hat{\theta}_n$;

finché $|\varphi(\omega_k) - \varphi_n(\omega_k, \hat{\theta}_n)| < \varepsilon$ per $k = 1, \dots, N$ oppure $n = \bar{n}$

Poni $\hat{\varphi}(\omega) = \varphi_n(\omega, \hat{\theta}_n)$.

Fattorizzazione spettrale

Dato lo spettro razionale (eventualmente risultante da una precedente approssimazione razionale di uno spettro non razionale)

$$\Phi(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j (z^j + z^{-j})}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (z^i + z^{-i})} \quad \text{tale che } \Phi(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \forall \omega, \quad (1.42)$$

si vogliono trovare una funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{C(z)}{A(z)} \quad (1.43)$$

con poli all'interno del cerchio unitario ed una costante positiva $r > 0$, tali che

$$\Phi(z) = H(z) H(z^{-1}) r \quad (1.44)$$

in modo che sia possibile generare/modellare un segnale con lo spettro (1.42) come uscita di un sistema LTI di funzione di trasferimento (1.43) avente in ingresso rumore bianco stazionario di varianza r . Per risolvere il problema di fattorizzazione spettrale (1.42)-(1.44), è fondamentale avvalersi del seguente risultato.

Lemma di fattorizzazione spettrale - Dato un polinomio simmetrico

$$p(z) = p_0 + p_1 (z + z^{-1}) + \dots + p_n (z^n + z^{-n}) = p_0 + \sum_{i=1}^n p_i (z^i + z^{-i}), \quad p_n \neq 0$$

tale che $p(e^{j\omega}) \geq 0$ per ogni ω , vale quanto segue.

(i) Esistono e sono unici $r > 0$ ed il polinomio $q(z) = 1 + q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n} = 1 + \sum_{i=1}^n q_i z^{-i}$ con tutte le radici in $|z| \leq 1$ tali che

$$p(z) = r q(z) q(z^{-1}). \quad (1.45)$$

(ii) Se $q(e^{j\omega}) > 0$ per ogni ω , allora $q(z)$ ha tutte le radici in $|z| < 1$.

Dimostrazione - Si noti anzitutto che, in virtù della simmetria, $p(z) = p(z^{-1})$. Si consideri il polinomio di grado $2n$

$$\begin{aligned} \varrho(z) \triangleq z^n p(z) &= p_n z^{2n} + p_{n-1} z^{2n-1} + \dots + p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n \\ &= p_0 z^n + \sum_{i=1}^n p_i (z^{n+i} + z^{n-i}). \end{aligned}$$

Si noti che se $z_0 \neq 0$ è una radice di $\varrho(z)$, cioè $\varrho(z_0) = z_0^n p(z_0) = 0 \Rightarrow p(z_0) = 0$, allora anche z_0^{-1} è radice di $\varrho(z)$ in quanto $\varrho(z_0^{-1}) = z_0^{-n} p(z_0^{-1}) = z_0^{-n} p(z_0) = 0$. Per il teorema fondamentale dell'algebra $\varrho(z)$ ha $2n$ radici nel piano complesso delle quali n (indicate con z_1, z_2, \dots, z_n) possono essere scelte nella regione del piano complesso $\overline{\mathbb{C}}_s = \{z : |z| \leq 1\}$ mentre le altre n (che sono necessariamente le reciproche $z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}$) sono collocate nella regione $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}}_s = \{z : |z| \geq 1\}$. Quindi, $\varrho(z)$ può essere fattorizzato nel seguente modo:

$$\varrho(z) = p_n \prod_{|z_i| \leq 1} (z - z_i) \prod_{|z_i| \leq 1} (z - z_i^{-1}).$$

Conseguentemente,

$$\begin{aligned} p(z) &= z^{-n} \varrho(z) = p_n \prod_{|z_i| \leq 1} (1 - z_i z^{-1}) \prod_{|z_i| \leq 1} (-z_i^{-1}) (1 - z_i z) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n p_n}{\prod_{i=1}^n z_i}}_r \underbrace{\prod_{i=1}^n (1 - z_i z^{-1})}_{q(z)} \underbrace{\prod_{i=1}^n (1 - z_i z)}_{q(z^{-1})} \end{aligned} \quad (1.46)$$

dove $q(z)$ è un polinomio con tutte le radici in $|z| \leq 1$. Si noti che la fattorizzazione (1.46) è unica in quanto esiste un solo modo di selezionare n delle $2n$ radici del polinomio $\varrho(z)$ in modo che siano tutte in $|z| \leq 1$. Poiché

$$p(e^{j\omega}) = r q(e^{j\omega}) q(e^{-j\omega}) = r q(e^{j\omega}) \overline{q(e^{j\omega})} = r |q(e^{j\omega})|^2 \geq 0,$$

deve necessariamente risultare $r > 0$ in quanto $p(e^{j\omega})$ non può essere identicamente nulla essendo $p_n \neq 0$. Questo completa la dimostrazione della parte (i).

Per quanto riguarda la parte (ii), si noti che

$$p(e^{j\omega}) = r |q(e^{j\omega})|^2 > 0, \forall \omega \implies q(e^{j\omega}) \neq 0, \forall \omega$$

per cui $q(z)$ non può avere, in questo caso, radici in $z = e^{j\omega}$, i.e. in $|z| = 1$, come volevasi dimostrare. \square

Sfruttando il precedente risultato, si può risolvere in modo immediato il problema della fattorizzazione spettrale di un arbitrario spettro razionale mediante il seguente teorema.

Teorema di fattorizzazione spettrale - Data la funzione razionale

$$\Phi(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{\sum_{k=-m}^m \beta_k z^k}{\sum_{k=-n}^n \alpha_k z^k}$$

che soddisfa le ipotesi

$$\begin{cases} \alpha_k = \alpha_{-k}, \beta_k = \beta_{-k}, \varphi(\omega) \triangleq \Phi(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \forall \omega \quad (\text{i.e. } \Phi(z) \text{ è uno spettro razionale}) \\ \alpha_n \neq 0, \beta_m \neq 0, \end{cases}$$

si può fattorizzare in modo univoco $\Phi(z)$ come

$$\Phi(z) = \underbrace{\frac{C(z)}{A(z)}}_{H(z)} \underbrace{\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}}_{H(z^{-1})} r$$

dove

$$\begin{cases} r > 0 \\ A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad \text{ha radici in } |z| < 1 \\ C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m} \quad \text{ha radici in } |z| \leq 1. \end{cases}$$

Se $\varphi(\omega) = \Phi(e^{j\omega}) > 0$ per ogni ω , allora $C(z)$ ha radici in $|z| < 1$.

Dimostrazione - Applicando il lemma di fattorizzazione spettrale al denominatore $\alpha(z)$ ed al numeratore $\beta(z)$ di $\Phi(z)$, si ha

$$\begin{cases} \alpha(z) = r_1 A(z)A(z^{-1}) \\ \beta(z) = r_2 C(z)C(z^{-1}) \end{cases}$$

dove: $r_1 > 0$; $r_2 > 0$; $A(z)$ ha radici in $|z| < 1$ (in quanto, se avesse radici in $|z| = 1$ risulterebbe $\varphi(\omega) \triangleq \Phi(e^{j\omega}) = \infty$ per qualche ω); $C(z)$ ha radici in $|z| \leq 1$. Quindi,

$$\Phi(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{r_2 C(z)C(z^{-1})}{r_1 A(z)A(z^{-1})} = H(z)H(z^{-1})r$$

dove: $H(z) = C(z)/A(z)$ ha zeri in $|z| \leq 1$ e poli in $|z| < 1$; $r = r_2/r_1 > 0$. Se inoltre $\varphi(\omega) \triangleq \Phi(e^{j\omega}) = r|C(e^{j\omega})|^2/|A(e^{j\omega})|^2 > 0$ per ogni ω , deve risultare che $C(e^{j\omega}) \neq 0$ per ogni ω e, quindi, che $C(z)$ non può avere radici in $|z| = 1$, i.e. $C(z)$ ha solo radici in $|z| < 1$, come volevasi dimostrare. \square

Si illustrano di seguito alcuni esempi di fattorizzazione spettrale.

Esempio 1 di fattorizzazione spettrale - Si consideri

$$\Phi(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{5 + 2(z + z^{-1})}{13 + 6(z + z^{-1})}. \quad (1.47)$$

Si noti che

$$\varphi(\omega) = \Phi(e^{j\omega}) = \frac{\beta(e^{j\omega})}{\alpha(e^{j\omega})} = \frac{5 + 4 \cos \omega}{13 + 12 \cos \omega} > 0, \quad \forall \omega$$

in quanto $1 \leq \beta(e^{j\omega}) \leq 9$ e $1 \leq \alpha(e^{j\omega}) \leq 25$, essendo $-1 \leq \cos \omega \leq 1$. Quindi $\Phi(z)$ rappresenta uno spettro razionale del primo ordine che, in virtù del teorema di fattorizzazione spettrale, può essere espresso nella forma $\Phi(z) = H(z)H(z^{-1})r$ con $H(z) = (1 + cz^{-1}) / (1 + az^{-1})$, $r > 0$, $|a| < 1$ e $|c| < 1$ (in quanto la densità spettrale $\varphi(\omega)$ è strettamente positiva a tutte le frequenze).

Nel seguito si utilizzeranno due diversi metodi per la fattorizzazione del numeratore e, rispettivamente, del denominatore dello spettro. Specificamente, per il numeratore si segue la procedura adottata nella dimostrazione del lemma di fattorizzazione spettrale:

$$z\beta(z) = 2z^2 + 5z + 2 = 2 \left(z^2 + \frac{5}{2}z + 1 \right) = 2 \left(z + \frac{1}{2} \right) (z + 2)$$

da cui

$$\beta(z) = 2 \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} \right) 2 \left(1 + \frac{1}{2}z \right) = \underbrace{4}_{r_2} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} \right)}_{1+cz^{-1}} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}z \right)}_{1+cz}.$$

Per il denominatore si procede, viceversa, in modo diretto imponendo

$$\alpha(z) = 13 + 6(z + z^{-1}) = r_1(1 + az^{-1})(1 + az) = (1 + a^2)r_1 + ar_1(z + z^{-1})$$

da cui si ricavano le equazioni, da risolvere rispetto alle incognite r_1 e $a \in (-1, 1)$,

$$(1 + a^2) r_1 = 13 \quad (1.48)$$

$$a r_1 = 6. \quad (1.49)$$

Dividendo membro a membro (1.48) per (1.49), si ha

$$\frac{1 + a^2}{a} = \frac{13}{6} \implies a^2 - \frac{13}{6}a + 1 = 0 \implies a \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\}$$

per cui la soluzione cercata, nell'intervallo $(-1, 1)$, è $a = 2/3$. Quindi, da (1.49) si ricava

$$r_1 = \frac{6}{a} = \frac{6}{\frac{2}{3}} = 9.$$

Riassumendo:

$$\Phi(z) = \underbrace{\frac{4}{9}}_r \underbrace{\frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}}_{H(z)} \underbrace{\frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 + \frac{2}{3}z}}_{H(z^{-1})}$$

per cui si può generare un processo stocastico $y(t)$ avente lo spettro (1.47), filtrando rumore bianco $e(t) = wn(0, \frac{4}{9})$ con un filtro digitale del primo ordine, di funzione di trasferimento $H(z) = (1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}z^{-1})^{-1}$, i.e. nel seguente modo

$$y(t) + \frac{2}{3}y(t-1) = e(t) + \frac{1}{2}e(t-1). \quad (1.50)$$

Esempio 2 di fattorizzazione spettrale - Si esamina la generalizzazione del precedente esempio ad un generico spettro razionale del primo ordine

$$\Phi(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1(z + z^{-1})}{\alpha_0 + \alpha_1(z + z^{-1})} = r \frac{1 + cz^{-1}}{1 + az^{-1}} \frac{1 + cz}{1 + az}$$

con associata densità spettrale

$$\varphi(\omega) \triangleq \Phi(e^{j\omega}) = \frac{\beta_0 + 2\beta_1 \cos \omega}{\alpha_0 + 2\alpha_1 \cos \omega} \quad (1.51)$$

Poiché $\varphi(\pi/2) = \beta_0/\alpha_0 > 0$, i coefficienti α_0 e β_0 devono essere concordi e si assume, senza perdita di generalità, che $\alpha_0 > 0$ e $\beta_0 > 0$. Per fattorizzare lo spettro occorre risolvere i seguenti due problemi di fattorizzazione polinomiale:

$$r_1 (1 + az^{-1})(1 + az) = \alpha_0 + \alpha_1(z + z^{-1}) \quad (1.52)$$

$$r_2 (1 + cz^{-1})(1 + cz) = \beta_0 + \beta_1(z + z^{-1}). \quad (1.53)$$

Risolvendo (1.52), si ha

$$\left. \begin{array}{l} r_1(1+a^2) = \alpha_0 \\ r_1 a = \alpha_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1+a^2}{a} = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \Rightarrow \alpha_1 a^2 - \alpha_0 a + \alpha_1 = 0 \Rightarrow a = \frac{\alpha_0}{2\alpha_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{2\alpha_1}\right)^2 - 1}.$$

Poiché la soluzione deve soddisfare $|a| < 1$, risulta

$$a = \begin{cases} \frac{\alpha_0}{2\alpha_1} - \sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{2\alpha_1}\right)^2 - 1}, & \alpha_1 > 0 \\ \frac{\alpha_0}{2\alpha_1} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{2\alpha_1}\right)^2 - 1}, & \alpha_1 < 0 \end{cases}$$

da cui

$$r_1 = \frac{\alpha_1}{a} = \begin{cases} \frac{\alpha_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 - \alpha_1^2}, & \alpha_1 > 0 \\ \frac{\alpha_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 - \alpha_1^2}, & \alpha_1 < 0. \end{cases}$$

Si noti come l'esistenza della soluzione $r_1 > 0$ richiede la condizione $2|\alpha_1| < \alpha_0$, necessaria per la positività della densità spettrale (1.51). Procedendo in modo analogo con l'equazione (1.53) per il numeratore, si ottiene la soluzione

$$c = \begin{cases} \frac{\beta_0}{2\beta_1} - \sqrt{\left(\frac{\beta_0}{2\beta_1}\right)^2 - 1}, & \beta_1 > 0 \\ \frac{\beta_0}{2\beta_1} + \sqrt{\left(\frac{\beta_0}{2\beta_1}\right)^2 - 1}, & \beta_1 < 0 \end{cases}$$

da cui

$$r_2 = \frac{\beta_1}{c} = \begin{cases} \frac{\beta_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta_0}{2}\right)^2 - \beta_1^2}, & \beta_1 > 0 \\ \frac{\beta_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta_0}{2}\right)^2 - \beta_1^2}, & \beta_1 < 0 \end{cases}$$

nell'ipotesi che sia soddisfatta la condizione $2|\beta_1| < \beta_0$ anch'essa necessaria per la positività della densità spettrale (1.51).

Esempio 3 di fattorizzazione spettrale - Si consideri un segnale $y(\cdot)$ generato dalla somma di due segnali stazionari $y_1(\cdot)$ e $y_2(\cdot)$ nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_1(t) = \frac{C_1(z)}{A_1(z)} e_1(t) \\ y_2(t) = \frac{C_2(z)}{A_2(z)} e_2(t) \\ e_1(t) = \text{swn}(0, r_1 > 0) \\ e_2(t) = \text{swn}(0, r_2 > 0) \\ e_1(\cdot) \perp e_2(\cdot) \end{array} \right. \quad (1.54)$$

dove i due filtri generatori di $y_1(\cdot)$ e $y_2(\cdot)$ sono entrambi BIBO-stabili, i.e. $A_i(z)$ hanno tutte le radici in $|z| < 1$ per $i = 1, 2$. Mediante fattorizzazione spettrale, si vuole rappresentare equivalentemente, dal punto di vista dello spettro, il segnale $y(\cdot)$ nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = \frac{C(z)}{A(z)} e(t) \\ e(t) = \text{wn}(0, r > 0) . \end{array} \right.$$

Si noti che $y_1(\cdot)$ e $y_2(\cdot)$ risultano incorrelati, essendo stati generati da ingressi incorrelati $e_1(\cdot)$ e $e_2(\cdot)$; infatti lo spettro incrociato

$$\Phi_{y_1, y_2}(z) = \Phi_{H_1 e_1, H_2 e_2}(z) = H_1(z) \Phi_{e_1, H_2 e_2}(z) = H_1(z) \Phi_{e_1, e_2}(z) H_2(z^{-1}) = 0$$

risulta nullo in quanto $\Phi_{e_1, e_2}(z) = 0$. Quindi, per il teorema di analisi, lo spettro di $y(\cdot)$ è dato da

$$\Phi_y(z) = \Phi_{y_1}(z) + \Phi_{y_2}(z) = \frac{C_1(z)C_1(z^{-1})}{A_1(z)A_1(z^{-1})} r_1 + \frac{C_2(z)C_2(z^{-1})}{A_2(z)A_2(z^{-1})} r_2 = \frac{C(z)}{A(z)} \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} r$$

dove $A(z) = A_1(z)A_2(z)$ e $(r, C(z))$ è la soluzione del problema di fattorizzazione spettrale

$$C_1(z)A_2(z)C_1(z^{-1})A_2(z^{-1})r_1 + C_2(z)A_1(z)C_2(z^{-1})A_1(z^{-1})r_2 = C(z)C(z^{-1})r .$$

1.0.1 Fattorizzazione spettrale a tempo-continuo

Per completezza si esamina, anche nel caso TC, lo spettro di un segnale $y(t)$ ottenuto filtrando rumore bianco $e(t) = \text{swn}(0, r)$ con un filtro analogico BIBO-stabile di funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} .$$

Per il teorema di analisi:

$$\Phi_Y(s) = H(s)H(-s)r = \frac{b(s)b(-s)}{a(s)a(-s)}r.$$

Si noti che il denominatore $\alpha(s) \triangleq a(s)a(-s)$ è un polinomio di grado $2n$ nella indeterminata s ; poiché $\alpha(s) = \alpha(-s)$, tale polinomio ha n radici s_1, \dots, s_n con $Re(s) \leq 0$ e le rimanenti n ($-s_1, \dots, -s_n$) con $Re(s) \geq 0$. Quindi, per il teorema fondamentale dell'algebra:

$$\alpha(s) = a(s)a(-s) = \left[\prod_{i=1}^n (s - s_i) \right] \left[\prod_{i=1}^n (s + s_i) \right] = \prod_{i=1}^n (s^2 - s_i^2) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^{2i}.$$

Analogamente, per il numeratore

$$\beta(s) \triangleq b(s)b(-s)r = \sum_{i=0}^n \beta_i s^{2i}.$$

Riassumendo i precedenti sviluppi, lo spettro in oggetto risulta un quoziente di polinomi $\beta(s)$ e $\alpha(s)$ a sole potenze pari. Nel caso tempo-continuo, quindi, si definisce *spettro razionale* una funzione di s della seguente forma

$$\Phi(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m \beta_i s^{2i}}{\sum_{i=0}^n \alpha_i s^{2i}} \quad (1.55)$$

a patto che risulti $\varphi(\omega) = \Phi(j\omega) = \beta(j\omega)/\alpha(j\omega) \geq 0$ per ogni pulsazione ω . Si noti che, senza perdita di generalità, si può porre $\alpha_0 = 1$ in (1.55). La associata densità spettrale sarà della forma

$$\varphi(\omega) = \Phi(j\omega) = \frac{\beta(j\omega)}{\alpha(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^m (-1)^i \beta_i \omega^{2i}}{\sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i \omega^{2i}}.$$

In modo analogo al caso tempo-discreto, è possibile approssimare (e.g., con tecniche ai minimi quadrati) un arbitrario spettro (la cui densità spettrale è assegnata, per esempio, in un certo numero di pulsazioni ω_k , $k = 1, \dots, N$, con $N \gg n + m$) in uno spettro razionale della forma (1.55). Sempre analogamente al caso tempo-discreto si può univocamente fattorizzare lo spettro (1.55) come

$$\Phi(s) = H(s)H(-s)r$$

dove: $r > 0$; $H(s)$ è una funzione razionale propria avente poli con $Re(s) < 0$ e zeri con $Re(s) \leq 0$. A tale proposito vale il seguente risultato.

Teorema di fattorizzazione spettrale a tempo-continuo - Data la funzione razionale

$$\Phi(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m \beta_i s^{2i}}{\sum_{i=0}^n \alpha_i s^{2i}} \quad m \leq n$$

che soddisfa le ipotesi

$$\begin{cases} \varphi(\omega) \triangleq \Phi(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \quad (\text{i.e. } \Phi(s) \text{ è uno spettro razionale a tempo-continuo}) \\ \alpha_n \neq 0, \beta_m \neq 0 \end{cases}$$

si può fattorizzare in modo univoco $\Phi(s)$ come

$$\Phi(s) = \underbrace{\frac{C(s)}{A(s)}}_{H(s)} \underbrace{\frac{C(-s)}{A(-s)}}_{H(-s)} r$$

dove

$$\begin{cases} r > 0 \\ A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{ha radici in } Re(s) < 0 \\ C(s) = s^m + c_1 s^{m-1} + \dots + c_m \quad \text{ha radici in } Re(s) \leq 0. \end{cases}$$

Se $\varphi(\omega) = \Phi(j\omega) > 0$ per ogni ω , allora $C(s)$ ha radici in $Re(s) < 0$.

Dimostrazione - Si consideri il denominatore

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i s^{2i} = \alpha_n \left[\prod_{i=1}^n (s - s_i) \right] \left[\prod_{i=1}^n (s + s_i) \right] \\ &= \underbrace{(-1)^n \alpha_n}_{r_1} \underbrace{\left[\prod_{i=1}^n (s - s_i) \right]}_{A(s)} \underbrace{\left[\prod_{i=1}^n (-s - s_i) \right]}_{A(-s)} \end{aligned}$$

dove s_i ($i = 1, \dots, n$) sono le n radici di $\alpha(s)$ con $Re(s) < 0$. Si noti, infatti, come $\alpha(s)$ e, quindi, $A(s)$ non possano avere radici con $Re(s) = 0$ altrimenti si avrebbe densità

spettrale infinita, i.e. $\varphi(\omega) = \beta(j\omega)/\alpha(j\omega) = \infty$, per qualche pulsazione ω .
 In modo analogo, per il numeratore:

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \sum_{i=0}^m \beta_i s^{2i} = \beta_m \left[\prod_{i=1}^m (s - z_i) \right] \left[\prod_{i=1}^m (s + z_i) \right] \\ &= \underbrace{(-1)^m \beta_m}_{r_2} \underbrace{\left[\prod_{i=1}^m (s - z_i) \right]}_{C(s)} \underbrace{\left[\prod_{i=1}^m (-s - z_i) \right]}_{C(-s)}\end{aligned}$$

dove z_i ($i = 1, \dots, m$) sono le radici di $\beta(s)$ con $Re(s) \leq 0$.
 Quindi,

$$\Phi(s) = \underbrace{\frac{r_2}{r_1}}_r \underbrace{\frac{C(s)}{A(s)}}_{H(s)} \underbrace{\frac{C(-s)}{A(-s)}}_{H(-s)}.$$

Posto $s = j\omega$:

$$\varphi(\omega) = \Phi(j\omega) = rH(j\omega)H(-j\omega) = r |H(j\omega)|^2 \geq 0, \forall \omega \implies r = \sigma^2 > 0.$$

Se inoltre $\varphi(\omega) > 0$ per ogni ω , si deve avere $H(j\omega) \neq 0$ per ogni ω cioè $H(s)$ non può avere zeri (radici di $C(s)$) sull'asse immaginario, ovvero $H(s)$ deve avere zeri (radici di $C(s)$) solamente con $Re(s) < 0$. \square

Esempio di fattorizzazione spettrale a tempo-continuo - Si consideri

$$\Phi(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{36}{9 - s^2} \quad (1.56)$$

con

$$\varphi(\omega) = \Phi(j\omega) = \frac{\beta(j\omega)}{\alpha(j\omega)} = \frac{36}{9 + \omega^2} > 0, \quad \forall \omega.$$

Per il denominatore:

$$\alpha(s) = 9 - s^2 = (s + 3)(-s + 3) \implies A(s) = s + 3, \quad r_1 = 1$$

Pertanto:

$$\Phi(s) = \underbrace{36}_r \underbrace{\frac{1}{s + 3}}_{H(s)} \underbrace{\frac{1}{-s + 3}}_{H(-s)}.$$

Per generare un segnale $y(t)$ con spettro (1.56) si può dunque procedere come segue:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -3y(t) + e(t) \\ e(t) = wn(0, 36). \end{cases}$$

Processi ARMA

In virtù del teorema di approssimazione (di uno spettro con uno spettro razionale) e del teorema di fattorizzazione spettrale, un generico processo stocastico stazionario (in senso lato) $y(t)$ può essere rappresentato, con arbitraria precisione nell'approssimazione spettrale, dal seguente modello

$$y(t) = H(z)e(t) = H(z)(e(t) - \bar{e}) + \bar{y} \stackrel{\Delta}{=} H(z)\tilde{e}(t) + \bar{y} \quad (1.57)$$

dove:

- $H(z)$ è una funzione di trasferimento razionale con poli in $|z| < 1$ e zeri in $|z| \leq 1$;
- $e(t) = \text{swn}(\bar{e}, \sigma_e^2)$ è un rumore bianco stazionario con media \bar{e} legata alla media \bar{y} di $y(\cdot)$ dalla relazione $\bar{e} = \bar{y}/H(1)$ e varianza $\sigma_e^2 > 0$.

Posto

$$H(z) = \frac{C(z)}{A(z)} = \frac{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}},$$

l'equazione (1.57) assume la forma

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c) \quad (1.58)$$

derivante dall'interpretazione di z^{-1} come operatore di ritardo, i.e. $z^{-k}y(t) = y(t-k)$ e $z^{-k}e(t) = e(t-k)$. Definendo i segnali a media nulla $\tilde{y}(t) \stackrel{\Delta}{=} y(t) - \bar{y}$ ed $\tilde{e}(t) \stackrel{\Delta}{=} e(t) - \bar{e}$, si ha equivalentemente

$$\tilde{y}(t) + a_1 \tilde{y}(t-1) + \dots + a_{n_a} \tilde{y}(t-n_a) = \tilde{e}(t) + c_1 \tilde{e}(t-1) + \dots + c_{n_c} \tilde{e}(t-n_c). \quad (1.59)$$

Si noti da (1.58) che, posto $c_0 = 1$, $y(t)$ è esprimibile nella forma

$$y(t) = \underbrace{-\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(t-i)}_{\text{Auto-Regression}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n_c} c_j e(t-j)}_{\text{Moving Average}},$$

i.e. come somma di una *auto-regressione* (AR) del segnale $y(t)$ e di una *media mobile* (MA = *moving average*) del segnale $e(t)$. Per questo motivo, il modello (1.57) (o il processo da esso generato) prende il nome di modello o processo ARMA(n_a, n_c) dove gli indici strutturali $n_a \geq 0$ e $n_c \geq 0$ rappresentano i gradi dei polinomi $A(z)$ e, rispettivamente, $C(z)$. Un processo/modello ARMA(n_a, n_c) è dunque caratterizzato dai seguenti parametri:

- media \bar{e} e varianza σ_e^2 del rumore bianco $e(t)$;

- coefficienti $\{a_i\}_{i=1}^{n_a}$ del polinomio $A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}$;
- coefficienti $\{c_j\}_{j=1}^{n_c}$ del polinomio $C(z) = 1 + \sum_{j=1}^{n_c} c_j z^{-j}$.

Mediante il teorema di analisi, è immediato determinare spettro e densità spettrale del p.s.s. $y(t)$, i.e.

$$\Phi_Y(z) = \frac{\beta_0 + \sum_{j=1}^{n_c} \beta_j (z^j + z^{-j})}{1 + \sum_{i=1}^{n_a} \alpha_i (z^i + z^{-i})}$$

$$\varphi_Y(\omega) = \frac{\beta_0 + 2 \sum_{j=1}^{n_c} \beta_j \cos(j\omega)}{1 + 2 \sum_{i=1}^{n_a} \alpha_i \cos(i\omega)}$$

con

$$\beta_k = \sigma_e^2 \frac{\sum_{j=0}^{n_c-k} c_j c_{j+k}}{\sum_{i=0}^{n_a} a_i^2}$$

$$\alpha_k = \frac{\sum_{j=0}^{n_a-k} a_j a_{j+k}}{\sum_{i=0}^{n_a} a_i^2} .$$

Determinazione della funzione di auto-covarianza con il metodo di Yule-Walker

Nel seguito si vuole mostrare come è possibile determinare la funzione di auto-covarianza $\{R_Y(k)\}_{k=0}^{\infty}$ di un processo ARMA risolvendo un sistema di equazioni lineari, note come *equazioni di Yule-Walker*. Senza perdita di generalità, si ponga $n \triangleq \max(n_a, n_c)$ e si

riscriva il modello ARMA (1.59) nella forma

$$\begin{cases} \tilde{y}(t) + \sum_{i=1}^n a_i \tilde{y}(t-i) = \tilde{e}(t) + \sum_{j=1}^n c_j \tilde{e}(t-j) \\ \tilde{e}(t) = \text{swn}(0, \sigma_e^2) \end{cases} \quad (1.60)$$

Moltiplicando (1.60) per $\tilde{y}(t-k)$ ed applicando l'operatore di media $E[\dots]$, si ottengono le equazioni

$$R_Y(k) + \sum_{i=1}^n a_i R_Y(|k-i|) = R_{YE}(-k) + \sum_{j=1}^n c_j R_{YE}(j-k) \quad (1.61)$$

dove $R_Y(k) \triangleq E[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t-k)] = R_Y(-k)$ è la funzione di auto-covarianza del processo ARMA $y(\cdot)$ mentre $R_{YE}(k) \triangleq E[\tilde{y}(t)\tilde{e}(t-k)]$ è la funzione di cross-covarianza dei processi $y(\cdot)$ ed $e(\cdot)$. Si noti che, essendo $\tilde{e}(\cdot)$ un rumore bianco e

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \tilde{e}(t-k)$$

una combinazione lineare di valori passati e presente del segnale $\tilde{e}(\cdot)$, risulta che

$$R_{YE}(k) = 0, \quad \forall k < 0. \quad (1.62)$$

Analogamente, moltiplicando (1.60) per $\tilde{e}(t-k)$ ed applicando l'operatore di media $E[\dots]$, si ottengono le equazioni

$$R_{YE}(k) + \sum_{i=1}^n a_i R_{YE}(k-i) = c_k \sigma_e^2. \quad (1.63)$$

Per calcolare $\{R_Y(k)\}_{k \geq 0}$, si può dunque procedere con il seguente **metodo di Yule-Walker**:

1. Si risolvono le equazioni (1.63) per $k = 0, 1, \dots, n$ rispetto alle incognite $\{R_{YE}(k)\}_{k=0}^n$.
2. Si sostituiscono $\{R_{YE}(k)\}_{k=0}^n$ ricavate da (1.63) nel secondo membro di (1.61) e si risolvono le equazioni (1.61) per $k = 0, 1, \dots, n$ rispetto alle incognite $\{R_Y(k)\}_{k=0}^n$.
3. Osservando che il secondo membro di (1.61) si annulla per $k > n$, si determinano ricorsivamente $\{R_Y(k)\}_{k > n}$ mediante l'auto-regressione

$$R_Y(k) = -\sum_{i=1}^n a_i R_Y(k-i) \quad k = n+1, \dots \quad (1.64)$$

Per esprimere le equazioni di Yule-Walker (1.61) e (1.63) in forma matriciale, risulta conveniente introdurre le seguenti matrici di Toeplitz e, rispettivamente, di Hankel.

Definizione (Matrice di Toeplitz) - Dati due vettori $c = [c_1, \dots, c_m]^T \in \mathbb{R}^m$ ed $r = [r_1, \dots, r_n]^T \in \mathbb{R}^n$ tali che $c_1 = r_1$, si definisce la *matrice di Toeplitz* $\mathcal{T}(c, r) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, avente c come prima colonna ed r^T come prima riga, nel seguente modo

$$\mathcal{T}(c, r) \triangleq \begin{bmatrix} c_1 = r_1 & r_2 & \cdots & \cdots & r_{n-1} & r_n \\ c_2 & c_1 = r_1 & r_2 & \cdots & \cdots & r_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_{m-1} & & & & \ddots & \vdots \\ c_m & c_{m-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Si noti che

$$[\mathcal{T}(c, r)]_{ij} = \begin{cases} c_1 = r_1, & i = j \\ r_{j-i+1}, & i < j \\ c_{i-j+1}, & i > j. \end{cases}$$

Le matrici di Toeplitz sono anche dette *a diagonali costanti* in quanto hanno tutte le componenti uguali su ogni diagonale. Si introduce la notazione $\mathcal{T}(c) \triangleq \mathcal{T}(c, c)$ per indicare una matrice di Toeplitz simmetrica. Inoltre, definito $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$, $\mathcal{T}(c, c_1 e_1)$ è una matrice di Toeplitz triangolare inferiore mentre $\mathcal{T}(r_1 e_1, r)$ è una matrice di Toeplitz triangolare superiore. \square

Definizione (Matrice di Hankel) - Dati due vettori $c = [c_1, \dots, c_m]^T \in \mathbb{R}^m$ ed $r = [r_1, \dots, r_n]^T \in \mathbb{R}^n$ tali che $c_m = r_1$, si definisce la *matrice di Hankel* $\mathcal{H}(c, r) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, avente c come prima colonna ed r^T come ultima riga, nel seguente modo

$$\mathcal{H}(c, r) \triangleq \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ c_2 & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ c_{m-1} & c_m = r_1 & r_2 & & \ddots & r_{n-1} \\ c_m = r_1 & r_2 & \cdots & \cdots & r_{n-1} & r_n \end{bmatrix}.$$

Si noti che

$$[\mathcal{H}(c, r)]_{ij} = \begin{cases} c_m = r_1, & i + j = m + 1 \\ c_{i+j-1}, & i + j < m + 1 \\ r_{i+j-m}, & i + j > m + 1. \end{cases}$$

Le matrici di Hankel sono anche dette *ad antidiagonali costanti* in quanto hanno tutte le componenti uguali su ogni antidiagonale. Si noti che, per costruzione, le matrici di Hankel sono simmetriche. Conviene, per i successivi sviluppi, introdurre la notazione $\mathcal{H}(c) = \mathcal{H}(c, c_m e_1)$ a indicare una matrice Hankel anti-triangolare superiore. \square

Si introducono inoltre i seguenti vettori:

$$r_Y = \begin{bmatrix} r_Y(0) \\ r_Y(1) \\ \vdots \\ r_Y(n) \end{bmatrix}, \quad r_{YE} = \begin{bmatrix} r_{YE}(0) \\ r_{YE}(1) \\ \vdots \\ r_{YE}(n) \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Con le notazioni appena introdotte, le equazioni di Yule-Walker (1.61), per $k = 0, 1, \dots, n$, possono essere espresse nella seguente forma matriciale

$$\underbrace{\left(\mathcal{T}(a, e_1) + \begin{bmatrix} 0_n & \mathcal{H}(\bar{a}) \\ 0 & 0_n^T \end{bmatrix} \right)}_{M(a)} r_Y = \mathcal{H}(c) r_{YE}. \quad (1.65)$$

Analogamente, le equazioni di Yule-Walker (1.63) ammettono la forma matriciale

$$\mathcal{T}(a, e_1) r_{YE} = \sigma_e^2 c \quad (1.66)$$

Si noti che la matrice

$$\mathcal{T}(a, e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

risulta invertibile per cui (1.66) ammette una unica soluzione

$$r_{YE} = \mathcal{T}^{-1}(a, e_1) \sigma_e^2 c$$

Anche la matrice $M(a)$ definita in (1.65) risulta invertibile, nell'ipotesi in cui il polinomio $A(z)$ ha radici in $|z| < 1$; pertanto (1.65) ammette una unica soluzione

$$r_Y = M^{-1}(a) \mathcal{H}(c) r_{YE} = M^{-1}(a) \mathcal{H}(c) \mathcal{T}^{-1}(a, e_1) \sigma_e^2 c. \quad (1.67)$$

La precedente formula permette di calcolare la funzione di auto-covarianza $\{R_Y(k)\}_{k=0}^n$ dati i parametri $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{c_j\}_{j=1}^n$, σ_e^2 di un generico processo ARMA.

Esempio 1 (Processo ARMA del primo ordine) - Si consideri un processo ARMA del primo ordine

$$\begin{cases} y(t) + ay(t-1) = e(t) + ce(t-1) \\ e(t) = wn(0, \sigma_e^2) \end{cases}$$

con $|a| < 1$ e $|c| \leq 1$. Le equazioni di Yule-Walker (1.61) danno luogo a

$$\begin{cases} R_Y(0) + aR_Y(1) = R_{YE}(0) + cR_{YE}(1) \\ aR_Y(0) + R_Y(1) = cR_{YE}(0). \end{cases} \quad (1.68)$$

In modo analogo, (1.63) forniscono

$$\begin{cases} R_{YE}(0) = \sigma_e^2 \\ aR_{YE}(0) + R_{YE}(1) = c\sigma_e^2 \end{cases}$$

da cui $R_{YE}(0) = \sigma_e^2$ e $R_{YE}(1) = (c-a)\sigma_e^2$ che, sostituiti in (1.68), forniscono il seguente sistema di due equazioni in due incognite in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_Y(0) \\ R_Y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + c(c-a) \\ c \end{bmatrix} \sigma_e^2 \Rightarrow \begin{cases} R_Y(0) = \frac{1 + c^2 - 2ac}{1 - a^2} \sigma_e^2 \\ R_Y(1) = \frac{(1 - ac)(c - a)}{1 - a^2} \sigma_e^2. \end{cases}$$

Inoltre,

$$R_Y(k) = -aR_Y(k-1) = (-a)^{k-1} R_Y(1) = (-a)^{k-1} \frac{(1 - ac)(c - a)}{1 - a^2} \sigma_e^2 \quad \forall k \geq 1.$$

Esempio 2 - Si consideri il processo ARMA(3, 2)

$$\begin{cases} y(t) + \frac{4}{5}y(t-3) = e(t) + \frac{1}{2}e(t-2) \\ e(t) = wn(0, 1). \end{cases}$$

Le equazioni (1.61), in questo caso, risultano

$$\begin{aligned} R_Y(0) + \frac{4}{5}R_Y(3) &= R_{YE}(0) + \frac{1}{2}R_{YE}(2) \\ R_Y(1) + \frac{4}{5}R_Y(2) &= \frac{1}{2}R_{YE}(1) \\ R_Y(2) + \frac{4}{5}R_Y(1) &= \frac{1}{2}R_{YE}(0) \\ R_Y(3) + \frac{4}{5}R_Y(0) &= 0 \end{aligned}$$

mentre (1.63) forniscono

$$R_{YE}(0) = \sigma_e^2 = 1, \quad R_{YE}(1) = 0, \quad R_{YE}(2) = \frac{1}{2}\sigma_e^2 = \frac{1}{2}.$$

Sostituendo questi valori nelle precedenti equazioni e risolvendole, si ha

$$R_Y(0) = \frac{125}{36}, \quad R_Y(1) = -\frac{10}{9}, \quad R_Y(2) = \frac{25}{18}, \quad R_Y(3) = -\frac{25}{9}.$$

Inoltre,

$$R_Y(k) = -\frac{4}{5}R_Y(k-3) \quad \forall k \geq 3.$$

Processi AR

Un processo AR, detto anche *puramente autoregressivo*, costituisce un caso particolare di processo ARMA in cui manca la parte di media mobile, i.e. $C(z) = 1$. In particolare un processo autoregressivo di ordine n , $AR(n)$, è modellato dalla seguente auto-regressione

$$\begin{cases} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = e(t) \\ e(t) = \text{swn}(\cdot, \sigma_e^2) \end{cases} \quad (1.69)$$

e coincide con un modello $ARMA(n, 0)$. Le equazioni di Yule-Walker (1.61) in questo caso si semplificano a

$$R_Y(k) + \sum_{i=1}^n a_i R_Y(|k-i|) = \sigma_e^2 \delta(k) = \begin{cases} \sigma_e^2, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

che risultano lineari, oltre che rispetto ai campioni della funzione di auto-covarianza $R_Y(k)$, anche rispetto ai coefficienti a_i del modello AR. Viene allora naturale chiedersi se è possibile, e quanto è difficile, risolvere il seguente problema inverso: *dati i campioni $R_Y(k)$ della successione di auto-covarianza di una serie temporale $y(t)$, determinare un modello $AR(n)$ di tale serie, i.e., i parametri $\{\sigma_e^2, a_1, \dots, a_n\}$ del modello*. A tale proposito, si osservi che (1.70) fornisce le seguenti equazioni

$$\begin{array}{cccccc} R_Y(0) & + & a_1 R_Y(1) & & + & \dots & + & a_n R_Y(n) & = & \sigma_e^2 \\ R_Y(1) & + & a_1 R_Y(0) & & + & \dots & + & a_n R_Y(n-1) & = & 0 \\ R_Y(2) & + & a_1 R_Y(1) & & + & \dots & + & a_n R_Y(n-2) & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ R_Y(n) & + & a_1 R_Y(n-1) & & + & \dots & + & a_n R_Y(0) & = & 0 \end{array} \quad (1.71)$$

Si noti che le ultime n equazioni in (1.71) consentono di determinare i coefficienti a_1, \dots, a_n una volta noti $R_Y(0), R_Y(1), \dots, R_Y(n)$, mentre la prima equazione permette il calcolo

del parametro σ_e^2 dopo la determinazione dei coefficienti. In particolare, i coefficienti AR risultano dalla soluzione del seguente sistema di equazioni lineari

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_Y(0) & R_Y(1) & \cdots & R_Y(n-1) \\ R_Y(1) & R_Y(0) & \cdots & R_Y(n-2) \\ \vdots & & & \vdots \\ R_Y(n-1) & R_Y(n-2) & \cdots & R_Y(0) \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}(r_Y)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\bar{a}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} R_Y(1) \\ R_Y(2) \\ \vdots \\ R_Y(n) \end{bmatrix}}_{\bar{r}_Y} \quad (1.72)$$

dove $r_Y \triangleq [R_Y(0), \dots, R_Y(n-1)]^T$. Come si vedrà in seguito (nel paragrafo *Statistiche del primo e del secondo ordine*) è possibile ricavare delle buone stime (approssimazioni) di $\{R_Y(k)\}_{k=0}^n$ da una *realizzazione sperimentale* $y^N = \{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$, di durata N sufficientemente lunga, del processo stocastico $Y(\cdot)$. Questo suggerisce il seguente metodo di identificazione per ottenere un modello auto-regressivo di ordine n di un processo stocastico $Y(\cdot)$ a partire da una sua realizzazione y^N .

Identificazione di un modello AR(n)

Dati:

- Dataset sperimentale $y^N = \{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$ del segnale stazionario che si vuole modellare
- Ordine n del modello AR.

Si procede come segue:

1. Dal dataset y^N si ricavano stime di $R_Y(0), R_Y(1), \dots, R_Y(n)$ come sarà illustrato nel successivo paragrafo *Statistiche del primo e del secondo ordine* (vedi *correlogramma*).
2. Si usano le stime determinate al passo precedente per risolvere le equazioni lineari (1.72) rispetto ad $\bar{a} = [a_1, \dots, a_n]^T$.
3. Posto $a = [1, \bar{a}^T]^T$ e $r_Y = [R_Y(0), \bar{r}_Y^T]^T = [r_Y^T, R_Y(n)]^T$, si calcola $\sigma_e^2 = r_Y^T a$. \square

Un modo più agevole di stimare i coefficienti del modello auto-regressivo a partire da un dataset sperimentale $y^N = \{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$ è quello di ricorrere al *metodo dei minimi quadrati* in modo analogo a quanto precedentemente fatto per l'approssimazione razionale di uno spettro. Infatti, posto

$$y_t = y(t), \quad \varphi_t = -[y(t-1), \dots, y(t-n)]^T, \quad \theta = \bar{a} = [a_1, \dots, a_n]^T, \quad \varepsilon_t = e(t)$$

il modello auto-regressivo (1.69) può essere posto nella forma di regressione lineare (1.37) ed i coefficienti a_i possono essere stimati, nel senso dei minimi quadrati, con la formula (1.41).

Poiché la funzione di trasferimento di un modello AR è della forma particolare $H(z) = 1/A(z)$ (può avere poli arbitrari ma gli zeri sono tutti in $z = 0$), un processo AR non è in grado di approssimare processi stocastici stazionari con arbitraria densità spettrale. In particolare, poiché gli zeri di un modello AR sono vincolati a $z = 0$, tali modelli non sono in grado di tener conto di “buchi” (*notch*) nella densità spettrale, che richiederebbero la presenza in $H(z)$ di zeri vicini al cerchio unitario.

Processi MA

Un processo MA, detto anche *a media mobile*, costituisce un caso particolare di processo ARMA in cui manca la parte auto-regressiva, i.e. $A(z) = 1$. In particolare un processo a media mobile di ordine n , MA(n), è modellato dalla seguente equazione alle differenze

$$\begin{cases} y(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_n e(t-n) \\ e(t) = \text{swn}(\cdot, \sigma_e^2) \end{cases} \quad (1.73)$$

e coincide con un modello ARMA(0, n). Le equazioni di Yule-Walker (1.63), in questo caso, si riducono semplicemente a

$$R_Y(k) = \sum_{j=k}^n c_j R_{YE}(j-k) \quad (1.74)$$

$$R_{YE}(k) = c_k \sigma_e^2. \quad (1.75)$$

Sostituendo (1.75) in (1.74), si ottiene

$$R_Y(k) = \sum_{j=k}^n c_j c_{j-k} \sigma_e^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-k} c_i c_{i+k} \right) \sigma_e^2 \quad (1.76)$$

ovvero

$$\begin{cases} R_Y(0) = (1 + c_1^2 + \dots + c_n^2) \sigma_e^2 \\ R_Y(1) = (c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{n-1} c_n) \sigma_e^2 \\ \vdots \\ R_Y(n) = c_n \sigma_e^2 \end{cases} \quad (1.77)$$

Inoltre, da (1.64) si deduce che

$$R_Y(k) = 0, \quad \forall k > n \quad (1.78)$$

ovvero che un processo MA ha *memoria finita* nel senso che la sua funzione di auto-covarianza si annulla per tutti i ritardi k superiori ad un certo valore finito. Più precisamente, un processo $MA(n)$ ha memoria finita pari ad n , ordine del processo. Si noti che il problema inverso di ricavare i parametri MA $c_1, \dots, c_n, \sigma_e^2$ dai campioni della funzione di auto-covarianza $R_Y(0), R_Y(1), \dots, R_Y(n)$ risulta alquanto più difficile rispetto al problema diretto (di analisi) di calcolare questi ultimi conoscendo il modello, in quanto le equazioni (1.76) risultano non lineari rispetto ai suddetti parametri. In realtà, il problema inverso $\{R_Y(k)\}_{k=0}^n \rightarrow \{c_1, \dots, c_n, \sigma_e^2\}$ coincide con il ben noto problema (non lineare) di fattorizzazione spettrale. Infatti, definito lo spettro

$$\Phi_Y(z) = R_Y(0) + \sum_{k=1}^n R_Y(k) (z^k + z^{-k}) \quad (1.79)$$

e posto $C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}$, si ha ovviamente la relazione di fattorizzazione spettrale

$$\Phi_Y(z) = C(z)C(z^{-1})\sigma_e^2 \quad (1.80)$$

per cui la determinazione dei parametri $\{c_1, \dots, c_n, \sigma_e^2\}$ è equivalente alla determinazione del fattore spettrale canonico $(C(z), \sigma_e^2)$ in (1.80). Poiché la funzione di trasferimento $H(z) = C(z)$ di un modello MA coincide con un polinomio (può avere zeri arbitrari ma i poli sono tutti in $z = 0$), un processo MA è ottenuto filtrando rumore bianco con un filtro a *risposta impulsiva finita* (FIR=Finite Impulse Response), i.e.

$$h_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ c_k, & k = 1, \dots, n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Naturalmente, un modello MA (così come anche un modello AR) non è in grado di approssimare processi stocastici stazionari con arbitraria densità spettrale. In particolare, poiché i poli di un modello MA sono vincolati a $z = 0$, tali modelli non sono in grado di tener conto di picchi (risonanze) nella densità spettrale, che richiederebbero la presenza in $H(z)$ di poli vicini al cerchio unitario.

Modelli di processi non stazionari

Nella pratica, la maggior parte dei segnali di interesse nel mondo reale sono, per varie ragioni ed a vari livelli, non stazionari. Si pensi, ad esempio, a tutti i segnali, quali il consumo di energia elettrica da parte di un utente o di una tipologia di utenti oppure la concentrazione nell'aria di un certo inquinante, legati a vari tipi di stagionalità (ora del giorno, giorno della settimana, stagione dell'anno etc.). Lo stesso segnale in uscita da un sistema dinamico presenta caratteristiche di stazionarietà in ben rare occasioni;

nella maggior parte dei casi, esso risulta non stazionario per vari motivi, quali la non stazionarietà di alcuni ingressi, la presenza di instabilità e/o tempo-varianza e/o non linearità nel sistema dinamico, oppure semplicemente perché il transitorio non si è ancora esaurito. Da queste considerazioni emerge l'importanza di introdurre generalizzazioni dei modelli ARMA che possano tener conto in qualche misura di non stazionarietà.

In primo luogo, non stazionarietà del primo ordine (in media) possono facilmente essere tenute in conto aggiungendo ad un processo ARMA a media nulla $\tilde{y}(t)$ la funzione di media $\bar{y}(t)$, i.e.

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t), \quad \tilde{y}(t) = H(z)e(t), \quad e(t) = wn(0, \sigma_e^2)$$

rappresenta un segnale non stazionario che fluttua in modo casuale intorno alla propria media $\bar{y}(t)$ di un segnale stazionario (processo ARMA) $\tilde{y}(t)$. Viceversa, l'introduzione di stazionarietà del secondo ordine (i.e. della funzione di auto-covarianza) può essere, ad esempio, realizzata rilassando il vincolo che la funzione di trasferimento $H(z)$ abbia poli solamente all'interno del cerchio unitario. Nel seguito, si prende in esame un particolare segnale con varianza non stazionaria, noto come processo di Wiener, e successivamente una generalizzazione (sia del processo di Wiener che dei processi ARMA) nota come processo ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*), ovvero processo ARMA integrato.

Processo di Wiener

Si consideri un processo stocastico scalare, a tempo-discreto, $w(t)$ definito ricorsivamente come segue

$$\begin{cases} w(t) &= w(t-1) + e(t) \\ e(t) &= sn(0, \sigma_e^2) \end{cases} \quad (1.81)$$

a partire da una condizione iniziale $w(0)$ aleatoria di media \bar{w}_0 e varianza σ_0^2 nonché incorrelata con il rumore bianco $e(t)$, i.e. $w(0) \sim (\bar{w}_0, \sigma_0^2) \perp e(t)$ qualunque sia t . Si noti da (1.81) come $w(t)$ sia ottenuto dal rumore bianco (stazionario a media-nulla) in ingresso $e(t)$ mediante un particolare filtro digitale del primo ordine con funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (1.82)$$

avente un polo, sul cerchio unitario, in $z = 1$. Si noti come la presenza di questo polo faccia sì che il processo di Wiener non appartenga alla classe di processi ARMA. Il sistema con funzione di trasferimento (1.82), per motivi che saranno chiari a breve, prende il nome di *accumulatore* o *integratore a tempo-discreto*. Per tale processo, si vogliono determinare la funzione di media $\bar{w}(t) = E[w(t)]$ e la funzione di auto-covarianza $R_w(t, s) = E[\tilde{w}(t)\tilde{w}(s)]$, con $\tilde{w}(t) \triangleq w(t) - \bar{w}(t)$. Risolvendo (1.82) per $t \geq 1$, si ottiene

$$w(t) = w(0) + \sum_{i=1}^t e(i) \quad (1.83)$$

che evidenzia come l'uscita all'istante t accumuli (sommi/integri) tutti gli ingressi fino all'istante t , da cui deriva il nome precedentemente attribuito al sistema (1.82). Pertanto,

$$\begin{aligned}\bar{w}(t) &\triangleq E[w(t)] = \bar{w}_0 \\ R_w(t, s) &\triangleq E[(w(t) - \bar{w}_0)(w(s) - \bar{w}_0)] \\ &= E\left[\left(\tilde{w}(0) + \sum_{i=1}^t e(i)\right)\left(\tilde{w}(0) + \sum_{j=1}^s e(j)\right)\right] \\ &= \sigma_0^2 + \min(t, s) \sigma_e^2.\end{aligned}$$

Inoltre,

$$\Sigma_w(t) \triangleq R_w(t, t) = \sigma_0^2 + t \sigma_e^2.$$

Riassumendo, il processo di Wiener $w(t)$ risulta stazionario in media, con media $\bar{w}(t)$ costante pari alla media iniziale \bar{w}_0 , mentre presenta non stazionarietà del secondo ordine, cioè funzione di auto-covarianza $R_w(t, s)$ non dipendente da $|t - s|$ bensì da $\min(t, s)$ e funzione di varianza $\Sigma_w(t)$ crescente linearmente con il tempo t .

Il processo di Wiener può essere generalizzato sostituendo la funzione di trasferimento $H(z)$ in (1.82) con

$$H(z) = \frac{1}{\Delta(z)} \quad (1.84)$$

dove $\Delta(z)$ è un polinomio monico con tutte le radici sul cerchio unitario (in particolare, $\Delta(z) = 1 - z^{-1}$ per il processo di Wiener). Ad esempio, nel caso di due radici complesse coniugate $e^{\pm j\omega_0} = \cos \omega_0 \pm j \sin \omega_0$, con $\omega_0 > 0$, si ha

$$\Delta(z) = 1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}$$

ed il corrispondente processo stocastico $y(t)$ definito tramite

$$\Delta(z) y(t) = e(t) \quad (1.85)$$

presenta caratteristiche di oscillatorietà nel tempo. Nel seguito, modelli della forma (1.85) con $\Delta(z)$ polinomio avente tutte le radici in $|z| = 1$ saranno riferiti come *processi di Wiener generalizzati*.

Processi ARIMA

Combinando un modello ARMA di processo stazionario con un processo generalizzato di Wiener (non stazionario), si ottiene il seguente modello ARIMA

$$\begin{cases} y(t) = H(z) e(t) \\ e(t) = wn(0, \sigma_e^2) \\ H(z) = \frac{C(z)}{A(z)\Delta(z)} \end{cases} \quad (1.86)$$

dove: $C(z)$ è un polinomio con radici in $|z| \leq 1$; $A(z)$ è un polinomio con radici in $|z| < 1$; $\Delta(z)$ è un polinomio con radici in $|z| = 1$ che tiene conto di stazionarietà del secondo ordine. Si noti come un processo ARIMA possa essere interpretato come la cascata di un modello ARMA $C(z)/A(z)$ e di un modello di Wiener generalizzato $1/\Delta(z)$, indipendentemente dall'ordine con cui tali modelli sono posti in cascata. Ad esempio, si può considerare un processo ARIMA $y(t)$ come generato integrando mediante $1/\Delta(z)$ un processo ARMA $z(t) = C(z)A^{-1}(z)e(t)$, i.e.,

$$\begin{cases} A(z)z(t) = C(z)e(t) \\ \Delta(z)y(t) = z(t). \end{cases} \quad (1.87)$$

In modo analogo, lo stesso processo stocastico non stazionario $y(t)$ può essere ottenuto applicando un filtraggio ARMA tramite la funzione di trasferimento $C(z)/A(z)$ ad un processo generalizzato di Wiener $w(t) = \Delta^{-1}(z)e(t)$, i.e.,

$$\begin{cases} \Delta(z)w(t) = e(t) \\ A(z)y(t) = C(z)w(t). \end{cases} \quad (1.88)$$

Statistiche del primo e secondo ordine

In questo capitolo, è stato affrontato e risolto analiticamente, nel caso stazionario, il problema di determinare la funzione di auto-covarianza e/o lo spettro e/o la densità spettrale di un segnale stazionario a partire da un suo modello matematico. In molte situazioni pratiche, tuttavia, non è disponibile un modello matematico del segnale reale di interesse e diventa essenziale stimarne le suddette caratteristiche statistiche a partire da osservazioni sperimentali del segnale stesso. Il problema della determinazione sperimentale delle statistiche del primo e del secondo ordine di un segnale, trattato in questo paragrafo, costituisce dunque il *trait d'union* fra la teoria dei processi stocastici e la pratica dei segnali reali. Specificamente, si farà riferimento alla stima della media, delle funzioni di auto-covarianza e cross-covarianza, delle densità e cross-densità spettrali di segnali stazionari, o supposti tali.

Si consideri un segnale casuale $Y(t)$ e per tale segnale si assuma di avere a disposizione un insieme finito di osservazioni (*dataset*) $y^N \triangleq \{y(t)\}_{t=1}^N = \{y(1), \dots, y(N)\}$ sufficientemente ampio, i.e. $N \gg 1$. Si ipotizza che $Y(t)$ sia un processo stocastico in senso lato con media $m_Y(t) \equiv m_Y$ e funzione di auto-covarianza $R_Y(t, s) = R_Y(t - s)$.

Come stima \hat{m}_Y^N , basata sul dataset y^N , della media m_Y è naturale considerare il valore

$$\hat{m}_Y^N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t). \quad (1.89)$$

È immediato constatare che

$$E [\widehat{m}_Y^N] = E \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) \right] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E [y(t)] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N m_Y = m_Y$$

ovvero (1.89) fornisce una *stima non polarizzata* della media m_Y . La varianza di tale stima è data da

$$\begin{aligned} \Sigma_{\widehat{m}_Y^N} &\triangleq E \left[(\widehat{m}_Y^N - m_Y) (\widehat{m}_Y^N - m_Y)^T \right] \\ &= E \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) - m_Y \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N y(s) - m_Y \right)^T \right] \\ &= \frac{1}{N^2} E \left\{ \left[\sum_{t=1}^N (y(t) - m_Y) \right] \left[\sum_{s=1}^N (y(s) - m_Y) \right]^T \right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N R_Y(t-s) \\ &= \frac{NR_Y(0) + (N-1) [R_Y(1) + R_Y^T(1)] + \cdots + [R_Y(N-1) + R_Y^T(N-1)]}{N^2} \\ &= \frac{NR_Y(0) + \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) [R_Y(k) + R_Y^T(k)]}{N^2}. \end{aligned} \tag{1.90}$$

Pertanto, se $\lim_{k \rightarrow \infty} R_Y(k) = 0$, si ha che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_{\widehat{m}_Y^N} = 0 \tag{1.91}$$

ovvero (1.89) fornisce anche una *stima consistente* della media m_Y nel senso che la associata covarianza $\Sigma_{\widehat{m}_Y^N}$ di tale stima tende a zero, come $1/N$, quando il numero di osservazioni N va all'infinito.

Si noti come lo stimatore di media definito in (1.89) non sia altro che la *media campionaria* (aritmetica) dei campioni di segnale $y(1), y(2), \dots, y(N)$. Per quanto visto sopra (formula della varianza $\Sigma_{\widehat{m}_Y^N}$), tale stimatore risulta tanto più accurato quanto più elevato è il numero N di campioni considerati. Da (1.91) si evince che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{m}_Y^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) = m_Y. \tag{1.92}$$

Un processo stazionario in senso lato $Y(t)$ per cui vale (1.92) viene detto *ergodico in media*; si tratta di un segnale stazionario la cui media $m_Y \triangleq E [Y(t)]$ può essere valutata come

media campionaria su una unica realizzazione del segnale, di durata N sufficientemente elevata.

Correlogrammi

In modo analogo a quanto fatto nel precedente paragrafo per la media, si può procedere per stimare la funzione di auto-covarianza $R_Y(k) \triangleq E[(Y(t+k) - m_Y)(Y(t) - m_Y)^T]$ sostituendo l'operatore di media $E[\dots]$ con la media campionaria sul dataset y^N e la media m_Y con la sua stima \widehat{m}_Y^N in (1.89). Si ottiene in questo modo la stima

$$\widehat{R}_Y^N(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} [y(t+k) - \widehat{m}_Y^N] [y(t) - \widehat{m}_Y^N]^T \quad (1.93)$$

che prende il nome di *correlogramma*. Si noti che

$$\begin{aligned} E[\widehat{R}_Y^N(k)] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} [y(t+k) - \widehat{m}_Y^N] [y(t) - \widehat{m}_Y^N]^T\right] \\ &= \frac{1}{N} E\left[\sum_{t=1}^{N-k} [(y(t+k) - m_Y) + (m_Y - \widehat{m}_Y^N)] [(y(t) - m_Y) + (m_Y - \widehat{m}_Y^N)]^T\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} R_Y(k) + \frac{N-k}{N} E[(\widehat{m}_Y^N - m_Y)(\widehat{m}_Y^N - m_Y)^T] \\ &= \frac{N-k}{N} [R_Y(k) + \Sigma_{\widehat{m}_Y^N}] \end{aligned} \quad (1.94)$$

da cui, in virtù di (1.91),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\widehat{R}_Y^N(k)] = R_Y(k)$$

ovvero il correlogramma fornisce una stima asintoticamente (per $N \rightarrow \infty$) non polarizzata della funzione di auto-covarianza.

Dati due processi stocastici $Y(t)$ ed $U(t)$ congiuntamente stazionari in senso lato ed i rispettivi dataset $y^N = \{y(1), \dots, y(N)\}$ ed $u^N = \{u(1), \dots, u(N)\}$, se ne definisce il *cross-correlogramma*

$$\widehat{R}_{YU}^N(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} [y(t+k) - \widehat{m}_Y^N] [u(t) - \widehat{m}_U^N]^T \quad (1.95)$$

che, in modo analogo, costituisce una stima asintoticamente non polarizzata della funzione di cross-covarianza dei due processi, i.e.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\widehat{R}_{YU}^N(k)] = R_{YU}(k).$$

Periodogrammi

È prassi rappresentare il dataset temporale $y^N \triangleq \{y(1), \dots, y(N)\}$ con un equivalente dataset nel dominio della frequenza $\{Y_N(\omega_k)\}_{k=1}^N$. A tale proposito, si definisce il segnale $\tilde{y}(t) \triangleq y(t) - \hat{m}_y^N$, centrato rispetto alla media campionaria definita in (1.89), e la sua *trasformata di Fourier discreta* (DFT) nei punti $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, per $k = 1, \dots, N$,

$$Y_N(\omega) = DFT(\tilde{y}^N) \triangleq \sum_{t=1}^N \tilde{y}(t) e^{-j\omega t}. \quad (1.96)$$

Dal dataset frequenziale $\{Y_N(\frac{2\pi}{N}k)\}_{k=1}^N$ è, a sua volta possibile, determinare univocamente il dataset temporale \tilde{y}^N mediante *DFT inversa*

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_N(\omega_k) e^{j\omega_k t} \quad t = 1, \dots, N \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N}k. \quad (1.97)$$

Si definisce *periodogramma* del segnale $Y(t)$ basato sul dataset y^N la funzione

$$\hat{\varphi}_Y^N(\omega) \triangleq \frac{1}{N} Y_N(\omega) Y_N^T(-\omega) = \frac{1}{N} Y_N(\omega) \overline{Y_N^T(\omega)} = \frac{1}{N} Y_N(\omega) Y_N^H(\omega) \quad (1.98)$$

dove H denota l'*Hermitiano*, cioè il *trasposto coniugato*. Si noti che, nel caso scalare,

$$\hat{\varphi}_Y^N(\omega) \triangleq \frac{1}{N} |Y_N(\omega)|^2,$$

ovvero il periodogramma risulta proporzionale al modulo al quadrato della DFT. Il seguente risultato mette in relazione il periodogramma con il correlogramma.

Teorema (Relazione fra periodogramma e correlogramma) - Vale la seguente relazione:

$$\hat{\varphi}_Y^N(\omega) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_Y^N(k) e^{-j\omega k}. \quad (1.99)$$

Dimostrazione - Dalla definizione di periodogramma si ha

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_Y^N(\omega) &\triangleq \frac{1}{N} Y_N(\omega) Y_N^T(-\omega) \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{\ell=1}^N \tilde{y}(\ell) e^{-j\omega \ell} \right] \left[\sum_{i=1}^N \tilde{y}^T(i) e^{j\omega i} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \sum_{i=1}^N \tilde{y}(\ell) \tilde{y}^T(i) e^{-j\omega(\ell-i)}. \end{aligned}$$

Operando un cambiamento di indice $k = \ell - i$ al posto di ℓ , dalla precedente espressione si ottiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_Y^N(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left[\sum_{i=1}^{N-k} \tilde{y}(i+k) \tilde{y}^T(i) \right] e^{-j\omega k} \\
&= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} \tilde{y}(i+k) \tilde{y}^T(i) \right] e^{-j\omega k} \\
&= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \widehat{R}_Y^N(k) e^{-j\omega k}
\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. \square

Si noti che (1.99) afferma che il periodogramma è la trasformata di Fourier, troncata fra $-(N-1)$ ed $N-1$ anziché fra $-\infty$ e $+\infty$, del correlogramma. Questo suggerisce che, per N sufficientemente elevato, il periodogramma $\widehat{\varphi}_Y^N(\omega)$ possa costituire una buona approssimazione della densità spettrale $\varphi_Y(\omega)$ nella misura in cui il correlogramma $\widehat{R}_Y^N(k)$ ben approssima la funzione di auto-covarianza $R_Y(k)$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\widehat{\varphi}_Y^N(\omega) \right] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} E \left[\widehat{R}_Y^N(k) \right] e^{-j\omega k} \right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\widehat{R}_Y^N(k) \right] \right\} e^{-j\omega k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_Y(k) e^{-j\omega k} \\
&= \varphi_Y(\omega)
\end{aligned}$$

cioè il periodogramma fornisce una stima asintoticamente non polarizzata della densità spettrale.

Dati due processi stocastici $Y(t)$ ed $U(t)$ congiuntamente stazionari in senso lato ed i rispettivi dataset $y^N = \{y(1), \dots, y(N)\}$ ed $u^N = \{u(1), \dots, u(N)\}$, se ne definisce il *cross-periodogramma*

$$\widehat{\varphi}_{YU}^N(\omega) = \frac{1}{N} Y_N(\omega) U_N^H(\omega) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \widehat{R}_{YU}^N(k) e^{-j\omega k} \quad (1.100)$$

che, in modo analogo, costituisce una stima asintoticamente non polarizzata della densità spettrale incrociata dei due processi, i.e.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\widehat{\varphi}_{YU}^N(\omega) \right] = \varphi_{YU}(\omega).$$

Analisi di sistemi dinamici stocastici nello spazio di stato

In questo paragrafo finale del capitolo, si vuole affrontare il problema di analisi di un sistema dinamico stocastico assumendo che quest'ultimo sia descritto, più in generale da quanto finora considerato, da una rappresentazione nello spazio di stato. Questo offre, in linea di principio, strumenti più generali per valutare l'evoluzione nel tempo delle caratteristiche statistiche dei segnali di interesse (stato e/o uscita del sistema dinamico) anche durante il transitorio così come nel caso di sistemi non lineari e/o tempo-varianti.

Sistema a tempo-discreto

Si consideri il sistema a tempo-discreto

$$x(t+1) = f(t, x(t), w(t)) \quad (1.101)$$

dove: $t \in \mathbb{Z}$ è il tempo; $x(t)$ lo stato all'istante t ; $w(t)$ un ingresso stocastico che, senza perdita di generalità, può essere assunto bianco, a media nulla e di varianza $Q(t)$, i.e., $w(t) = wn(0, Q(t))$. Ipotizzando di conoscere media $\bar{x}(0) \triangleq E[x(0)]$ e covarianza $\Sigma_X(0) \triangleq E[\tilde{x}(0)\tilde{x}^T(0)]$ dello stato iniziale, i.e. $x(0) \sim (\bar{x}(0), \Sigma_X(0))$, ed assumendo l'incorrelazione di quest'ultimo con tutti i campioni dell'ingresso stocastico $w(\cdot)$, i.e. $x(0) \perp w(t)$ per ogni $t \geq 0$, ci si pone il problema di determinare l'evoluzione temporale della funzione di media $\bar{x}(t) = E[x(t)]$ nonché della funzione di auto-covarianza $R_X(t, s) \triangleq E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(s)]$ dello stato, dove si è posto $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \bar{x}(t)$. Il problema posto, in generale, non è risolvibile analiticamente se la funzione $f(t, x, w)$ in (1.101) risulta non lineare rispetto agli argomenti x e/o w . In tal caso, l'evoluzione temporale dei momenti dello stato $x(t)$ tramite (1.101) può solo essere determinata numericamente, in modo approssimato, ricorrendo a strumenti, quali ad esempio la *trasformata unscented* o il *metodo Monte Carlo*, che consentono di propagare i momenti di una variabile aleatoria attraverso una trasformazione non lineare.

Nel seguito, si affronta la soluzione esatta del problema nel caso di sistema lineare della forma

$$x(t+1) = A(t)x(t) + b(t) + D(t)w(t) \quad (1.102)$$

$$w(t) = wn(0, Q(t)) \quad (1.103)$$

$$x(0) \sim (\bar{x}(0), \Sigma_X(0)) \quad (1.104)$$

$$x(0) \perp w(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (1.105)$$

dove $b(t)$ è un termine deterministico noto (ad esempio, $b(t) = B(t)u(t)$ in un sistema di controllo dove $u(t)$ è il segnale di controllo fornito dal controllore). Mediante (1.102) si ricava immediatamente l'evoluzione temporale della media

$$\bar{x}(t+1) \triangleq E[x(t+1)] = E[A(t)x(t) + b(t) + D(t)w(t)] = A(t)\bar{x}(t) + b(t). \quad (1.106)$$

Quindi, sottraendo (1.106) da (1.102), si ha

$$\tilde{x}(t+1) = x(t+1) - \bar{x}(t+1) = A(t)[x(t) - \bar{x}(t)] + D(t)w(t) = A(t)\tilde{x}(t) + D(t)w(t). \quad (1.107)$$

Risolvendo (1.107), con condizione iniziale $\tilde{x}(0) = x(0) - \bar{x}(0)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \Phi(t, 0)\tilde{x}(0) + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi(t, i+1)D(i)w(i) \\ \Phi(t, i) &= \begin{cases} I, & t = i \\ A(t-1)\cdots A(i), & t > i \end{cases} \end{aligned}$$

da cui, in virtù della bianchezza di $w(\cdot)$ e della sua incorrelazione con lo stato iniziale, si deduce l'incorrelazione di $\tilde{x}(t)$ e $w(t)$, i.e. $E[\tilde{x}(t)w^T(t)] = 0$. Quindi, da (1.107), si ricava l'evoluzione temporale della funzione di varianza $\Sigma_X(t) \triangleq E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)]$

$$\begin{aligned} \Sigma_X(t+1) &\triangleq E[\tilde{x}(t+1)\tilde{x}^T(t+1)] \\ &= E\left\{[A(t)\tilde{x}(t) + D(t)w(t)][A(t)\tilde{x}(t) + D(t)w(t)]^T\right\} \\ &= A(t)E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)]A^T(t) + D(t)E[w(t)w^T(t)]D^T(t) \\ &= A(t)\Sigma_X(t)A^T(t) + D(t)Q(t)D^T(t). \end{aligned} \quad (1.108)$$

Riassumendo: a partire dalle condizioni iniziali $\bar{x}(0)$ e $\Sigma_X = \Sigma_X^T \geq 0$, le statistiche del primo e secondo ordine del vettore di stato $x(t)$ possono essere determinate ricorsivamente come segue

$$\bar{x}(t+1) = A(t)\bar{x}(t) + b(t) \quad (1.109)$$

$$\Sigma_X(t+1) = A(t)\Sigma_X(t)A^T(t) + D(t)Q(t)D^T(t) \quad (1.110)$$

per $t = 1, 2, \dots$

Si noti che:

- La media evolve allo stesso modo in cui evolve lo stato del sistema (1.102) in assenza dell'ingresso stocastico $w(t)$.
- La varianza evolve in accordo all'equazione alle differenze di Lyapunov (1.110).
- Nel caso Gaussiano, cioè quando lo stato iniziale $x(0) = \mathcal{N}(\bar{x}(0), \Sigma_X(0))$ e tutti i campioni dell'ingresso stocastico $w(t) = \mathcal{N}(0, Q(t))$ per ogni $t \geq 0$ sono distribuiti normalmente, è immediato constatare come, per l'invarianza della distribuzione Gaussiana rispetto a trasformazioni lineari, lo stato $x(t)$ preservi la distribuzione Gaussiana ad ogni istante temporale, i.e. $x(t) = \mathcal{N}(\bar{x}(t), \Sigma_X(t))$. In questo

caso, (1.109)-(1.110) consentono di determinare ricorsivamente le regioni (ellissoidi) di confidenza dello stato per un certo prefissato livello di confidenza $100\alpha\%$, precisamente

$$\mathcal{R}_\alpha(t) = \mathcal{E}(\bar{x}(t), \Sigma_X(t), \gamma(\alpha)) \triangleq \{x : (x - \bar{x}(t))^T \Sigma_X^{-1}(t) (x - \bar{x}(t)) \leq \gamma(\alpha)\} \quad (1.111)$$

dove il fattore di scala $\gamma(\alpha)$ è determinato in funzione del livello $\alpha \in (0, 1)$ e del numero di gradi di libertà (numero di componenti del vettore di stato) dalle tabelle della distribuzione χ^2 . Si ricorda che tali regioni sono centrate rispetto alla media $\bar{x}(t)$ ed hanno forma dipendente dagli autovalori ed autovettori della matrice di covarianza $\Sigma_X(t)$. Anche nel caso non Gaussiano, è tuttavia prassi consolidata adottare gli ellissoidi (1.111) come stime delle regioni di confidenza effettive, che in generale risultano di difficile (se non impossibile) valutazione.

Per determinare la funzione di auto-covarianza $R_X(t, s) \triangleq E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(s)]$, si osserva preliminarmente che, per $t > s$, vale la seguente relazione

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, s) \tilde{x}(s) + \sum_{i=s}^{t-1} \Phi(t, i+1) D(i) w(i)$$

da cui, poiché $\tilde{x}(s)$ è certamente incorrelato con tutti gli ingressi $w(s), \dots, w(t-1)$, risulta

$$\begin{aligned} R_X(t, s) &\triangleq E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(s)] \\ &= E\left\{\left[\Phi(t, s) \tilde{x}(s) + \sum_{i=s}^{t-1} \Phi(t, i+1) D(i) w(i)\right] \tilde{x}^T(s)\right\} \\ &= \Phi(t, s) \Sigma_X(s) \\ &= A(t-1) \cdots A(s) \Sigma_X(s) \quad t > s. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Si noti come la precedente formula fornisca la funzione di auto-covarianza per $t > s$; per $t < s$ si osserva che

$$\begin{aligned} R_X(t, s) &= R_X^T(s, t) = [\Phi(s, t) \Sigma_X(t)]^T \\ &= \Sigma_X(t) \Phi^T(s, t) \\ &= \Sigma_X(t) [A(s-1) \cdots A(t)]^T \\ &= \Sigma_X(t) A^T(t) \cdots A^T(s-1) \quad t < s. \end{aligned} \quad (1.113)$$

In alcune situazioni, ha interesse valutare le statistiche di un segnale $y(t)$ legato allo stato $x(t)$ del sistema da una relazione del tipo

$$\begin{aligned} y(t) &= C(t)x(t) + v(t) \\ v(t) &= wn(0, R(t)) \\ v(t) &\perp w(s) \perp x(0) \quad \forall t, s \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{1.114}$$

È immediato verificare che

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= C(t)\bar{x}(t) \\ \tilde{y}(t) &= C(t)\tilde{x}(t) + v(t) \\ R_Y(t, s) &= C(t)R_X(t, s)C^T(s) + R(t)\delta(t - s) \\ R_{YX}(t, s) &= C(t)R_X(t, s). \end{aligned}$$

Di seguito, si concentra l'attenzione sul caso particolare di sistema tempo-invariante (con matrici $A(t) \equiv A, C(t) \equiv C, D(t) \equiv D$ costanti) e di ingressi, sia $w(\cdot)$ che $v(\cdot)$, stazionari (con matrici di covarianza $Q(t) \equiv Q, R(t) \equiv R$ costanti). In questo caso, l'evoluzione dei momenti precedentemente determinata si riduce a

$$\bar{x}(t+1) = A\bar{x}(t) + b(t) \tag{1.115}$$

$$\Sigma_X(t+1) = A\Sigma_X(t)A^T + DQD^T \tag{1.116}$$

$$R_X(t, s) = \begin{cases} A^{t-s}\Sigma_X(s), & t > s \\ \Sigma_X(t), & t = s \\ \Sigma_X(t)(A^T)^{s-t}, & t < s \end{cases} \tag{1.117}$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \tag{1.118}$$

$$R_Y(t, s) = CR_X(t, s)C^T + R\delta(t - s) \tag{1.119}$$

$$R_{YX}(t, s) = CR_X(t, s) \tag{1.120}$$

Si fa notare come, partendo da generiche condizioni iniziali $\bar{x}(0)$ e $\Sigma_X(0)$, sia $\bar{x}(t)$ che $\Sigma_X(t)$ risultanti da (1.115) e (1.116) dipendano comunque dal tempo t benché tutte le matrici siano costanti. Viene naturale chiedersi se e sotto quali condizioni il sistema converge, per $t \rightarrow \infty$, ad un regime stazionario per quanto riguarda le statistiche del primo e del secondo ordine in (1.115)-(1.120).

Per quanto riguarda la media, è ben noto dalla teoria dei sistemi LTI deterministici che, se il sistema è asintoticamente stabile (i.e., la matrice A ha tutti gli autovalori all'interno del cerchio unitario del piano complesso) e l'ingresso deterministico $b(t) \equiv b$ è costante, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = \bar{x} = (I - A)^{-1}b, \quad \forall \bar{x}(0) \in \mathbb{R}^n$$

ovvero si ha stazionarietà asintotica in media (del primo ordine). Si noti che, nell'ipotesi di stabilità asintotica, la matrice A non può avere autovalori in $z = 1$ e, conseguentemente, la matrice $I - A$ risulta invertibile e lo stato di equilibrio $\bar{x} = (I - A)^{-1}b$ ben definito.

Viceversa, la stazionarietà del secondo ordine è legata alla soluzione dell'equazione alle differenze di Lyapunov (1.116) e più precisamente al fatto che tale soluzione tenda, per $t \rightarrow \infty$, ad un valore costante, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma_X(t) = \Sigma_X = \Sigma_X^T \geq 0.$$

Facendo il limite per $t \rightarrow \infty$ di entrambi i membri di (1.116), si evince che un tale valore di regime Σ_X (se esiste) deve necessariamente soddisfare l'*equazione algebrica di Lyapunov*

$$\Sigma_X = A\Sigma_X A^T + DQD^T. \quad (1.121)$$

Vale il seguente risultato.

Teorema dell'equazione di Lyapunov - Se la matrice A ha tutti gli autovalori in $|z| < 1$, allora:

- (i) L'equazione algebrica di Lyapunov (1.121) ammette una unica soluzione simmetrica semi-definita positiva $\Sigma_X = \Sigma_X^T \geq 0$.
- (ii) Qualunque sia la condizione iniziale, l'equazione alle differenze di Lyapunov (1.116) converge alla matrice Σ_X di cui al punto (i), i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma_X(t) = \Sigma_X, \quad \forall \Sigma_X(0) = \Sigma_X^T(0) \geq 0.$$

- (iii) Definita una matrice B tale che $DQD^T = BB^T$, la matrice Σ_X di cui al punto (i) è definita positiva, i.e. $\Sigma_X > 0$, se e solo se la coppia (A, B) è raggiungibile.

Dimostrazione

Parte (i) - Si consideri

$$\Sigma_X = \sum_{i=0}^{\infty} A^i DQD^T (A^i)^T. \quad (1.122)$$

Per l'ipotesi fatta sugli autovalori della matrice A , A^i tende a zero esponenzialmente per $i \rightarrow \infty$ e, quindi, la serie a secondo membro di (1.122) converge ad una matrice costante Σ_X che, per costruzione, risulta simmetrica e semi-definita positiva. È facile verificare che la matrice Σ_X definita in (1.122) soddisfa l'equazione algebrica di Lyapunov (1.121).

Infatti,

$$\begin{aligned}
\Sigma_X - A\Sigma_X A^T &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i D Q D^T (A^i)^T - \sum_{j=0}^{\infty} A^{j+1} D Q D^T (A^{j+1})^T \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} A^i D Q D^T (A^i)^T - \sum_{i=1}^{\infty} A^i D Q D^T (A^i)^T \\
&= D Q D^T.
\end{aligned}$$

Per dimostrare l'unicità della soluzione si assuma, per contraddizione, l'esistenza di due soluzioni distinte $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ di (1.121). Deve, pertanto, risultare

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 - A\Sigma_1 A^T &= D Q D^T \\
\Sigma_2 - A\Sigma_2 A^T &= D Q D^T
\end{aligned}$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene

$$(\Sigma_1 - \Sigma_2) - A(\Sigma_1 - \Sigma_2)A^T = 0.$$

Pre-moltiplicando per A^i e post-moltiplicando per $(A^i)^T$, per qualunque intero $i \geq 0$, si ha

$$A^i (\Sigma_1 - \Sigma_2) (A^i)^T = A^{i+1} (\Sigma_1 - \Sigma_2) (A^{i+1})^T \quad \forall i \geq 0$$

da cui si evince che la matrice $A^i (\Sigma_1 - \Sigma_2) (A^i)^T$ è costante (indipendente da i). Quindi

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = [A^i (\Sigma_1 - \Sigma_2) (A^i)^T]_{i=0} = [A^i (\Sigma_1 - \Sigma_2) (A^i)^T]_{i \rightarrow \infty} = 0$$

contraddice l'esistenza di due soluzioni distinte Σ_1 e Σ_2 di (1.121) dimostrando così l'unicità di tale soluzione.

Parte (ii) - È immediato verificare, per induzione, che la soluzione dell'equazione alle differenze di Lyapunov (1.116) è data da

$$\Sigma_X(t) = A^t \Sigma_X(0) (A^t)^T + \sum_{i=0}^{t-1} A^i D Q D^T (A^i)^T \quad (1.123)$$

per cui, in virtù dell'ipotesi sugli autovalori di A e di (1.122),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i D Q D^T (A^i)^T = \Sigma_X, \quad \forall \Sigma_X(0) = \Sigma_X^T(0) \geq 0$$

come volevasi dimostrare.

Parte (iii) - Si noti da (1.122) che, posto $DQD^T = BB^T$, la matrice di covarianza asintotica può essere espressa nel seguente modo

$$\Sigma_X = \sum_{i=0}^{\infty} (A^i B) (A^i B)^T$$

che non è altro che il *Gramiano di raggiungibilità* della coppia (A, B) . Definita la matrice di raggiungibilità di ordine ∞ della coppia (A, B) come

$$R_\infty \triangleq [B, AB, A^2B, \dots,]$$

tale Gramiano è dato da

$$\Sigma_X = R_\infty R_\infty^T$$

per cui $\Sigma_X > 0$ se e solo se $\text{rank } R_\infty = n = \dim x$. Poiché $\text{rank } R_\infty = \text{rank } R_n = \text{rank } [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$, condizione necessaria e sufficiente affinché $\Sigma_X > 0$ è che $\text{rank } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$, ovvero che la coppia (A, B) sia raggiungibile, come volevasi dimostrare. \square

Si noti come l'equazione algebrica di Lyapunov (1.121), che consente il calcolo della covarianza di regime Σ_X , consista, in virtù della sua simmetria, di un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni lineari in altrettante incognite (le componenti di un triangolo, indifferentemente quello superiore o inferiore, della matrice Σ_X).

Nel seguito, si vuole mostrare come il precedente teorema dell'equazione di Lyapunov fornisca un metodo alternativo (al metodo di Yule-Walker precedentemente esaminato in relazione ai processi ARMA) per l'analisi a regime delle caratteristiche statistiche del secondo ordine di un processo stocastico stazionario. A tale proposito, si fa vedere preliminarmente come si può equivalentemente rappresentare un processo ARMA $y(t) = H(z)e(t)$ nello spazio di stato tramite

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + De(t) \\ y(t) = Cx(t) + e(t) \end{cases} \quad (1.124)$$

dove le matrici di stato scelte costituiscono una realizzazione della funzione di trasferimento $H(z)$, i.e. $H(z) = C(zI - A)^{-1}D + 1$. Data la funzione di trasferimento del processo ARMA

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{C(z)}{A(z)} = \frac{1 + c_1z^{-1} + \dots + c_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} \\ &= 1 + \frac{C(z) - A(z)}{A(z)} = 1 + \frac{(c_1 - a_1)z^{-1} + \dots + (c_n - a_n)z^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} \end{aligned} \quad (1.125)$$

una possibile scelta delle matrici è

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n - a_n \end{bmatrix} \quad (1.126)$$

$$C = [1, 0, \dots, 0, 0].$$

Si lascia al lettore la verifica che le matrici in (1.126) costituiscono una realizzazione della funzione di trasferimento in (1.125), nota in letteratura come *realizzazione canonica di osservabilità*. Per il calcolo della funzione di auto-covarianza del processo ARMA $y(\cdot)$ si può dunque fare riferimento a (1.124) che, in letteratura, va sotto il nome di *modello alle innovazioni* e costituisce una rappresentazione equivalente, nello spazio di stato, del modello ingresso-uscita ARMA. Assumendo $e(t) = \text{swn}(0, \sigma_e^2)$, le medie a regime di $x(t)$ e $y(t)$ risultano ovviamente nulle per cui $\tilde{x}(t) = x(t)$ e $\tilde{y}(t) = y(t)$ nel seguito. Per determinare la covarianza a regime dello stato $\Sigma_X = E[x(t)x^T(t)]$ occorre, viceversa, risolvere l'equazione algebrica di Lyapunov associata a (1.124), ovvero

$$\Sigma_X = A\Sigma_X A^T + \sigma_e^2 D D^T. \quad (1.127)$$

Risolvendo (1.124) si osserva che

$$y(t+k) = CA^k x(t) + e(t+k) + h_1 e(t+k-1) + \cdots + h_k e(t)$$

dove $h_i \triangleq CA^{i-1}D$, per $i \geq 1$, sono i campioni della risposta impulsiva (anti-trasformata zeta) della funzione di trasferimento $H(z) = C(zI - A)^{-1}D + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} h_i z^{-i}$. Quindi, la desiderata funzione di auto-covarianza è data da

$$\begin{aligned} R_Y(k) &\triangleq E[y(t+k)y(t)] = E \left\{ \left[CA^k x(t) + \sum_{i=0}^k h_i e(t+k-i) \right] [Cx(t) + e(t)] \right\} \\ &= CA^k \Sigma_X C^T + h_k \sigma_e^2 = \begin{cases} C \Sigma_X C^T + \sigma_e^2, & k = 0 \\ CA^{k-1} (A \Sigma_X C^T + D \sigma_e^2), & k \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.128)$$

Riassumendo i precedenti sviluppi, si ha il seguente metodo alternativo per il calcolo della funzione di auto-covarianza di un processo ARMA.

Passo 1. Si determinano le matrici A, C, D in (1.126) mediante realizzazione canonica di osservabilità della funzione di trasferimento (1.125) del processo ARMA.

Passo 2. Si risolve rispetto a $\Sigma_X = \Sigma_X^T$ l'equazione algebrica di Lyapunov (1.127).

Passo 3. Si determina la funzione di auto-covarianza $R_Y(k)$ mediante (1.128).

Si riporta di seguito un esempio numerico a illustrare la procedura sopra esposta.

Esempio 3 (Modello alle innovazioni del primo ordine) - Si consideri il processo ARMA del prim'ordine dell'esempio 1, che ammette la seguente rappresentazione di stato sotto forma di modello alle innovazioni del primo ordine

$$\begin{cases} x(t+1) &= -ax(t) + (c-a)e(t) \\ y(t) &= x(t) + e(t) \\ e(t) &= wn(0, \sigma_e^2) \end{cases}$$

con $A = -a$, $D = c - a$, $C = 1$ scalari. Posto $\Sigma_X = \sigma_X^2$, l'equazione di Lyapunov (1.127) per il calcolo della covarianza dello stato a regime si riduce a

$$\sigma_X^2 = a^2 \sigma_X^2 + (c-a)^2 \sigma_e^2$$

da cui si ricava l'unica soluzione

$$\sigma_X^2 = \frac{(c-a)^2}{1-a^2} \sigma_e^2. \quad (1.129)$$

Si noti che la soluzione in (1.129) soddisfa $\sigma_X^2 > 0$ in quanto $a^2 < 1$. Sostituendo (1.129) in (1.128) si ottiene la funzione di auto-covarianza del processo ARMA $y(t)$:

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= \sigma_X^2 + \sigma_e^2 = \left[\frac{(c-a)^2}{1-a^2} + 1 \right] \sigma_e^2 = \frac{1+c^2-2ac}{1-a^2} \sigma_e^2 \\ R_Y(k) &= (-a)^{k-1} [-a\sigma_X^2 + (c-a)\sigma_e^2] \\ &= (-a)^{k-1} \left[-a \frac{(c-a)^2}{1-a^2} \sigma_e^2 + (c-a)\sigma_e^2 \right] \\ &= (-a)^{k-1} \underbrace{\frac{(1-ac)(c-a)}{1-a^2} \sigma_e^2}_{R_Y(1)} = (-a)^{k-1} R_Y(1), \quad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

che coincide con il risultato già trovato nell'esempio 1 facendo uso del metodo di Yule-Walker. \square

Fattorizzazione spettrale di un processo di Markov - Si consideri un processo stocastico scalare $y(t)$ descritto dal modello di stato (*modello di Markov*)

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t+1) = Ax(t) + Dw(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \\ w(t) = \text{swn}(0, \sigma_w^2) \\ v(t) = \text{swn}(0, \sigma_v^2) \\ w(t) \perp v(s) \quad \forall t, s \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, w(t) \in \mathbb{R}, v(t) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (1.130)$$

con matrice A strettamente Schur, i.e. $sp(A) \subset \mathbb{C}_s \triangleq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. In virtù della stabilità asintotica del sistema, l'uscita $y(\cdot)$ del sistema risulta, a regime, stazionaria in senso lato. Si può, dunque, procedere alla determinazione di un modello ARMA equivalente a (1.130) calcolando lo spettro $\Phi_Y(z)$ ed effettuandone una fattorizzazione spettrale $\Phi_Y(z) = H(z)H(z^{-1})\sigma_e^2$. A tale proposito, si osserva che (1.130) ammette la seguente rappresentazione ingresso-uscita (ingressi $w, v \rightarrow$ uscita y):

$$\begin{aligned} y(t) &= G(z)w(t) + v(t) \\ G(z) &= C(zI - A)^{-1}D = \frac{B(z)}{A(z)} \end{aligned} \quad (1.131)$$

da cui, sfruttando l'incorrelazione degli ingressi $w(\cdot)$ e $v(\cdot)$ ed applicando il teorema di analisi, si ottiene lo spettro desiderato

$$\begin{aligned} \Phi_Y(z) &= G(z)G(z^{-1})\sigma_w^2 + \sigma_v^2 \\ &= \frac{B(z)B(z^{-1})\sigma_w^2 + A(z)A(z^{-1})\sigma_v^2}{A(z)A(z^{-1})} \\ &= \underbrace{\frac{C(z)}{A(z)}}_{H(z)} \underbrace{\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}}_{H(z^{-1})} \sigma_e^2 \end{aligned} \quad (1.132)$$

dove la coppia formata dal polinomio $C(z)$, con radici in $|z| \leq 1$, e da $\sigma_e^2 > 0$ costituisce il fattore spettrale canonico di $p(z) \triangleq B(z)B(z^{-1})\sigma_w^2 + A(z)A(z^{-1})\sigma_v^2$. In questo modo si è ottenuto il modello ARMA equivalente di (1.130), i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} A(z)y(t) = C(z)e(t) \\ e(t) = \text{swn}(0, \sigma_e^2) \end{array} \right.$$

con $A(z) \triangleq \det(zI - A)$ polinomio caratteristico della matrice di stato A e $(C(z), \sigma_e^2)$ ottenuti come soluzione del problema di fattorizzazione spettrale:

$$B(z)B(z^{-1})\sigma_w^2 + A(z)A(z^{-1})\sigma_v^2 = C(z)C(z^{-1})\sigma_e^2$$

dove $B(z) \triangleq C \operatorname{adj}(zI - A) D$. □

Sistema a tempo-continuo

In questo paragrafo, si vuole affrontare il problema del calcolo dell'evoluzione temporale dei momenti del primo e second'ordine relativamente ad un sistema lineare a tempo-continuo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) + D(t)w(t) \quad (1.133)$$

dove lo stato iniziale $x(0)$ e l'ingresso stocastico $w(\cdot)$ soddisfano le ipotesi (1.103)-(1.105). La soluzione dell'equazione differenziale (1.133) è data da

$$x(t) = \Phi(t, 0)x(0) + \int_0^t \Phi(t, s)b(s)ds + \int_0^t \Phi(t, s)D(s)w(s)ds \quad (1.134)$$

dove la matrice di transizione dello stato $\Phi(t, s)$ (matrice fondamentale dell'equazione differenziale lineare $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$) soddisfa la relazione

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, s) = A(t)\Phi(t, s). \quad (1.135)$$

Applicando l'operatore di media $E[\dots]$ a (1.134), si ottiene l'evoluzione temporale della media dello stato:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) \triangleq E[x(t)] &= \Phi(t, 0)E[x(0)] + \int_0^t \Phi(t, s)E[b(s)]ds + \int_0^t \Phi(t, s)D(s)E[w(s)]ds \\ &= \Phi(t, 0)\bar{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, s)b(s)ds \end{aligned} \quad (1.136)$$

dove si è tenuto conto che: (i) l'ingresso $b(\cdot)$ è deterministico, quindi coincidente con la sua media; (ii) l'ingresso stocastico $w(\cdot)$ ha media nulla. Ricordando la formula di derivazione:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t, s)ds \right] = g(t, \beta(t))\dot{\beta}(t) - g(t, \alpha(t))\dot{\alpha}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [g(t, s)] ds \quad (1.137)$$

è immediato verificare, mediante derivazione di (1.136) rispetto a t , che:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + b(t) \quad (1.138)$$

ovvero la media dello stato $\bar{x}(t)$ deve soddisfare l'equazione differenziale deterministica (1.138) con assegnata condizione iniziale $\bar{x}(0)$. Definendo $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \bar{x}(t)$ e sottraendo (1.138) da (1.133), si ottiene l'equazione differenziale stocastica

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + D(t)w(t) \quad (1.139)$$

la cui soluzione è data da

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, 0)\tilde{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, s)D(s)w(s)ds. \quad (1.140)$$

Quindi, la risultante matrice di covarianza dello stato è

$$\begin{aligned} \Sigma_X(t) &\triangleq E [\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)] \\ &= E \left\{ \left[\Phi(t, 0)\tilde{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, s)D(s)w(s)ds \right] \left[\Phi(t, 0)\tilde{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, r)D(r)w(r)dr \right]^T \right\} \\ &= \Phi(t, 0)E [\tilde{x}(0)\tilde{x}^T(0)] \Phi^T(t, 0) + \int_0^t \int_0^t \Phi(t, s)D(s)E [w(s)w^T(r)] D^T(r)\Phi^T(t, r)ds dr \\ &= \Phi(t, 0)\Sigma_X(0)\Phi^T(t, 0) + \int_0^t \Phi(t, s)D(s)Q(s)D^T(s)\Phi^T(t, s)ds \end{aligned} \quad (1.141)$$

Mediante derivazione di (1.141) rispetto a t , si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_X(t) &\triangleq \frac{d}{dt} \left[\Phi(t, 0)\Sigma_X(0)\Phi^T(t, 0) + \int_0^t \Phi(t, s)D(s)Q(s)D^T(s)\Phi^T(t, s)ds \right] \\ &= A(t)\Phi(t, 0)\Sigma_X(0)\Phi^T(t, 0) + \Phi(t, 0)\Sigma_X(0)\Phi^T(t, 0)A^T(t) + \\ &\quad + A(t) \left[\int_0^t \Phi(t, s)D(s)Q(s)D^T(s)\Phi^T(t, s)ds \right] + \\ &\quad + \left[\int_0^t \Phi(t, s)D(s)Q(s)D^T(s)\Phi^T(t, s)ds \right] A^T(t) + \\ &\quad + D(t)Q(t)D^T(t) \\ &= A(t)\Sigma_X(t) + \Sigma_X(t)A^T(t) + D(t)Q(t)D^T(t) \end{aligned} \quad (1.142)$$

dove sono state sfruttate le relazioni (1.135) e (1.137).

Riassumendo, media $\bar{x}(t)$ e covarianza $\Sigma_X(t)$ dello stato $x(t)$ del sistema (1.133) evolvono nel tempo, a partire da condizioni iniziali $\bar{x}(0)$ e $\Sigma_X(0)$, in accordo alle equazioni differenziali

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + b(t) \quad (1.143)$$

$$\dot{\Sigma}_X(t) = A(t)\Sigma_X(t) + \Sigma_X(t)A^T(t) + D(t)Q(t)D^T(t) \quad (1.144)$$

per ogni $t \geq 0$. Le equazioni differenziali (1.143)-(1.144) non sono altro che le analoghe a tempo-continuo delle equazioni alla differenze (1.109)-(1.110) ottenute nel caso a tempo-discreto.

Per determinare la funzione di auto-covarianza dello stato $R_X(t, s) \triangleq E [\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(s)]$, si osserva che

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, s)\tilde{x}(s) + \int_s^t \Phi(t, \sigma)D(\sigma)w(\sigma)d\sigma \quad t > s$$

per cui, data l'incorrelazione di $\tilde{x}(s)$ con $w(\sigma)$ per ogni $\sigma \geq s$, si ottiene

$$R_X(t, s) = \begin{cases} \Phi(t, s)\Sigma_X(s), & t > s \\ \Sigma_X(t), & t = s \\ \Sigma_X(t)\Phi^T(s, t), & t < s. \end{cases}$$

Inoltre, considerando l'uscita

$$\begin{aligned} y(t) &= C(t)x(t) + v(t) \\ v(t) &= wn(0, R(t)) \\ v(t) &\perp w(s) \perp x(0) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= C(t)\bar{x}(t) \\ \tilde{y}(t) &= C(t)\tilde{x}(t) + v(t) \\ R_Y(t, s) &= C(t)R_X(t, s)C^T(s) + R(t)\delta(t - s) \\ R_{YX}(t, s) &= C(t)R_X(t, s) \end{aligned}$$

Nel caso particolare di sistema tempo-invariante (con matrici $A(t) \equiv A, C(t) \equiv C, D(t) \equiv D$ costanti) e di ingressi, sia $w(\cdot)$ che $v(\cdot)$, stazionari in senso lato (con matrici di covarianza $Q(t) \equiv Q, R(t) \equiv R$ costanti), la matrice di transizione dello stato è $\Phi(t, s) = e^{A(t-s)}$ e, di conseguenza, l'evoluzione dei momenti precedentemente determinata si riduce a

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + b(t) \quad (1.145)$$

$$\dot{\Sigma}_X(t) = A\Sigma_X(t) + \Sigma_X(t)A^T + DQD^T \quad (1.146)$$

$$R_X(t, s) = \begin{cases} e^{A(t-s)}\Sigma_X(s), & t > s \\ \Sigma_X(t), & t = s \\ \Sigma_X(t)e^{A^T(s-t)}, & t < s \end{cases} \quad (1.147)$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \quad (1.148)$$

$$R_Y(t, s) = CR_X(t, s)C^T + R\delta(t - s) \quad (1.149)$$

$$R_{YX}(t, s) = CR_X(t, s). \quad (1.150)$$

Anche nel caso TC, è interessante esaminare l'esistenza di un regime stazionario asintotico che sarà ovviamente legato alla convergenza, per $t \rightarrow \infty$, della soluzione $\Sigma_X(t)$ dell'equazione differenziale di Lyapunov (1.146) e, di conseguenza, alla soluzione dell'equazione algebrica di Lyapunov a tempo-continuo

$$A\Sigma_X + \Sigma_X A^T + DQD^T = 0. \quad (1.151)$$

A tale proposito vale il seguente risultato.

Teorema dell'equazione di Lyapunov a tempo-continuo - Se la matrice A ha tutti gli autovalori con $Re(s) < 0$, allora:

(i) L'equazione algebrica di Lyapunov (1.151) ammette una unica soluzione simmetrica semi-definita positiva $\Sigma_X = \Sigma_X^T \geq 0$.

(i) Qualunque sia la condizione iniziale, la soluzione dell'equazione differenziale di Lyapunov (1.146) converge alla matrice Σ_X di cui al punto (i), i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma_X(t) = \Sigma_X, \quad \forall \Sigma_X(0) = \Sigma_X^T(0) \geq 0.$$

(iii) Definita una matrice B tale che $DQD^T = BB^T$, la matrice Σ_X di cui al punto (i) è definita positiva, i.e. $\Sigma_X > 0$, se e solo se la coppia (A, B) è raggiungibile.

Dimostrazione

Parte (i) - Si consideri

$$\Sigma_X = \int_0^\infty e^{At} DQD^T e^{A^T t} dt. \quad (1.152)$$

Per l'ipotesi fatta sugli autovalori della matrice A , e^{At} tende a zero esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$ e, quindi, l'integrale improprio a secondo membro di (1.122) converge ad una matrice costante Σ_X che, per costruzione, risulta simmetrica e semi-definita positiva. È facile verificare che la matrice Σ_X definita in (1.122) soddisfa l'equazione algebrica di Lyapunov (1.121). Infatti,

$$\begin{aligned} A\Sigma_X + \Sigma_X A^T &= A \int_0^\infty e^{At} DQD^T e^{A^T t} dt + \int_0^\infty e^{At} DQD^T e^{A^T t} dt A^T \\ &= \int_0^\infty \left[A e^{At} DQD^T e^{A^T t} + e^{At} DQD^T e^{A^T t} A^T \right] dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[e^{At} DQD^T e^{A^T t} \right] dt \\ &= e^{At} DQD^T e^{A^T t} \Big|_0^\infty \\ &= -DQD^T \end{aligned}$$

poiché $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$. Per dimostrare l'unicità della soluzione si assuma, per contraddizione, l'esistenza di due soluzioni distinte $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ di (1.151). Deve, pertanto, risultare

$$\begin{aligned} A\Sigma_1 + \Sigma_1 A^T &= -DQD^T \\ A\Sigma_2 + \Sigma_2 A^T &= -DQD^T \end{aligned}$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene

$$A(\Sigma_1 - \Sigma_2) + (\Sigma_1 - \Sigma_2)A^T = 0.$$

Pre-moltiplicando per e^{At} e post-moltiplicando per $e^{A^T t}$, per qualunque $t \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= e^{At} A (\Sigma_1 - \Sigma_2) e^{A^T t} + e^{At} (\Sigma_1 - \Sigma_2) A^T e^{A^T t} \\ &= A e^{At} (\Sigma_1 - \Sigma_2) e^{A^T t} + e^{At} (\Sigma_1 - \Sigma_2) e^{A^T t} A^T \\ &= \frac{d}{dt} \left[e^{At} (\Sigma_1 - \Sigma_2) e^{A^T t} \right] \end{aligned}$$

da cui si evince che la matrice $e^{At} (\Sigma_1 - \Sigma_2) e^{A^T t}$ è costante (indipendente da t). Quindi,

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = \left[e^{At} (\Sigma_1 - \Sigma_2) e^{A^T t} \right]_{t=0} = \left[e^{At} (\Sigma_1 - \Sigma_2) e^{A^T t} \right]_{t \rightarrow \infty} = 0$$

contraddice l'esistenza di due soluzioni distinte Σ_1 e Σ_2 di (1.151) dimostrando così l'unicità di tale soluzione.

Parte (ii) - È immediato verificare, per derivazione, che la soluzione dell'equazione differenziale di Lyapunov (1.146) è data da

$$\begin{aligned} \Sigma_X(t) &= e^{At} \Sigma_X(0) e^{A^T t} + \int_0^t e^{A(t-s)} DQD^T e^{A^T(t-s)} ds \\ &= e^{At} \Sigma_X(0) e^{A^T t} + \int_0^t e^{Ar} DQD^T e^{A^T r} dr \end{aligned} \tag{1.153}$$

per cui, in virtù dell'ipotesi sugli autovalori di A e di (1.152),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma_X(t) = \int_0^\infty e^{Ar} DQD^T e^{A^T r} dr = \Sigma_X, \quad \forall \Sigma_X(0) = \Sigma_X^T(0) \geq 0$$

come volevasi dimostrare.

Parte (iii) - Si noti da (1.152) che, posto $DQD^T = BB^T$, la matrice di covarianza asintotica può essere espressa nel seguente modo

$$\Sigma_X = \int_0^\infty (e^{At} B) (e^{At} B)^T dt$$

che non è altro che il *Gramiano di raggiungibilità* a tempo-continuo della coppia (A, B) . È ben noto dalla teoria dei sistemi lineari che tale Gramiano di raggiungibilità risulta definito positivo, i.e. $\Sigma_X > 0$, se e solo se la coppia (A, B) è raggiungibile, i.e. la matrice di raggiungibilità $R \triangleq [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ ha rango n pari alla dimensione di x . \square

Esempio - Processo esponenzialmente correlato a tempo-continuo - Si consideri un segnale a tempo-continuo $y(t)$ descritto dalla seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned}\tau \dot{y}(t) + y(t) &= G_{dc} u(t) \\ u(t) &= \text{swn}(0, \sigma_U^2)\end{aligned}$$

con $\tau > 0$ e $G_{dc} \in \mathbb{R}$. Tale segnale ammette ovviamente la seguente rappresentazione di stato del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{-\frac{1}{\tau}}_A x(t) + \underbrace{\frac{G_{dc}}{\tau}}_D u(t) \\ y(t) = x(t). \end{cases}$$

Si può dunque calcolare la varianza a regime $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2$ di $y = x$ mediante l'equazione algebrica di Lyapunov (1.151) che, nel caso specifico, risulta

$$-\frac{1}{\tau}\sigma_X^2 - \frac{1}{\tau}\sigma_X^2 + \frac{G_{dc}^2}{\tau^2}\sigma_U^2 = 0 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \sigma_X^2 = \frac{G_{dc}^2\sigma_U^2}{2\tau}.$$

Per determinare la funzione di auto-covarianza $R_Y(t) \triangleq E[y(t_0+t)y(t_0)] = E[x(t_0+t)x(t_0)]$ del processo $y(\cdot)$ si osserva che

$$y(t_0+t) = x(t_0+t) = e^{-t/\tau}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+t} e^{-(t_0+t-s)/\tau} \frac{G_{dc}}{\tau} u(s) ds$$

da cui, in virtù dell'incorrelazione fra $x(t_0)$ e gli ingressi $u(s)$ per ogni $s \in [t_0, t_0+t]$, si ha

$$R_Y(t) \triangleq E[x(t_0+t)x(t_0)] = e^{-t/\tau} \sigma_Y^2 = e^{-t/\tau} \frac{G_{dc}^2\sigma_U^2}{2\tau}$$

che risulta in accordo con quanto trovato precedentemente in (1.27). \square

Campionamento di un sistema dinamico stocastico

Si consideri il sistema dinamico stocastico a tempo-continuo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)w(t) \quad (1.154)$$

con ingresso deterministico $u(\cdot)$ ed ingresso stocastico $w(t) = wn(0, Q(t))$. Campionando il sistema nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, si ha

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) B(s) u(s) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, r) D(r) w(r) dr$$

da cui si ottiene il sistema a tempo-discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k \\ w_k = wn(0, Q_k) \end{cases} \quad (1.155)$$

dove: si è ipotizzato un mantenimento di ordine zero dell'ingresso deterministico $u(\cdot)$, i.e.,

$$u(t) = u_k, \forall t \in [t_k, t_{k+1}];$$

si è posto $x_k \triangleq x(t_k)$ e $x_{k+1} \triangleq x(t_{k+1})$; le matrici A_k, B_k, Q_k sono date da

$$\begin{aligned} A_k &= \Phi(t_{k+1}, t_k) \\ B_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t, s) B(s) ds \\ Q_k &= E \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, r) D(r) w(r) w^T(s) D^T(s) \Phi^T(t_{k+1}, s) dr ds \right] \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, r) D(r) E[w(r) w^T(s)] D^T(s) \Phi^T(t_{k+1}, s) dr ds \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, r) D(r) Q(s) \delta(r-s) D^T(s) \Phi^T(t_{k+1}, s) dr ds \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) D(s) Q(s) D^T(s) \Phi^T(t_{k+1}, s) ds. \end{aligned} \quad (1.156)$$

Nel caso particolare di sistema tempo-invariante (matrici $A(t) \equiv A, B(t) \equiv B, D(t) \equiv D$ costanti) ed ingresso stocastico $w(\cdot)$ stazionario in senso lato (matrice $Q(t) \equiv Q$ costante), le matrici A_k, B_k, Q_k in (1.156) del sistema a dati campionati (1.155) si riducono a

$$\begin{aligned} A_k &= e^{AT_k} \\ B_k &= \int_0^{T_k} e^{As} ds B \\ Q_k &= \int_0^{T_k} e^{As} D Q D^T e^{A^T s} ds \end{aligned} \quad (1.157)$$

dove $T_k \triangleq t_{k+1} - t_k$ è l'intervallo di campionamento.

Si vuole di seguito mostrare come A_k, B_k, Q_k in (1.157) possano essere determinate mediante esponenziali di opportune matrici. A tale proposito, si premette il seguente risultato.

Teorema (Calcolo di integrali di esponenziali di matrici) - Data la matrice quadrata

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_{12} \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

risulta

$$e^{Mt} = \begin{bmatrix} E_1(t) & E_{12}(t) \\ 0 & E_2(t) \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{cases} E_1(t) = e^{M_1 t} \\ E_2(t) = e^{M_2 t} \\ E_{12}(t) = e^{M_1 t} \int_0^t e^{-M_1 s} M_{12} e^{M_2 s} ds. \end{cases}$$

Dimostrazione - $E(t) \triangleq e^{Mt}$ deve soddisfare l'equazione differenziale matriciale

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) \triangleq \frac{d}{dt} E(t) &= \frac{d}{dt} [e^{Mt}] = M e^{Mt} = M E(t) = \begin{bmatrix} M_1 & M_{12} \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(t) & E_{12}(t) \\ 0 & E_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_1 E_1(t) & M_1 E_{12}(t) + M_{12} E_2(t) \\ 0 & M_2 E_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1(t) & \dot{E}_{12}(t) \\ 0 & \dot{E}_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con condizione iniziale

$$E(0) = \begin{bmatrix} E_1(0) & E_{12}(0) \\ 0 & E_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \dot{E}_1(t) &= M_1 E_1(t) \\ E_1(0) &= I \end{aligned} \right\} \implies E_1(t) = e^{M_1 t} \\ \left. \begin{aligned} \dot{E}_2(t) &= M_2 E_2(t) \\ E_2(0) &= I \end{aligned} \right\} \implies E_2(t) = e^{M_2 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \dot{E}_{12}(t) &= M_{12} E_2(t) + M_1 E_{12}(t) \\ E_{12}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} E_{12}(t) &= e^{M_1 t} E_{12}(0) + \int_0^t e^{M_1(t-s)} M_{12} e^{M_2 s} ds \\ &= e^{M_1 t} \int_0^t e^{-M_1 s} M_{12} e^{M_2 s} ds \end{aligned} \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Per il calcolo di A_k e Q_k in (1.157) si procede nel seguente modo.

1. Si pone

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_{12} \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & DQD^T \\ 0 & A^T \end{bmatrix}$$

2. Si calcola

$$E(T_k) = e^{MT_k} = \begin{bmatrix} E_1(T_k) & E_{12}(T_k) \\ 0 & E_2(T_k) \end{bmatrix}$$

che, in virtù del precedente teorema, coincide con

$$\begin{bmatrix} E_1(T_k) & E_{12}(T_k) \\ 0 & E_2(T_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-AT_k} & e^{-AT_k} \int_0^{T_k} e^{As} DQD^T e^{A^T s} ds \\ 0 & e^{A^T T_k} \end{bmatrix}.$$

3. Si determinano:

$$\begin{aligned} A_k &= E_2^T(T_k) \\ Q_k &= E_1^{-1}(T_k) E_{12}(T_k). \end{aligned}$$

Viceversa, per il calcolo di B_k in (1.157) si procede come segue.

1. Si pone

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_{12} \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Si calcola

$$E(T_k) = e^{MT_k} = \begin{bmatrix} E_1(T_k) & E_{12}(T_k) \\ 0 & E_2(T_k) \end{bmatrix}$$

che, in virtù del precedente teorema, coincide con

$$\begin{bmatrix} E_1(T_k) & E_{12}(T_k) \\ 0 & E_2(T_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-AT_k} & e^{-AT_k} \int_0^{T_k} e^{As} B ds \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

3. Si determina:

$$B_k = E_1^{-1}(T_k) E_{12}(T_k)$$