Capitolo 7
Stima dello stato di un sistema dinamico

per gli studenti del corso di
Stima e identificazione

Luigi Chisci, 23 Maggio 2019

Come detto in precedenza, la *stima* ha a che fare con l'inferenza di informazione su una certa quantità di interesse mediante elaborazione di misure rumorose, eventualmente indirette, di tale quantità. A scopi illustrativi, un tipico problema di stima è il cosiddetto *tracciamento* (*tracking*) il cui obiettivo è quello di stimare lo stato cinematico (i.e., posizione, velocità, etc.) ignoto di un oggetto in movimento (veicolo, natante o velivolo) da misure di distanza e/o di direzione angolare di tale oggetto fornite da uno o più sensori remoti (e.g., radar, sonar, telecamera, etc.). Il tracciamento è un problema di stima *dinamico* nel senso che il vettore di stato cinematico da stimare cambia nel tempo. Il prossimo paragrafo è dedicato alla formulazione matematica di un *problema dinamico di stima* molto generale che, nel seguito di questo corso, scopriremo essere in grado di risolvere efficacemente una grande varietà di problemi di stima (di parametri, segnali, dello stato) di interesse pratico.

7.1 Formulazione del problema

Si consideri un generico sistema dinamico a tempo-discreto

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k) \tag{7.1.1}$$
$$y_k = h_k(x_k, v_k) \tag{7.1.2}$$

dove:

- $k = 0, 1, 2, \ldots$ è l'indice temporale;
- $x_k \in \mathbb{R}^n$ è il vettore di *stato* incognito da stimare;
- $y_k \in \mathbb{R}^p$ è il vettore di *uscita osservato (misura)*, le cui componenti rappresentano misure rumorose (in generale indirette) dello stato del sistema fornite da opportuni sensori;

- w_k è il *disturbo di processo* incognito che tipicamente modella agenti ambientali che influenzano il sistema, e/o tiene conto di incertezze del modello;

- v_k è il *rumore di misura* che tiene conto delle imprecisioni dei sensori;

- $f_k(\cdot, \cdot)$ è la *funzione di transizione dello stato* che modella l'evoluzione dello stato dal tempo k a $k+1$;

- $h_k(\cdot, \cdot)$ è la *funzione di misura* che modella il funzionamento dei sensori all'istante k.

Dato un generico segnale a tempo-discreto z, z_k indica il suo valore all'istante di tempo k e $z^k = \{z_k, z_{k-1}, \dots\}$ la successione di tutti i valori fino all'istante k. Lo scopo della *stima dello stato* è, in termini generali, quello di inferire, a istanti di tempo discreti k, informazione sullo stato del sistema x_t date osservazioni (misure) y^k. A seconda dell'ordine cronologico degli istanti temporali t e k, il problema di stima viene più specificamente indicato con il termine di

- *predizione* se $t > k$;

- *filtraggio* se $t = k$;

- *regolarizzazione (smoothing)* se $t < k$.

È doveroso puntualizzare che la determinazione esatta di x_k in (7.1.1) sarebbe banale se non fosse per l'incertezza sullo stato iniziale x_0 nonché per la presenza del disturbo di processo incognito w_k. Per far fronte a queste incertezze, la stima dello stato sfrutta le misure rumorose y_k fornite attraverso l'*equazione di misura* (7.1.2) in aggiunta alla *equazione di stato* (7.1.1).

Nell'immediato seguito si affronterà il problema della stima dello stato in riferimento a sistemi dinamici lineari a tempo-discreto

$$x_{k+1} = A_k x_k + b_k + D_k w_k \tag{7.1.3}$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \tag{7.1.4}$$

dove b_k è un ingresso deterministico noto. Il problema verrà inizialmente formulato nel contesto della *sintesi dell'osservatore dello stato*, argomento classicamente trattato nei corsi sui *Sistemi di Controllo*.

7.2 Osservabilità e osservatori dello stato

In questo paragrafo, si vogliono introdurre brevemente alcune nozioni di base sull'osservabilità e sugli osservatori di sistemi dinamici. Per *osservabilità* si intende la possibilità di determinare esattamente ed univocamente, in condizioni ideali (cioè in assenza di disturbo di processo e rumore di misura), lo stato iniziale di un sistema dinamico da osservazioni dell'uscita. Più precisamente, in riferimento ad un generico sistema dinamico (7.1.1)-(7.1.2), si introduce la seguente definizione.

Definizione (Osservabilità) - Il sistema dinamico (7.1.1)-(7.1.2) dicesi *osservabile* se in assenza di disturbi, i.e. quando $w_k \equiv 0$ e $v_k \equiv 0$, è possibile determinare univocamente lo stato iniziale x_0 dalle osservazioni $\{y_0, y_1, \dots\}$ su un intervallo di osservazione arbitrariamente lungo. $\square$

In altri termini, per l'osservabilità del sistema si richiede che, osservando l'uscita a partire dall'istante iniziale per tutto il tempo che occorre ed in assenza di disturbi, si possa risalire univocamente allo stato iniziale. È evidente come l'osservabilità di un sistema dinamico rappresenti una condizione *sine qua non* per poter stimare con successo lo stato del sistema dalle osservazioni disponibili. Se infatti il sistema non fosse osservabile, non risulterebbe possibile determinarne lo stato neanche in condizioni ideali (assenza di disturbi) ed osservando l'uscita su un intervallo di durata infinita, figuriamoci in presenza di disturbi e con una osservazione di durata finita !

Si intuisce che l'osservabilità di un sistema dipende dalla struttura del legame dinamico fra lo stato ed il segnale di uscita osservato, e che la mancanza di osservabilità è dovuta al fatto che i sensori a disposizione non sono in grado di fornire informazione sufficiente alla determinazione dello stato. È dunque fondamentale, per ogni problema di stima, effettuare un'analisi di osservabilità preliminare per comprendere se i sensori a disposizione consentono di stimare la variabile di interesse oppure se è necessario introdurre nuovi sensori, che misurano altre grandezze di uscita, in modo da garantire l'osservabilità.

L'analisi di osservabilità risulta particolarmente semplice per sistemi *lineari tempo-invarianti (LTI)*

$$x_{k+1} = Ax_k + b_k + Dw_k \tag{7.2.1}$$
$$y_k = Cx_k + v_k \tag{7.2.2}$$

Infatti, posto $w_k \equiv 0$ e $v_k \equiv 0$ e considerando un intervallo di osservazione di lunghezza ℓ a partire dall'istante $k = 0$ fino a $k = \ell - 1$, si ha

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{\ell-1} \end{bmatrix}}_{y_{0:\ell-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\ell-1} \end{bmatrix}}_{\Theta_\ell} x_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ CA & C & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ CA^{\ell-2} & \cdots & \cdots & CA & C \end{bmatrix}}_{W_\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\ell-2} \end{bmatrix}}_{b_{0:\ell-2}} \tag{7.2.3}$$

da cui

$$\Theta_\ell \, x_0 \;=\; \underbrace{y_{0:\ell-1} - W_\ell \, b_{0:\ell-2}}_{\psi_\ell}. \tag{7.2.4}$$

Ipotizzando che i dati osservati, in assenza di rumore, sono compatibili con il sistema (7.2.1)-(7.2.2), cioè $\psi_\ell \stackrel{\triangle}{=} y_{0:\ell-1} - W_\ell \, b_{0:\ell-2}$ appartiene all'immagine della matrice Θ_ℓ, il sistema di equazioni lineari (7.2.4) ammette un'unica soluzione in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se e solo se

$$rank \; \Theta_\ell \;=\; rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\ell-1} \end{bmatrix} \;=\; n.$$

In altri termini, il sistema (7.2.1)-(7.2.2) risulta *osservabile in ℓ passi*, ovvero osservabile su un intervallo di osservazione di lunghezza ℓ, se e solo se la matrice $\Theta_\ell \stackrel{\triangle}{=} \left[C^T, A^T C^T, \ldots, (A^{\ell-1})^T C^T\right]^T \in \mathbb{R}^{\ell p \times n}$ (detta matrice di osservabilità in ℓ passi) ha rango pari alla dimensione n del vettore di stato (ordine del sistema). Poiché, per il ben noto *teorema di Cayley-Hamilton*, la matrice A^k, per ogni intero k, è esprimibile come combinazione lineare delle matrici $A^0 = I, A, \ldots, A^{n-1}$ ovvero

$$A^k \;=\; c_{0,k} I + c_{1,k} A + \cdots + c_{n-1,k} A^{n-1}$$

per opportuni coefficienti scalari $\{c_{0,k}, c_{1,k}, \ldots c_{n-1,k}\}$, risulta che

$$rank \; \Theta_\ell \;=\; rank \; \Theta_n \quad \forall \ell \geq n. \tag{7.2.5}$$

La condizione (7.2.5) asserisce che l'osservabilità del sistema (7.2.1)-(7.2.2) di ordine n è equivalente alla sua osservabilità in n passi. Pertanto, definita la matrice di osservabilità del sistema come $\Theta \stackrel{\triangle}{=} \Theta_n$, vale il seguente risultato.

Teorema (Criterio di osservabilità per un sistema LTI) - Il sistema LTI (7.2.1)-(7.2.2) di ordine n è osservabile se e solo se la sua matrice di osservabilità ha rango pieno, i.e.,

$$rank \; \Theta = rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \;=\; n. \tag{7.2.6}$$

Dall'analisi appena effettuata si evince come l'osservabilità non dipenda, oltre che dai disturbi w_k e v_k, dall'ingresso deterministico noto b_k. Pertanto, ai fini dell'analisi di osservabilità del sistema (7.2.1)-(7.2.2), ci si può in realtà limitare a considerare il sistema in evoluzione libera

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{7.2.7}$$
$$y_k = Cx_k \tag{7.2.8}$$

il che conferma come l'osservabilità di un sistema LTI dipenda unicamente dalla coppia di matrici (A, C).

Esempio (Analisi di osservabilità) - Si consideri il sistema del secondo ordine

$$x_{k+1} = Ax_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} x_k \Longrightarrow \begin{cases} x_{k+1,1} = a_{11}x_{k,1} + a_{12}x_{k,2} \\ x_{k+1,2} = a_{22}x_{k,2} \end{cases} \tag{7.2.9}$$

in cui si osserva, con opportuno sensore, l'uscita

$$y_k = [0,\ 1]x_k = x_{k,2}. \tag{7.2.10}$$

Si noti che

$$y_k = a_{22}^k \, x_{0,2} \tag{7.2.11}$$

da cui si deduce che non è possibile ottenere alcuna informazione su $x_{0,1}$ dalla sequenza di misure $y_0, y_1, \ldots$ a prescindere dal numero di passi di osservazione. A riprova dell'inosservabilità del sistema, si ha che

$$rank\ \Theta = rank \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = 1 < 2 \tag{7.2.12}$$

ovvero la matrice di osservabilità non ha rango pieno.

Se, viceversa, si osserva, con un altro sensore opportuno, l'uscita

$$y_k = [1,\ 0]x_k = x_{k,1} \tag{7.2.13}$$

si ha

$$y_k = a_{11}^k \, x_{0,1} + \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_{11}^i a_{12} a_{22}^{k-1-i} \right) x_{0,2} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = x_{0,1} \\ y_1 = a_{11}x_{0,1} + a_{12}x_{0,2} \end{cases} \tag{7.2.14}$$

per cui dalle sole misure y_0 e y_1 si possono determinare entrambe le componenti $x_{0,1}$ e $x_{0,2}$ dello stato iniziale, mediante $x_{0,1} = y_0$ e $x_{0,2} = (y_1 - a_{11}y_0)/a_{12}$ purché $a_{12} \neq 0$. In questo caso, si ha che

$$rank\ \Theta = rank \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = 2 \text{ se } a_{12} \neq 0, \tag{7.2.15}$$

cioè la matrice di osservabilità ha rango pieno (sistema osservabile) a patto che $a_{12} \neq 0$. A scopo illustrativo dei concetti sopra esposti, si consideri il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_{k+1} & = & p_k + T s_k \\ s_{k+1} & = & s_k \end{array} \right. \tag{7.2.16}$$

che descrive il *moto rettilineo uniforme* di un oggetto con posizione p_k e velocità costante s_k nell'intervallo di campionamento $[t_k, t_{k+1}]$ di ampiezza $T = t_{k+1} - t_k > 0$. Si noti che, definito il vettore di stato $x_k = [p_k, s_k]^T$, (7.2.16) è un caso particolare di (7.2.9) corrispondente a $a_{11} = a_{22} = 1$ e $a_{12} = T$. Pertanto, l'analisi di osservabilità precedentemente sviluppata per il sistema (7.2.9) implica che si possono determinare posizione e velocità iniziale dell'oggetto se si dispone di un sensore di posizione, viceversa questo non è possibile se si dispone solo di un sensore di velocità. □

In pratica, le osservazioni y_k sono affette da rumore di misura v_k e risentono anche dell'effetto del disturbo di processo w_k agente sullo stato. Pertanto, anche se il sistema è osservabile, la determinazione dello stato iniziale x_0 non può essere effettuata mediante soluzione di (7.2.4) in quanto, per l'inevitabile presenza di disturbi, $\psi_\ell \notin Im\,\Theta_\ell \triangleq \left\{ \psi \in \mathbb{R}^{p\ell} : \psi = \Theta_\ell x \text{ per qualche } x \in \mathbb{R}^n \right\}$. In questo caso, il sistema di equazioni lineari (7.2.4) non ammette nessuna soluzione x_0 in senso ordinario. Si può tuttavia determinare x_0 con il metodo dei *minimi quadrati (LS=least-squares)*, fissando un numero di passi di osservazione $\ell \geq n$ sufficientemente grande in modo che $p\ell \gg n$, mediante soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$x_0 \; = \; \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \; \| \psi_\ell - \Theta_\ell x \|^2 \tag{7.2.17}$$

che ammette soluzione esplicita

$$x_0 \; = \; \left(\Theta_\ell^T \Theta_\ell \right)^{-1} \Theta_\ell^T \psi_\ell \; = \; \left(\Theta_\ell^T \Theta_\ell \right)^{-1} \Theta_\ell^T \; \left(y_{0:\ell-1} - W_\ell \, b_{0:\ell-2} \right) \tag{7.2.18}$$

detta *stima ai minimi quadrati* dello stato iniziale. Si noti che, se il sistema è osservabile, la matrice Θ_ℓ ha rango pieno per $\ell \geq n$ da cui la matrice $\Theta_\ell^T \Theta_\ell$ in (7.2.18) risulta invertibile e, conseguentemente, la soluzione ai minimi quadrati ben definita.

Un problema di grande rilevanza pratica è quello della stima in tempo reale dello stato x_k del sistema (7.2.1)-(7.2.2) mediante un sistema dinamico LTI (filtro) che elabora in modo *causale* (non anticipativo) gli ingressi deterministici b_k e le osservazioni y_k in modo da fornire in uscita una stima $\hat{x}_k$ dello stato x_k. Un tale sistema, detto *osservatore* o talvolta anche *ricostruttore* dello stato, assume in generale la forma (rappresentazione di stato)

$$\xi_{k+1} \; = \; \mathcal{A} \xi_k + \mathcal{B} b_k + \mathcal{C} y_k \tag{7.2.19}$$

$$\hat{x}_k \; = \; \mathcal{D} \xi_k + \mathcal{E} b_k + \mathcal{F} y_k \tag{7.2.20}$$

per opportune matrici $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$. Un importante requisito che, di norma, viene richiesto all'osservatore è che esso fornisca una stima che, in assenza di disturbi, tenda asintoticamente allo stato vero del sistema a prescindere dalle condizioni iniziali, sia del sistema che dell'osservatore. A tale proposito si introduce la seguente definizione.

Definizione (Osservatore asintotico) - Il sistema dinamico (7.2.19)-(7.2.20) dicesi *osservatore asintotico* del sistema (7.2.1)-(7.2.2) se in assenza di disturbi, i.e. per $w_k \equiv 0$ e $v_k \equiv 0$, vale quanto segue:

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{x}_k = 0, \qquad \forall x_0, \forall \xi_o \tag{7.2.21}$$

dove $\tilde{x}_k \stackrel{\triangle}{=} x_k - \hat{x}_k$ è l'errore di stima dello stato. $\square$

Una particolare struttura comunemente impiegata per l'osservatore è quella del cosiddetto *osservatore alla Luenberger*

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + b_k + K\left(y_k - C\hat{x}_k\right) = \left(A - KC\right)\hat{x}_k + b_k + Ky_k \tag{7.2.22}$$

che rappresenta un caso particolare di (7.2.19)-(7.2.20) corrispondente alla scelta delle matrici

$$\mathcal{A} = A - KC, \ \mathcal{B} = I, \ \mathcal{C} = K, \ \mathcal{D} = I, \ \mathcal{E} = 0, \ \mathcal{F} = 0.$$

Si noti, dal confronto di (7.2.1)-(7.2.2) con (7.2.22), che l'osservatore alla Luenberger non è altro che una copia di (7.2.1) con stato $\hat{x}_k$ anziché x_k, priva del disturbo di processo w_k e con termine correttivo $K\left(y_k - C\hat{x}_k\right)$ proporzionale secondo la matrice $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$, detta *guadagno dell'osservatore*, all'errore $\tilde{y}_k \stackrel{\triangle}{=} y_k - \hat{y}_k \stackrel{\triangle}{=} y_k - C\hat{x}_k$ di stima dell'uscita y_k. È immediato constatare che, per l'osservatore alla Luenberger, l'errore di stima dello stato soddisfa la seguente equazione

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} \\ &= \left[Ax_k + b_k + Dw_k\right] - \left[A\hat{x}_k + b_k + K\left(y_k - C\hat{x}_k\right)\right] \\ &= A\tilde{x}_k + Dw_k - K\left(Cx_k + v_k - \hat{x}_k\right) \\ &= (A - KC)\tilde{x}_k + Dw_k - Kv_k \end{aligned} \tag{7.2.23}$$

Posto $w_k \equiv 0$ e $v_k \equiv 0$, si ha dunque

$$\tilde{x}_{k+1} = \left(A - KC\right)\tilde{x}_k \implies \tilde{x}_k = \left(A - KC\right)^k \tilde{x}_0 \tag{7.2.24}$$

Pertanto vale il seguente risultato.

Teorema (Osservatore alla Luenberger asintotico) - L'osservatore alla Luenberger (7.2.22) è asintotico se e solo se il suo guadagno K è scelto in modo tale che la matrice

$A - KC$ ha tutti gli autovalori all'interno del cerchio unitario, i.e. $det\,(zI - A + KC) = 0 \Rightarrow |z| < 1$. □

Alla luce di questo risultato, due problemi fondamentali della *teoria dei sistemi* riguardano:

- la possibilità di assegnare arbitrariamente, mediante scelta del guadagno K, gli autovalori della matrice $A - KC$;
- la possibilità di progettare un osservatore asintotico per un sistema LTI con matrice di transizione dello stato A e matrice di uscita C.

Nel seguito si riportano, senza dimostrazione, condizioni necessarie e sufficienti in entrambi i casi, cioè per l'assegnabilità arbitraria di tutti gli autovalori di $A - KC$ nonché per l'esistenza di osservatori asintotici.

Teorema (Assegnabilità arbitraria degli autovalori di $A-KC$ mediante K) - Date le matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, è possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori di $A - KC$, mediante opportuna scelta della matrice $K \in \mathbb{R}^{n\times p}$, se e solo se la coppia (A, C) è osservabile, cioè se e solo se

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

Per la precisione, poiché tutte le matrici sono a coefficienti reali e quindi il polinomio caratteristico di $A - KC$ deve avere coefficienti reali, gli autovalori assegnati devono essere a simmetria reale ovvero ad ogni autovalore assegnato non reale λ di molteplicità μ deve corrispondere il suo complesso coniugato $\overline{\lambda}$ con la stessa molteplicità.

Si osservi che, anche se non tutti gli autovalori di A sono modificabili mediante la scelta di K, per l'esistenza di un osservatore asintotico è necessario e sufficiente che gli eventuali autovalori non modificabili siano già all'interno della regione di stabilità (cerchio unitario nel caso tempo-discreto).

Esempio (Sintesi dell'osservatore mediante assegnazione degli autovalori) - Si consideri il sistema osservabile (7.2.16) con stato $x_k = [p_k, s_k]^T$ e matrici di stato

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = [1,\ 0].$$

Posto $K = [K_1, K_2]^T$, si ha

$$A - KC = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} [1,\ 0] = \begin{bmatrix} 1 - K_1 & T \\ -K_2 & 1 \end{bmatrix}$$

con polinomio caratteristico

$$\begin{aligned}\chi_{A-KC}(z) &\stackrel{\triangle}{=} \det(zI - A + KC)\\ &= (z + K_1 - 1)(z-1) + K_2 T = z^2 + (K_1 - 2)z + K_2 T + 1 - K_1\end{aligned} \tag{7.2.25}$$

Pertanto, fissato $\alpha(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2$ arbitrario, è possibile determinare univocamente il guadagno K di componenti

$$K_1 = \alpha_1 + 2, \quad K_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 1}{T} \tag{7.2.26}$$

in modo da avere $\chi_{A-KC}(z) = \alpha(z)$.

Se, viceversa, si osserva la velocità v_k al posto della posizione p_k, la matrice di uscita risulta $C = [0,\ 1]$ e, quindi,

$$A - KC = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} [0,\ 1] = \begin{bmatrix} 1 & T - K_1 \\ 0 & 1 - K_2 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

$$\begin{aligned}\chi_{A-KC}(z) &\stackrel{\triangle}{=} \det(zI - A + KC)\\ &= (z + K_2 - 1)(z-1)\end{aligned} \tag{7.2.27}$$

in cui uno dei due autovalori in $z = 1$ risulta modificabile ad arbitrio in $z = 1 - K_2$ mediante scelta di K_2 mentre l'altro autovalore in $z = 1$ rimane fisso qualunque sia il valore di K_1. Pertanto, poiché l'autovalore fisso di $A - KC$ si trova sul cerchio unitario, non è possibile, nel caso in cui si osservi solo la velocità, progettare un osservatore asintotico per il sistema (7.2.16) che (in assenza di disturbi) porti asintoticamente a zero l'errore di stima dello stato.

Ritornando al caso in cui si osserva la posizione p_k e si riesce quindi ad avere completa assegnabilità degli autovalori di $A - KC$, vi sono quindi infiniti modi di progettare un osservatore asintotico corrispondenti a tutte le possibili scelte di due autovalori reali o complessi coniugati di $A - KC$ all'interno del cerchio unitario. Diventa, quindi, interessante il problema di posizionare gli autovalori di $A - KC$ o, equivalentemente, scegliere il guadagno K dell'osservatore in modo da ottimizzare le prestazioni, ad esempio nel senso di rendere rapido e limitato in ampiezza il transitorio dell'errore di stima dello stato. Un possibile obiettivo focalizzato unicamente alla rapidità del transitorio è quello di portare a zero l'errore di stima dello stato in tempo finito. Poiché, in assenza di disturbi, $\tilde{x}_k = (A - KC)^k \tilde{x}_0$ tale obiettivo richiede che la matrice $A - KC$ sia *nilpotente* ovvero abbia tutti gli autovalori nulli. Infatti, per il teorema di Cayley-Hamilton, $\chi_{A-KC}(z) = det(zI - A + KC) = z^n$ implica che $(A - KC)^k = 0$ per ogni $k \geq n$. Il corrispondente *osservatore in tempo finito*, detto anche *osservatore deadbeat*, è ottenuto da (7.2.26) per $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (i.e., $\alpha(z) = z^2$) da cui $K_1 = 2$ e $K_2 = \frac{1}{T}$. Le equazioni di stato dell'osservatore deadbeat sono pertanto le seguenti:

$$\begin{cases} \hat{p}_{k+1} &= -\hat{p}_k + T\hat{s}_k + 2y_k \\ \hat{s}_{k+1} &= -\dfrac{1}{T}\hat{p}_k + \hat{s}_k \end{cases}$$

da cui, in assenza di disturbi, si ottiene la seguente dinamica degli errori di stima $\tilde{p}_k \triangleq p_k - \hat{p}_k$ sulla posizione e $\tilde{s}_k \triangleq s_k - \hat{s}_k$ sulla velocità:

$$\begin{cases} \tilde{p}_{k+1} &= -\tilde{p}_k + T\tilde{s}_k \\ \hat{s}_{k+1} &= -\dfrac{1}{T}\tilde{p}_k + \tilde{s}_k \end{cases}$$

È immediato verificare che, con questa scelta di osservatore, si ha

$$(A - KC)^2 = \begin{bmatrix} -1 & T \\ -1/T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & T \\ -1/T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - KC)^k = 0, \forall k \geq 2$$

da cui, in assenza di disturbi,

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_k \\ \tilde{s}_k \end{bmatrix} = (A - KC)^k \begin{bmatrix} \tilde{p}_0 \\ \tilde{s}_0 \end{bmatrix} = 0, \forall k \geq 2, \forall \tilde{p}_0, \forall \tilde{s}_0$$

ovvero gli errori di stima sulla posizione e sulla velocità vanno a zero dopo due passi qualunque siano gli errori iniziali. In pratica, il sistema (7.2.16) è affetto da un disturbo di processo derivante dal fatto che la velocità s_k non è costante bensì è soggetta ad un'accelerazione casuale $a_k = w_k$ per cui un modello di moto più realistico di (7.2.16) è il seguente

$$\begin{cases} p_{k+1} &= p_k + Ts_k + \frac{T^2}{2}w_k \\ s_{k+1} &= s_k + Tw_k \end{cases} \tag{7.2.28}$$

Inoltre, anche la misura di posizione è realisticamente affetta da un rumore di misura v_k, i.e.,

$$y_k = p_k + v_k \tag{7.2.29}$$

Si noti che (7.2.28)-(7.2.29) è un caso particolare del sistema dinamico stocastico LTI (7.2.1)-(7.2.2) corrispondente a

$$b_k = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}, \quad C = [1, \ 0].$$

Da (7.2.23) si deduce quindi la seguente dinamica degli errori di stima di posizione e velocità in presenza del disturbo stocastico di accelerazione w_k e del rumore di misura v_k

$$\begin{cases} \tilde{p}_{k+1} &= (1 - K_1)\tilde{p}_k + T\tilde{s}_k + \frac{T^2}{2}w_k + K_1 v_k \\ \tilde{s}_{k+1} &= -K_2\tilde{p}_k + \tilde{s}_k + Tw_k + K_2 v_k \end{cases} \tag{7.2.30}$$

Assumendo w_k e v_k processi stocastici di caratteristiche note (e.g., rumori bianchi stazionari, mutuamente incorrelati ed incorrelati con lo stato iniziale), un naturale criterio di sintesi dell'osservatore potrebbe essere quello di scegliere K_1 e K_2 in (7.2.30) in modo da minimizzare l'errore di stima su posizione e velocità in senso quadratico medio. □

Esempio (Sintesi di osservatore asintotico per sistema non osservabile) - Si consideri il sistema (7.2.9) con matrice di uscita in (7.2.10). È immediato verificare che, posto $K = [K_1, K_2]^T$,

$$A - KC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} - K_1 \\ 0 & a_{22} - K_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \chi_{A-KC}(z) = (z - a_{11})(z + K_2 - a_{22}).$$

Pertanto, il sistema non osservabile (7.2.9)-(7.2.10) ha un autovalore $z = a_{22}$ di A arbitrariamente modificabile mediante scelta di K_2 e l'altro autovalore $z = a_{11}$, viceversa, non modificabile qualunque sia la scelta di K. Se $|a_{11}| < 1$, è possibile progettare un osservatore asintotico per il sistema sebbene questo non sia osservabile. Viceversa, se $|a_{11}| \geq 1$ l'errore di stima dello stato non può essere reso nullo asintoticamente nemmeno in assenza di disturbi. □

Il precedente esempio ha evidenziato come sia possibile progettare un osservatore asintotico anche se il sistema non risulta osservabile. Viene dunque naturale chiedersi quali siano condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un osservatore asintotico. A tale proposito si introducono le seguenti definizioni.

Definizione (Autovalore inosservabile) - $\lambda \in sp(A)$ dicesi *autovalore inosservabile* del sistema (7.2.7)-(7.2.8), ovvero della coppia (A, C), se
• tale autovalore si cancella nella funzione di trasferimento $C\,(\lambda I - A)^{-1}$,
o equivalentemente se
• la matrice $\left[(\lambda I - A)^T, C^T\right]^T$ non ha rango pieno, i.e.

$$rank \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} < n.$$

Si può dimostrare che un sistema osservabile non ha autovalori inosservabili. Si può inoltre dimostrare che gli autovalori inosservabili della coppia (A, C) sono tutti e soli gli autovalori del sistema che l'osservatore non può modificare.

Definizione (Rilevabilità) - Il sistema (7.2.7)-(7.2.8), ovvero la coppia (A, C), dicesi *rilevabile* se eventuali autovalori inosservabili di tale sistema (ovvero di tale coppia) sono all'interno della regione di stabilità (cerchio unitario nel caso tempo-discreto). □

Ovviamente, un sistema osservabile, non avendo autovalori inosservabili, è a maggior ragione anche rilevabile. Il seguente risultato fornisce condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un osservatore asintotico.

Teorema (Esistenza di un osservatore asintotico) - Il sistema (7.2.7)-(7.2.8) ammette un osservatore asintotico se e solo se la coppia (A, C) è rilevabile. $\square$

Esempio (Autovalore inosservabile) - Si consideri il sistema (7.2.9)-(7.2.10). La matrice A ha due autovalori $\lambda_1 = a_{11}$ e $\lambda_2 = a_{22}$. Si noti che la funzione di trasferimento

$$\begin{aligned}
C\,(\lambda I - A)^{-1} &= [0,\ 1] \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & \lambda - a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{[0,\ 1] \begin{bmatrix} \lambda - a_{22} & a_{12} \\ 0 & \lambda - a_{11} \end{bmatrix}}{(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})} \\
&= \left[0,\ \frac{1}{\lambda - a_{22}}\right]
\end{aligned}$$

presenta una cancellazione dell'autovalore $\lambda_1 = a_{11}$ che, pertanto, risulta inosservabile. Equivalentemente si verifica che

$$\begin{bmatrix} a_{11} I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & a_{11} - a_{22} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango inferiore ad $n = 2$. Si noti che l'autovalore inosservabile $\lambda_1 = a_{11}$ coincide proprio con l'autovalore di $A - KC$ che il guadagno K dell'osservatore non riesce a modificare. Il sistema (7.2.9)-(7.2.10) è dunque rilevabile se e solo se $|a_{11}| < 1$. In tal caso, quindi, il sistema ammette l'esistenza di osservatori asintotici. $\square$

In presenza di disturbo di processo w_k e rumore di misura v_k, da (7.2.23) l'errore di stima dello stato di un osservatore alla Luenberger soddisfa

$$\tilde{x}_{k+1} = (A - KC)\tilde{x}_k + D w_k - K v_k$$

da cui si ricava la seguente evoluzione dell'errore di stima

$$\tilde{x}_k = (A - KC)^k \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (A - KC)^{k-1-i} D w_i - \sum_{j=0}^{k-1} (A - KC)^{k-1-j} K v_j .$$

Fatte le seguenti ipotesi:

(i) l'osservatore è asintotico, cioè la matrice $A - KC$ ha tutti gli autovalori in $|z| < 1$;

(ii) $\{w_k\}$ e $\{v_k\}$ sono processi stocastici stazionari (almeno in senso lato) a media nulla;

allora l'errore di stima $\tilde{x}_k$ è, a regime, un processo stocastico stazionario a media nulla. Un ragionevole criterio di progetto dell'osservatore è dunque quello di determinare il guadagno K in modo da minimizzare la varianza $E\left[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T\right]$ di tale errore. Questo problema verrà formulato e risolto nel prossimo paragrafo.

7.3 Osservatore ottimo MMSE (filtro di Kalman)

Per maggiore generalità si considerano il sistema *lineare tempo-variante*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + b_k + D_k w_k && (7.3.1) \\ y_k &= C_k x_k + v_k && (7.3.2) \end{aligned}$$

l'osservatore alla Luenberger tempo-variante

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + b_k + K_k \left(y_k - C_k \hat{x}_k\right) = \left(A_k - K_k C_k\right) \hat{x}_k + b_k + K_k y_k \qquad (7.3.3)$$

La risultante dinamica dell'errore di stima è

$$\tilde{x}_{k+1} = (A_k - K_k C_k)\tilde{x}_k + D_k w_k - K_k v_k \qquad (7.3.4)$$

Si fanno le seguenti ipotesi statistiche:

(i) il disturbo di processo w_k è un rumore bianco a media nulla di varianza $Q_k = Q_k^T > 0$, i.e. $w_k = wn(0, Q_k)$;

(ii) il rumore di misura v_k è un rumore bianco a media nulla di varianza $R_k = R_k^T > 0$, i.e. $v_k = wn(0, R_k)$;

(iii) lo stato iniziale x_0 è una variabile aleatoria di media $\hat{x}_0$ e varianza $P_0 = P_0^T > 0$, i.e. $x_0 \sim (\hat{x}_0, P_0)$;

(iv) il disturbo di processo $\{w_i\}$ ed il rumore di misura $\{v_j\}$ sono mutuamente incorrelati, i.e. $E\left[w_i v_j^T\right] = 0$ per ogni coppia di istanti i e j;

(v) sia il disturbo di processo che il rumore di misura sono incorrelati con lo stato iniziale, i.e. $E\left[w_k \tilde{x}_0^T\right] = 0$ e $E\left[v_k \tilde{x}_0^T\right] = 0$ per ogni k.

Le suddette assunzioni (i)-(v) definiscono il problema standard di stima dello stato. Ciascuna di esse, tuttavia, può essere rimossa riconducendo il problema non standard originario ad un'opportuna istanza del problema standard in cui (i)-(v) sono soddisfatte (vedi primo capitolo dell'appendice 2 sulle estensioni del filtro di Kalman).

Si pone il seguente problema di *sintesi dell'osservatore a minimo errore quadratico medio (MMSE = Minimum Mean Square Error)*: ad ogni istante $k = 0, 1, \ldots$ si vuole determinare ricorsivamente il guadagno K_k dell'osservatore (7.3.3) in modo da minimizzare l'errore quadratico medio di stima dello stato all'istante $k+1$, i.e. $P_{k+1} \stackrel{\triangle}{=} E\left[\tilde{x}_{k+1}\tilde{x}_{k+1}^T\right]$. Da (7.3.4), si ha:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E\left[\tilde{x}_{k+1}\tilde{x}_{k+1}^T\right] \\ &= E\left\{\left[(A_k - K_kC_k)\tilde{x}_k + D_kw_k - K_kv_k\right]\left[(A_k - K_kC_k)\tilde{x}_k + D_kw_k - K_kv_k\right]^T\right\}. \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

Risolvendo (7.3.4), si ha inoltre:

$$\tilde{x}_k = \Phi_{k,0}\,\tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\Phi_{k,i+1}D_iw_i - \sum_{j=0}^{k-1}\Phi_{k,j+1}K_jv_j \tag{7.3.6}$$

con

$$\Phi_{k,i} \stackrel{\triangle}{=} \left\{\begin{array}{ll} \Phi_{k-1}\cdots\Phi_i, & k > i \\ I, & k = i \end{array}\right\}, \quad \Phi_k \stackrel{\triangle}{=} A_k - K_kC_k. \tag{7.3.7}$$

Da (7.3.7), in virtù delle ipotesi (i)-(v), si evince che $\tilde{x}_k$ è incorrelato con w_k e v_k, i.e.,

$$E\left[\tilde{x}_kw_k^T\right] = 0, \qquad E\left[\tilde{x}_kv_k^T\right] = 0. \tag{7.3.8}$$

Sfruttando (7.3.8) in (7.3.5), si ottiene

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= (A_k - K_kC_k)\,E\left[\tilde{x}_k\tilde{x}_k^T\right](A_k - K_kC_k)^T + D_kE\left[w_kw_k^T\right]D_k^T + K_kE\left[v_kv_k^T\right]K_k^T \\ &= (A_k - K_kC_k)P_k(A_k - K_kC_k)^T + D_kQ_kD_k^T + K_kR_kD_k^T \end{aligned} \tag{7.3.9}$$

Il problema posto si riduce dunque alla seguente ottimizzazione quadratica:

$$\begin{aligned} K_k &= \arg\min_K \left\{\underbrace{(A_k - KC_k)P_k(A_k - KC_k)^T + D_kQ_kD_k^T + KR_kK^T}_{P_{k+1}}\right\} \\ &= \arg\min_K \left\{K\underbrace{(R_k + C_kP_kC_k^T)}_{S_k}K^T - K\underbrace{C_kP_kA_k^T}_{V_k^T} - \underbrace{A_kP_kC_k^T}_{V_k}K^T + D_kQ_kD_k^T + A_kP_kA_k^T\right\} \\ &= \arg\min_K \left\{KS_kK^T - KV_k^T - V_kK^T + A_kP_kA_k^T + D_kQ_kD_k^T\right\} \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

Poiché $S_k \stackrel{\triangle}{=} R_k + C_k P_k C_k^T > R_k > 0$ per l'invertibilità di R_k ipotizzata in (ii), completando il quadrato in (7.3.10) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
K_k &= \arg\min_K \left\{ \left(K - V_k S_k^{-1}\right) S_k \left(K - V_k S_k^{-1}\right)^T + A_k P_k A_k^T - V_k S_k^{-1} V_k^T + D_k Q_k D_k^T \right\} \\
&= V_k S_k^{-1} \\
&= A_k P_k C_k^T \left(R_k + C_k P_k C_k\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{7.3.11}
$$

La precedente formula fornisce il guadagno ottimo K_k, all'istante k, a cui corrisponde il minimo errore quadratico medio all'istante $k+1$ dato da:

$$
\begin{aligned}
P_{k+1} &= A_k P_k A_k^T - V_k S_k^{-1} V_k^T + D_k Q_k D_k^T \\
&= A_k P_k A_k^T - A_k P_k C_k^T \left(R_k + C_k P_k C_k^T\right)^{-1} C_k P_k A_k^T + D_k Q_k D_k^T
\end{aligned}
\tag{7.3.12}
$$

Riassumendo i precedenti sviluppi, si ha il seguente risultato.

Teorema (Osservatore ottimo MMSE) - Dato il sistema LTV (7.1.3)-(7.1.4) che soddisfa le ipotesi (i)-(v), l'osservatore alla Luenberger che minimizza, ad ogni istante $k \geq 0$, l'errore quadratico medio di stima dello stato $P_k \stackrel{\triangle}{=} E\left[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T\right]$ è fornito dal seguente algoritmo ricorsivo (che procede per $k = 0, 1, \ldots$):

$$K_k = A_k P_k C_k^T \left(R_k + C_k P_k C_k^T\right)^{-1} \tag{7.3.13}$$

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + b_k + K_k \left(y_k - C_k \hat{x}_k\right) \tag{7.3.14}$$

$$P_{k+1} = A_k P_k A_k^T - A_k P_k C_k^T \left(R_k + C_k P_k C_k^T\right)^{-1} C_k P_k A_k^T + D_k Q_k D_k^T \tag{7.3.15}$$

inizializzato dalla stima (media) $\hat{x}_0$ dello stato iniziale e dalla relativa covarianza $P_0 = P_0^T \geq 0$. $\square$

L'algoritmo (7.3.13)-(7.3.15), data la sua importanza storica e rilevanza applicativa in svariati settori dell'ingegneria e della scienza, merita le seguenti considerazioni.

Considerazioni

- L'algoritmo (7.3.13)-(7.3.15) è ben noto in letteratura e nella comunità scientifica internazionale come *filtro di Kalman* dal lavoro di Rudolf Emil Kálmán [1] il quale, nel 1960, derivò lo stesso algoritmo come *miglior stimatore lineare MMSE* dello stato del sistema lineare (7.1.3)-(7.1.4) senza la restrizione, considerata in questo paragrafo, che tale stimatore lineare sia della particolare forma (alla Luenberger) (7.3.3). In altri termini, il filtro di Kalman non è solo l'osservatore ottimo MMSE ma, più in generale, lo *stimatore lineare ottimo MMSE* dello stato di un sistema lineare. Più precisamente, $\hat{x}_k$ calcolato ricorsivamente mediante (7.3.13)-(7.3.15) fornisce, ad ogni stante temporale k, la miglior stima lineare MMSE dello stato attuale x_k basata sulle osservazioni precedenti $y_{0:k-1} \stackrel{\triangle}{=} \{y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}\}$. Quindi, tale stima è di fatto la *predizione ottima MMSE ad un passo* dello stato x_k. Come si vedrà in seguito, il filtro di Kalman è suscettibile di ulteriori interpretazioni come:

- stimatore MMSE (ottimo fra tutti gli stimatori sia lineari che non lineari) nel caso Gaussiano (in cui lo stato iniziale x_0 nonché il disturbo di processo w_k ed il rumore di misura v_k hanno, ad ogni istante k, distribuzione di probabilità Gaussiana);
- stimatore ai minimi quadrati che minimizza ricorsivamente il seguente costo quadratico

$$\begin{aligned} J_k(x_{0:k+1}) &= (x_0 - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k} (x_{i+1} - A_i x_i - b_i)^T \, Q_i^{-1} \, (x_{i+1} - A_i x_i - b_i) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k} (y_j - C_j x_j)^T \, R_j^{-1} \, (y_j - C_j x_j) \, , \end{aligned} \tag{7.3.16}$$

  rispetto alla sequenza di stati $x_{0:k+1} \stackrel{\triangle}{=} \{x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$, prescindendo da ogni ipotesi statistica sullo stato iniziale x_0, sul disturbo di processo $\{w_i\}$ e sul rumore di misura $\{v_j\}$.

- Il filtro di Kalman è un algoritmo ricorsivo che richiede ad ogni ciclo temporale $k = 0, 1, \ldots$:

  - calcolo del guadagno ottimo (di Kalman) K_k mediante (7.3.13);
  - aggiornamento $\hat{x}_k \to \hat{x}_{k+1}$ della stima dello stato mediante (7.3.14);
  - aggiornamento $P_k \to P_{k+1}$ della matrice di covarianza mediante (7.3.15).

  Si noti che l'aggiornamento della covarianza tramite (7.3.15), che è nota in letteratura come *equazione alle differenze di Riccati (DRE = Difference Riccati Equation)*, è necessario al calcolo del guadagno di Kalman tramite (7.3.13). La DRE (7.3.15) rappresenta il *collo di bottiglia* del filtro di Kalman con la sua complessità computazionale $O(n^3)$, cioè cubica rispetto alla dimensione n del vettore di stato da stimare, richiesta per il calcolo del termine $A_k P_k A_k^T$ e la complessità di memoria quadratica $O(n^2)$ per la memorizzazione della matrice P_k.

- È immediato constatare da (7.3.15) che l'evoluzione della matrice di covarianza P_k, e quindi del guadagno K_k in (7.3.13), non è influenzata dalle osservazioni; viceversa le stime dello stato $\hat{x}_k$ calcolate tramite (7.3.14) risultano ovviamente dipendere dalle osservazioni passate $y_{0:k-1}$. Pertanto, le matrici di covarianza ed i guadagni potrebbero essere pre-calcolati *fuori-linea*, per lo meno su un intervallo temporale di durata finita.

7.4 Ricorsione del filtro di Kalman: correzione & predizione

Come osservato nel precedente paragafo, l'algoritmo (7.3.13)-(7.3.14) propaga in realtà una stima $\hat{x}_k$, e la relativa covarianza P_k, dello stato x_k basata sulle osservazioni passate $y_{0:k-1}$, ovvero effettua la predizione ad un passo dello stato. Per questo motivo, nel seguito le quantità $\hat{x}_k$ e P_k in (7.3.13)-(7.3.15) verranno indicate in modo più appropriato come $\hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}_k$ e, rispettivamente, $P_{k|k-1} = P_k$.

In molte applicazioni pratiche, l'obiettivo è quello di ottenere, ad ogni istante k, una stima dello stato x_k, e la relativa covarianza, basata su tutte le osservazioni $y_{0:k} = y_{0:k-1} \cup \{y_k\}$, inclusa quella presente, acquisite fino all'istante k. Il problema in oggetto, noto come *filtraggio*, è finalizzato alla determinazione della cosiddetta *stima filtrata* $\hat{x}_{k|k}$ dello stato x_k basata sulle osservazioni $y_{0:k}$ e della relativa covarianza $P_{k|k} = E\left[\tilde{x}_{k|k}\,\tilde{x}_{k|k}^T\right]$, con $\tilde{x}_{k|k} \stackrel{\triangle}{=} x_k - \hat{x}_{k|k}$. A tale scopo, si possono considerare $\hat{x}_{k|k}$ e $P_{k|k}$ come stima e covarianza a-posteriori della variabile aleatoria x_k, a partire da stima e covarianza a-priori $\hat{x}_{k|k-1}$ e $P_{k|k-1}$, sulla base dell'osservazione y_k in (7.1.4), utilizzando il metodo di stima BLUE. In altri termini, date le statistiche a priori $\left(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}\right)$ e l'osservazione lineare $y_k = C_k x_k + v_k$ di x_k, si vogliono determinare le statistiche a posteriori $\left(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}\right)$ di x_k, mediante stima BLUE. Si ricorda che stima e covarianza a posteriori BLUE sono fornite da

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{E\left[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T\right] E\left[\tilde{y}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T\right]^{-1}}_{L_k} \left(y_k - \hat{y}_{k|k-1}\right) \tag{7.4.1}$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - E\left[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T\right] E\left[\tilde{y}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T\right]^{-1} E\left[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T\right]^T \tag{7.4.2}$$

dove

$$\begin{array}{llll} \hat{y}_{k|k-1} & = E\left[y_k\right] & = C_k \hat{x}_{k|k-1} \\ \tilde{y}_{k|k-1} & = y_k - \hat{y}_{k|k-1} & = C_k \tilde{x}_{k|k-1} + v_k \\ E\left[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T\right] & & = P_{k|k-1} C_k^T \\ E\left[\tilde{y}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T\right] & & = R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^T \end{array} \tag{7.4.3}$$

Sostituendo (7.4.3) in (7.4.1)-(7.4.2), si ottengono le seguenti equazioni di aggiornamento da $\left(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}\right)$ a $\left(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}\right)$:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + L_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}\right) \tag{7.4.4}$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^T\right)^{-1} C_k P_{k|k-1} \tag{7.4.5}$$

con

$$L_k = P_{k|k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^T\right)^{-1}. \tag{7.4.6}$$

Le equazioni (7.4.4)-(7.4.5) consentono di correggere la stima predittiva $\hat{x}_{k|k-1}$ e la relativa covarianza $P_{k|k-1}$ con l'ultima osservazione y_k, per ottenere la stima filtrata $\hat{x}_{k|k}$ e relativa covarianza $P_{k|k}$. Per questo motivo (7.4.4)-(7.4.5) vengono dette *equazioni di correzione* della stima e, rispettivamente, della covarianza e la matrice L_k in (7.4.6) prende il nome di *guadagno di correzione*.

Si noti che, posto $K_k = A_k L_k$, l'equazione di aggiornamento della stima (7.3.14) può essere espressa come segue

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \underbrace{\left[\hat{x}_{k|k-1} + L_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}\right)\right]}_{\hat{x}_{k|k}} + b_k. \tag{7.4.7}$$

La precedente relazione esprime la stima predittiva ad un passo $\hat{x}_{k+1|k}$ come il risultato dell'applicazione del modello di stato (7.1.3), per $w_k = 0$, alla stima filtrata $\hat{x}_{k|k}$. Analogamente, l'equazione di aggiornamento della covarianza (7.3.15) può essere riscritta come

$$P_{k+1|k} = A_k \underbrace{\left[P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^T\right)^{-1} C_k P_{k|k-1}\right]}_{P_{k|k}} A_k^T + D_k Q_k D_k^T \tag{7.4.8}$$

Pertanto, si ottengono le seguenti *equazioni di predizione* da $\left(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}\right)$ a $\left(\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}\right)$:

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k} + b_k \tag{7.4.9}$$

$$P_{k+1|k} = A_{k|k} P_{k|k} A_k^T + D_k Q_k D_k^T \tag{7.4.10}$$

Riassumendo i precedenti sviluppi, la ricorsione (7.3.14)-(7.3.15) del filtro di Kalman può essere suddivisa in due fasi diverse: la *correzione* (7.4.4)-(7.4.5) seguita dalla predizione (7.4.9)-(7.4.10). La forma *correzione-predizione* del filtro di Kalman viene di seguito riportata.

Filtro di Kalman nella forma correzione-predizione

Dati: matrici A_k, C_k, D_k, Q_k, R_k; stima iniziale $\hat{x}_{1|0}$; covarianza iniziale $P_{1|0}$;

Per $k = 1, 2, \ldots$

Correzione:

$$
\begin{array}{rcll}
S_k & = & R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^T & \% \textit{ covarianza dell'innovazione} \\
L_k & = & P_{k|k-1} C_k^T S_k^{-1} & \% \textit{ guadagno di correzione} \\
e_k & = & y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} & \% \textit{ innovazione} \\
\hat{x}_{k|k} & = & \hat{x}_{k|k-1} + L_k e_k & \% \textit{ correzione della stima} \\
P_{k|k} & = & P_{k|k-1} - L_k S_k L_k^T & \% \textit{ correzione della covarianza} \\
& = & (I - L_k C_k) P_{k|k-1} (I - L_k C_k)^T + L_k R_k L_k^T &
\end{array}
$$

Predizione:

$$
\begin{array}{rcll}
\hat{x}_{k+1|k} & = & A_k \hat{x}_{k|k} + b_k & \% \textit{ predizione della stima} \\
P_{k+1|k} & = & A_k P_{k|k} A_k^T + D_k Q_k D_k^T & \% \textit{ predizione della covarianza}
\end{array}
$$

Il precedente algoritmo merita alcuni commenti.

Commenti

- La correzione comporta sempre una riduzione, o comunque un non aumento, dell'incertezza (covarianza), i.e. $P_{k|k} = P_{k|k-1} - L_k S_k L_k^T \leq P_{k|k-1}$. Si fa presente, tuttavia, che il calcolo di $P_{k|k}$ tramite (7.4.5), ovvero come differenza di due matrici non-negative definite, potrebbe comportare, per effetto dell'accumularsi di errori numerici su un orizzonte temporale molto lungo, una possibile perdita di positività della matrice di covarianza. Per questo motivo si preferisce utilizzare la seguente formula equivalente di correzione della covarianza nota come *forma di Joseph*:

  $$P_{k|k} = (I - L_k C_k) P_{k|k-1} (I - L_k C_k)^T + L_k R_k L_k^T \qquad (7.4.11)$$

  che, viceversa, calcola la covarianza corretta come somma di due matrici non-negative definite garantendo così la positività di $P_{k|k}$ a fronte di errori numerici. La formula (7.4.5) deriva da

  $$
  \begin{aligned}
  \tilde{x}_{k|k} &= x_k - \hat{x}_{k|k} \\
  &= x_k - \hat{x}_{k|k-1} - L_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} \right) \\
  &= \tilde{x}_{k|k-1} - L_k \left(C_k x_k + v_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} \right) \\
  &= (I - L_k C_k) \tilde{x}_{k|k-1} - L_k v_k
  \end{aligned}
  $$

  da cui, poiché $\tilde{x}_{k|k-1}$ e v_k sono incorrelati,

  $$
  \begin{aligned}
  P_{k|k} &= E \left[\tilde{x}_{k|k} \, \tilde{x}_{k|k}^T \right] \\
  &= (I - L_k C_k) E \left[\tilde{x}_{k|k-1} \, \tilde{x}_{k|k-1}^T \right] (I - L_k C_k)^T + L_k E \left[v_k v_k^T \right] L_k^T \\
  &= (I - L_k C_k) P_{k|k-1} (I - L_k C_k)^T + L_k R_k L_k^T.
  \end{aligned}
  $$

- Nella sua forma predizione-correzione, il filtro di Kalman opera simultaneamente sia da filtro, fornendo $\left(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}\right)$, che da predittore ad un passo, fornendo $\left(\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}\right)$. Questa caratteristica risulta di vitale importanza in diverse applicazioni. Ad esempio, nel tracciamento (tracking) radar per il monitoraggio del traffico aereo, la stima filtrata $\hat{x}_{k|k}$ viene visualizzata sullo schermo radar durante il k-esimo intervallo di campionamento, mentre la stima predittiva $\hat{x}_{k+1|k}$ viene utilizzata per prevedere la posizione dell'aereo all'istante successivo e puntare, conseguentemente, il radar nella posizione prevista. Si fa notare come le matrici di covarianza $P_{k|k}$ e $P_{k+1|k}$ che il filtro di Kalman deve necessariamente propagare per il calcolo del guadagno di Kalman, sono anche utili per quantificare l'incertezza delle corrispondenti stime $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k+1|k}$ e costruire intorno ad esse le regioni di confidenza.

7.5 Proprietà del filtro di Kalman

Il grande successo del filtro di Kalman, in innumerevoli applicazioni relative a svariati settori della scienza e dell'ingegneria, deriva dalle molteplici proprietà benefiche di questo algoritmo che verranno esaminate in questo paragrafo. Tali proprietà sono infatti alla base sia della sua facilità di implementazione su calcolatori digitali che delle sue notevoli prestazioni in termini di accuratezza della stima, affidabilità di funzionamento, capacità di rilevare anomalie, etc..

Ricorsività e complessità polinomiale

Si consideri un algoritmo $\mathcal{A}$ che opera in tempo-reale acquisendo nuovi dati di ingresso $\mathcal{I}_k$ ad istanti discreti t_k (per $k = 1, 2, \dots$) e cercando di risolvere, nell'intervallo temporale $[t_k, t_{k+1})$, un problema la cui soluzione $\mathcal{O}_k$ (dati di uscita) dipende dai dati di ingresso $\mathcal{I}_{1:k} = \{\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_k\}$ fino all'istante k. Tale algoritmo dicesi *ricorsivo* se il numero di operazioni e l'occupazione di memoria richiesti per il calcolo di $\mathcal{O}_k$, a partire dalla soluzione $\mathcal{O}_{k-1}$ precedente, non dipendono da k ma solo dalla dimensione del problema, i.e. dimensione di $\mathcal{I}_k$. Nel caso specifico in cui l'algoritmo $\mathcal{A}$ coincida con il filtro di Kalman, si ha $\mathcal{I}_k = \{y_k, b_k, A_k, C_k, D_k, Q_k, R_k\}$ e la dimensione del problema è caratterizzata da $n = \dim \mathrm{x}, \mathrm{p} = \dim \mathrm{y}, \mathrm{m} = \dim \mathrm{w}$. La soluzione $\mathcal{O}_k = \{\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}, \hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}\}$ fornita dal filtro di Kalman richiede $n(n+3)/2$ locazioni di memoria per memorizzare il vettore di stima e la matrice di covarianza ed un numero di operazioni dipendente da n, p, m ma indipendente da k. Quindi il filtro di Kalman è un algoritmo ricorsivo; si noti che $\mathcal{O}_k$ è funzione solo di $\mathcal{O}_{k-1}$ (soluzione precedente dipendente da $\mathcal{I}_{1:k-1}$) e $\mathcal{I}_k$ (nuovi dati).

Nell'informatica, la complessità di un algoritmo è la quantità di risorse (calcolo e memoria) richiesta per la sua esecuzione. In particolare, un algoritmo è detto di *complessità polinomiale* se il numero di operazioni (complessità di calcolo) e di locazioni di memoria (complessità di memoria) richieste sono limitate superiormente da funzioni polinomiali della dimensione del problema quando tale dimensione è sufficientemente grande. Il filtro di Kalman ha dunque complessità di memoria dell'ordine di n^2, i.e., $O(n^2)$. Per quanto riguarda la complessità di calcolo, assumendo $n = max(n, m, p)$ come di solito accade, questa è $O(n^3)$, numero di operazioni richieste per il calcolo di $A_k P_{k|k} A_k^T$. Riassumendo, il filtro di Kalman è un algoritmo di complessità polinomiale con complessità di memoria quadratica e complessità di calcolo cubica rispetto al numero di variabili di stato da stimare.

Ottimalità

Come ripetutamente affermato, il filtro di Kalman è lo stimatore ottimo (MMSE) dello stato di un sistema lineare, nel senso che minimizza l'errore quadratico medio di stima. Più precisamente:

- è ottimo in assoluto, fra tutti gli stimatori lineari e non lineari, nel caso Gaussiano, i.e. quando tutte le distribuzioni di probabilità (dello stato iniziale, del disturbo di processo e del rumore di misura) sono Gaussiane;

- è lo stimatore *lineare non polarizzato ottimo* (BLUE = Best Linear Unbiased Estimator) a prescindere dalla natura delle suddette distribuzioni di probabilità.

Inoltre, il filtro di Kalman può essere interpretato come *stimatore ottimo ai minimi quadrati* che minimizza il costo (7.3.16) senza alcuna ipotesi statistica su stato iniziale, disturbo di processo e rumore di misura.

Le suddette proprietà di ottimalità del filtro di Kalman ne motivano l'utilizzo per qualunque sistema lineare anche se non Gaussiano. Per un sistema lineare non Gaussiano, esistono stimatori non lineari migliori del filtro di Kalman, ovvero in grado di fornire un errore quadratico medio inferiore. La loro determinazione analitica risulta tuttavia, salvo casi molto particolari, impossibile per cui si rende comunque necessaria un'approssimazione numerica dello stimatore ottimo che, di fatto, lo rende sub-ottimo e, quindi, di dubbia convenienza rispetto al filtro di Kalman, anch'esso sub-ottimo ma pur sempre ottimo nell'ambito degli stimatori lineari non polarizzati. Se dunque il problema di stima dinamica è lineare, sia nell'equazione di moto che in quella di misura, è prassi applicare il filtro di Kalman alla sua soluzione. Viceversa, se vi sono non linearità nell'equazione di moto e/o di misura, il filtro di Kalman non è applicabile ed è necessario ricorrere a stimatori non lineari che verranno trattati in un capitolo successivo.

Linearità

Se si considera la stima filtrata $\hat{x}_{k|k}$ come uscita del filtro di Kalman, esso ammette la rappresentazione di stato

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} &= (A_k - K_k C_k)\,\hat{x}_{k|k-1} + b_k + K_k y_k \\ \hat{x}_{k|k} &= (I - L_k C_k)\,\hat{x}_{k|k-1} + L_k y_k \end{cases} \tag{7.5.1}$$

dove tutte le matrici, inclusi i guadagni $L_k = P_{k|k-1} C_k^T (R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^T)^{-1}$ e $K_k = A_k L_k$, non dipendono dalle osservazioni $y_{1:k}$ diversamente dalle stime $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k+1|k}$. Quindi, il filtro di Kalman non è altro che un sistema *lineare tempo-variante* (LTV) con ingressi b_k e y_k ed opportune matrici di stato.

Stabilità

Dalla dinamica dell'errore (7.3.4), gli errori di stima $\tilde{x}_{k|k-1}$ e $\tilde{x}_{k|k}$ del filtro di Kalman evolvono nel tempo in accordo a

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|k-1} &= \Phi_{k,1}\tilde{x}_{1|0} + \sum_{i=1}^{k-1} \Phi_{k,i+1} D_i w_i - \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_{k,j+1} K_j v_j \\ \tilde{x}_{k|k} &= (I - L_k C_k)\tilde{x}_{k|k-1} - L_k v_k \\ &= (I - L_k C_k)\Phi_{k,1}\tilde{x}_{1|0} + \\ &\quad (I - L_k C_k)\sum_{i=1}^{k-1} \Phi_{k,i+1} D_i w_i - \\ &\quad (I - L_k C_k)\sum_{j=1}^{k-1} \Phi_{k,j+1} K_j v_j - L_k v_k \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

dove il primo termine rappresenta la risposta libera mentre i termini successivi costituiscono la risposta forzata dovuta all'azione del disturbo di processo e del rumore di misura. Un buon funzionamento del filtro di Kalman richiede che gli errori di stima convergano a zero in assenza di disturbi, i.e. in evoluzione libera, qualunque sia l'errore iniziale $\tilde{x}_{1|0}$ e si mantengano comunque limitati in presenza di disturbo di processo e rumore di misura limitati. Entrambi i requisiti sono legati alle proprietà di stabilità del sistema LTV (7.3.4). A tale proposito, si introducono le seguenti definizioni.

Definizione (Stabilità del filtro di Kalman) - Il filtro di Kalman dicesi *asintoticamente stabile*, *esponenzialmente stabile*, *BIBO-stabile*, *stabile in media quadratica* se il sistema (7.3.4) lo è.

Definizione (Stabilità asintotica) - Il sistema (7.3.4) dicesi *asintoticamente stabile* se, in evoluzione libera,

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{x}_k = 0, \ \ \forall \tilde{x}_0.$$

Poiché in evoluzione libera $\tilde{x}_k = \Phi_{k,0}\tilde{x}_0$, la stabiliià asintotica del filtro di Kalman equivale alla convergenza a zero della matrice di transizione dello stato, i.e.,

$$\lim_{k \to \infty} \Phi_{k,0} = 0 \tag{7.5.3}$$

dove

$$\Phi_{k,0} = \Phi_{k-1} \cdots \Phi_1 \Phi_0$$

con $\Phi_i \triangleq A_i - K_i C_i$.

Definizione (Stabilità esponenziale) - Il sistema (7.3.4) dicesi *esponenzialmente stabile* se esistono costanti $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tali che

$$\|\Phi_{k,0}\| \leq \beta e^{-\alpha k}.$$

Ovviamente, la stabilità esponenziale implica quella asintotica ma non viceversa.

Definizione (Stabilità BIBO) - Il sistema (7.3.4) dicesi *BIBO stabile* se ingressi limitati producono uscite limitate, i.e.

$$\sup_{k \geq 0} \|w_k\| < \infty \text{ e } \sup_{k \geq 0} \|v_k\| < \infty \implies \sup_{k \geq 0} \|\tilde{x}_k\| < \infty$$

Si può verificare che, per sistemi lineari, la stabilità esponenziale implica quella BIBO se le matrici di ingresso D_k e K_k in (7.3.4) sono limitate. Infatti, la convergenza esponenziale a zero delle matrici di transizione dello stato $\Phi_{k,i+1}$ per $k \to \infty$ ed i fissato, fa sì che tutti i termini in (7.3.6) sono limitati (per ingressi w_k e v_k limitati) e quindi anche $\tilde{x}_k$ risulta limitato.

Definizione (Stabilità in media quadratica) - Il sistema (7.3.4) dicesi *stabile in media quadratica* se ingressi stocastici di varianza limitata producono uscite di varianza limitata, i.e.

$$\sup_{k \geq 0} \|E\left[w_k w_k^T\right]\| < \infty \text{ e } \sup_{k \geq 0} \|E\left[v_k v_k^T\right]\| < \infty \implies \sup_{k \geq 0} \|E\left[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T\right]\| < \infty$$

Anche in questo caso si può verificare che la stabilità esponenziale del sistema (7.3.4) e la limitatezza delle matrici di covarianza $Q_k = E[w_k w_k^T]$ ed $R_k \triangleq E[v_k v_k^T]$ implicano la limitatezza della matrice di covarianza dello stato predittiva $P_k = P_{k|k-1} = E\left[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{x}_{k|k-1}^T\right]$ e, ovviamente, anche di quella filtrata $P_{k|k} = E\left[\tilde{x}_{k|k}\tilde{x}_{k|k}^T\right] \leq P_{k|k-1}$.

Alla luce delle precedenti considerazioni, l'eventuale stabilità esponenziale del filtro di Kalman implica:

- convergenza a zero, per $k \to \infty$, dell'errore di stima dello stato in assenza di disturbi;
- limitatezza dell'errore di stima dello stato in presenza di disturbi limitati;
- limitatezza della matrice di covarianza dello stato in presenza di disturbi stocastici di varianza limitata.

Si noti, inoltre, che tali implicazioni valgono, qualunque sia l'inizializzazione dell'algoritmo, sia per $\tilde{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}$ (predittore) che per $\tilde{x}_{k|k}, P_{k|k}$ (filtro).

Nel seguito di questo paragrafo, si studiano condizioni strutturali sul sistema (7.1.3)-(7.1.4) per la stabilità esponenziale del filtro di Kalman. Poiché il filtro di Kalman cerca di minimizzare, ad ogni k, gli errori quadratici medi $P_{k|k}$ e $P_{k+1|k}$ è logico aspettarsi che questi ultimi siamo limitati superiormente sotto opportune ipotesi di osservabilità sul sistema (7.1.3)-(7.1.4). A tale proposito si introducono definizioni di osservabilità e rilevabilità che generalizzano quelle del paragrafo 7.2 a sistemi lineari tempo-varianti.
Dato il sistema LTV (7.1.3)-(7.1.4), ovvero la coppia di matrici (A_k, C_k), si definisce la matrice di osservabilità relativa all'intervallo temporale $[k, k+s]$

$$\Theta_{k+s,k} = \begin{bmatrix} C_k \Phi_{k,k} \\ C_{k+1}\Phi_{k+1,k} \\ \vdots \\ C_{k+s}\Phi_{k+s,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k \\ C_{k+1}A_k \\ \vdots \\ C_{k+s}A_{k+s-1}\cdots A_k \end{bmatrix} \tag{7.5.4}$$

ed il Gramiano di osservabilità sullo stesso intervallo

$$\mathcal{O}_{k+s,k} = \Theta_{k+s,k}^T \Theta_{k+s,k} \tag{7.5.5}$$

Si noti che la matrice di osservabilità $\Theta_{k+s,k}$, permette di esprimere la relazione lineare, in evoluzione libera, fra le uscite osservate e lo stato inziale nell'intervallo di osservazione $[k, k+s]$, i.e.,

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+s} \end{bmatrix} = \Theta_{k+s,k}\, x_k.$$

Il Gramiano di osservabilità è per costruzione una matrice simmetrica non-negativa definita, i.e. $\mathcal{O}_{k+s|k} = \mathcal{O}_{k+s|k}^T \geq 0$, che quantifica l'informazione sullo stato acquisita nell'intervallo di osservazione $[k, k+s]$.

Definizione (Osservabilità uniforme) - Il sistema LTV (7.1.3)-(7.1.4) dicesi *uniformemente osservabile* se esistono un intero $N \geq 0$ e costanti reali $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tali che

$$0 < \alpha_1 I \leq \mathcal{O}_{k,k-N} \leq \alpha_2 I \tag{7.5.6}$$

per ogni $k \geq N$. □

L'osservabilità uniforme equivale dunque all'esistenza di un intervallo di osservazione di durata N sufficientemente ampia da garantire che il Gramiano di osservabilità su tale intervallo sia limitato inferiormente da una matrice diagonale positiva $\alpha_1 I$, ovvero vi sia sufficiente informazione per poter stimare tutte le componenti del vettore di stato; inoltre (7.5.6) richiede anche che tale Gramiano sia limitato superiormente. Si noti che la precedente definizione generalizza la condizione di osservabilità di sistemi LTI. Se infatti il sistema è tempo-invariante e si considera $N = n - 1$, con $n = dim\, x$, la matrice di osservabilità $\Theta_{k,k-N}$ si riduce a

$$\Theta_{k,k-N} = \Theta_{k,k-n+1} = \Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Quindi, l'osservabilità di un sistema LTI ($rank\, \Theta = n$) equivale all'invertibilità del Gramiano di osservabilità $\mathcal{O}_{k,k-n+1} = \Theta^T \Theta$ ovvero alla condizione $\mathcal{O}_{k,k-n+1} > 0$ in (7.5.6) per ogni $k \geq n - 1$.

Definizione (Rilevabilità uniforme) - Il sistema LTV (7.1.3)-(7.1.4) dicesi *uniformemente rilevabile* se esistono interi $r, s \geq 0$ e costanti reali $d \in [0, 1), b > 0$ tali che

$$\|\Phi_{k+r,k}\, x\| \geq d\|x\| \text{ per qualche } k \text{ e } x \implies x^T \mathcal{O}_{k+s,k}\, x \geq bx^T x \tag{7.5.7}$$

La suddetta definizione di rilevabilità uniforme richiede che quando lo stato non decade rapidamente, i.e. $\|\Phi_{r+k,r}\, x\| \geq d\|x\|$, lo stato deve essere osservato con sufficiente energia (informazione), i.e. $x^T \mathcal{O}_{k+s,k} x \geq bx^T x$. Viceversa, stati che non sono osservati con sufficiente energia, per i quali si ha $x^T \mathcal{O}_{k+s,k} x < bx^T x$, devono portare ad un decadimento rapido della risposta, i.e. $\|\Phi_{r+k,r}\, x\| < d\|x\|$. In altri termini, eventuali modi instabili della risposta devono essere osservati con sufficiente energia. Nell'ambito dei sistemi LTI, questo comporta che eventuali autovalori inosservabili della matrice A devono giacere all'interno della regione di stabilità (cerchio unitario).

È facile verificare che l'osservabilità uniforme implica la rilevabilità uniforme. Infatti, l'osservabilità uniforme comporta l'esistenza di un intero $N \geq 0$ e di $\alpha_1 > 0$ tali che

$$\mathcal{O}_{k',k'-N} \geq \alpha_1 I, \quad \forall k' \geq N$$

da cui (posto $k = k' - N \geq 0$, $b = \alpha_1 > 0$ e $s = N > 0$), pre-moltiplicando per x^T e post-moltiplicando per x, si ottiene

$$x^T \mathcal{O}_{k+s,k} x \geq b x^T x, \quad \forall k \geq 0 \ \& \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ovvero la rilevabilità uniforme.

La stabilità esponenziale del filtro di Kalman richiede anche condizioni strutturali duali di *raggiungibilità* e *stabilizzabità*. A tale proposito, data la coppia (A_k, B_k) si introduce la matrice di raggiungibilità sull'intervallo $[k-s, k]$

$$\begin{aligned} R_{k,k-s} &= [B_{k-1}, A_{k-1}B_{k-2}, \ldots, A_{k-1} \cdots A_{k-s+1} B_{k-s}] \\ &= [\Phi_{k,k} B_{k-1}, \Phi_{k,k-1} B_{k-2}, \ldots, \Phi_{k,k-s+1} B_{k-s}] \end{aligned} \tag{7.5.8}$$

ed il corrispondente Gramiano di raggiungibilità

$$\mathcal{R}_{k,k-s} = R_{k,k-s} \, R^T_{k,k-s}. \tag{7.5.9}$$

Definizione (Raggiungibilità uniforme) - Il sistema LTV $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$, o equivalentemente la coppia (A_k, B_k), dicesi *uniformemente raggiungibile* se esistono un intero $N \geq 0$ e costanti reali $\beta_1, \beta_2 > 0$ tali che

$$0 < \beta_1 I \leq \mathcal{R}_{k,k-N} \leq \beta_2 I \tag{7.5.10}$$

per ogni $k \geq N$. □

La raggiungibilità uniforme equivale dunque all'esistenza di un intervallo di controllo di durata N sufficientemente ampia da garantire che il Gramiano di raggiungibilità su tale intervallo sia limitato inferiormente da una matrice diagonale positiva $\beta_1 I$, ovvero vi sia sufficiente energia per poter controllare tutte le componenti del vettore di stato; inoltre (7.5.6) richiede anche che tale Gramiano sia limitato superiormente. Si noti che la precedente definizione generalizza la condizione di raggiungibilità di sistemi LTI. Se infatti il sistema è tempo-invariante e si considera $N = n - 1$, con $n = dim\, x$, la matrice di raggiungibilità $R_{k,k-N}$ si riduce a

$$R_{k,k-N} = R_{k,k-n+1} = R = \left[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right].$$

Quindi, la raggiungibilità di un sistema LTI ($rank\, R = n$) equivale all'invertibilità del Gramiano di raggiungibilità $\mathcal{R}_{k,k-n+1} = R^T R$ ovvero alla condizione $\mathcal{R}_{k,k-n+1} > 0$ in (7.5.6) per ogni $k \geq n-1$.

Definizione (Stabilizzabilità uniforme) - Il sistema LTV $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$, o equivalentemente la coppia (A_k, B_k), dicesi *uniformemente stabilizzabile* se esistono interi $r, s \geq 0$ e costanti reali $d \in [0,1), b > 0$ tali che

$$\|\Phi_{k+1,k+1-r}\, x\| \geq d\|x\| \text{ per qualche } k \text{ e } x \quad \Longrightarrow \quad x^T \mathcal{R}_{k,k-s}\, x \geq b x^T x \tag{7.5.11}$$

Si possono adesso formulare due risultati sulla stabilità del filtro di Kalman, per le cui dimostrazioni (piuttosto tecniche e complicate) si rimanda il lettore interessato al riferimento [4]. Tali risultati faranno riferimento alla seguente ipotesi di limitatezza delle matrici A_k, C_k, D_k, Q_k, R_k

$$\sup_k \|A_k\| < \infty, \sup_k \|C_k\| < \infty, \sup_k \|D_k\| < \infty, \sup_k \|Q_k\| < \infty, \sup_k \|R_k\| < \infty. \tag{7.5.12}$$

Un primo risultato riguarda la stabilità in media quadratica.

Teorema (Stabilità in media quadratica del filtro di Kalman) - Sotto l'ipotesi (7.5.12), se la coppia (A_k, C_k) è uniformemente rilevabile, allora il filtro di Kalman (7.3.13)-(7.3.15) è stabile in media quadratica, i.e. produce matrici di covarianza $P_{k|k}$ e $P_{k+1|k}$ limitate. □

Il successivo risultato sulla stabilità esponenziale fa riferimento ad una matrice B_k definita in modo tale che il termine $D_k w_k$ presente in (7.1.3), con $w_k = wn(0, Q_k)$, sia espresso equivalentemente come $B_k \omega_k$ dove ω_k è un disturbo di processo normalizzato con media nulla e covarianza unitaria, i.e. $\omega_k = wn(0, I)$. A tale proposito B_k deve soddisfare $B_k B_k^T = D_k Q_k D_k^T$ o, equivalentemente, $B_k = D_k Q_k^{1/2}$.

Teorema (Stabilità esponenziale del filtro di Kalman) - Si assuma (7.5.12) e sia B_k tale che $B_k B_k^T = D_k Q_k D_k^T$. Se la coppia (A_k, C_k) è uniformemente rilevabile e la coppia (A_k, B_k) è uniformemente stabilizzabile, allora il filtro di Kalman (7.3.13)-(7.3.15) è esponenzialmente stabile. □

I precedenti risultati sulla stabilità del filtro di Kalman meritano alcuni commenti.

Commenti

- La rilevabilità uniforme della coppia (A_k, C_k) garantisce la limitatezza delle matrici di covarianza $P_{k|k}$ e $P_{k+1|k}$ per ogni $k > 0$.

- L'aggiunta dell'ulteriore condizione di stabilizzabilità uniforme comporta ulteriori garanzie in termini di

  - convergenza esponenziale a zero, in assenza di disturbi, dell'errore di stima;
  - limitatezza dell'errore di stima in presenza di disturbi limitati;
  - indipendenza dalle condizioni iniziali.

  Per chiarire l'ultimo punto, una importante conseguenza del teorema sulla stabilità esponenziale è che il filtro di Kalman dimentica la sua inizializzazione nel senso che le sequenze di stime e di covarianze originate da diverse condizioni iniziali convergono l'una all'altra. Più precisamente, siano $\left(\hat{x}^{(i)}_{1|0}, P^{(i)}_{1|0}\right)$, per $i \in \{1,2\}$, due diverse inizializzazioni del filtro di Kalman e $\hat{x}^{(i)}_{k|k}, P^{(i)}_{k|k}, \hat{x}^{(i)}_{k+1|k}, P^{(i)}_{k+1|k}$ le corrispondenti sequenze di stime e covarianze, filtrate e predittive, originate da tali condizioni iniziali. Si dimostra [5, 6], sotto condizioni di rilevabilità e stabilizzabilità uniforme, che

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} & \left[P^{(1)}_{k|k} - P^{(2)}_{k|k}\right] &= 0 \\
\lim_{k\to\infty} & \left[P^{(1)}_{k+1|k} - P^{(2)}_{k+1|k}\right] &= 0 \\
\lim_{k\to\infty} & E\left[\hat{x}^{(1)}_{k|k} - \hat{x}^{(2)}_{k|k}\right] &= 0 \\
\lim_{k\to\infty} & E\left[\hat{x}^{(1)}_{k+1|k} - \hat{x}^{(2)}_{k+1|k}\right] &= 0
\end{aligned}
\tag{7.5.13}
$$

  Questa proprietà di indipendenza dalle condizioni iniziali è molto importante dal punto di vista pratico in quanto sancisce che l'effetto delle condizioni iniziali, spesso ignote e quindi scelte arbitrariamente, viene dimenticato man mano che vengono elaborate nuove osservazioni. Di conseguenza, l'inizializzazione del filtro di Kalman influisce solo sul comportamento in transitorio ma non a regime.

- Si noti come le proprietà di stabilità del filtro di Kalman non dipendono in alcun modo dalla stabilità del sistema dinamico (7.1.3)-(7.1.4) di cui si vuole stimare lo stato. Questo significa che, anche se lo stato del sistema si allontana arbitrariamente dallo stato iniziale, la stima fornita dal filtro di Kalman è in grado di seguirlo. Di conseguenza, il filtro di Kalman può essere impiegato con successo in applicazioni di stima del moto (navigazione o tracciamento) con modelli di moto lineari $x_{k+1} = A_k x_k + D_k w_k$ dell'oggetto navigante o da tracciare che sono tipicamente instabili per tener conto della possibilità che l'oggetto si allontani arbitrariamente dalla posizione iniziale.

Non polarizzazione

Come ribadito più volte, una proprietà fondamentale di uno stimatore è la *non polarizzazione* ovvero la coincidenza della media della stima con la media della variabile da stimare. Nel caso specifico del filtro di Kalman, questa si traduce nel fatto che gli errori di stima, predittiva e filtrata, abbiano media nulla, i.e.,

$$E\left[\tilde{x}_{k|k-1}\right] = 0, \qquad E\left[\tilde{x}_{k|k}\right] = 0. \tag{7.5.14}$$

Si noti da (7.5.2) che:

- $E\left[\tilde{x}_{1|0}\right] = 0 \Rightarrow E\left[\tilde{x}_{k|k-1}\right] = E\left[\tilde{x}_{k|k}\right] = 0$ per ogni $k \geq 1$. Pertanto se la stima iniziale è non polarizzata, il filtro di Kalman fornisce stime non polarizzate ad ogni istante successivo.

- Se il filtro di Kalman è esponenzialmente stabile (vedi precedente paragrafo), i.e. $\lim_{k\to\infty} \Phi_{k,1} = 0$, allora $\lim_{k\to\infty} E\left[\tilde{x}_{k|k-1}\right] = \lim_{k\to\infty} E\left[\tilde{x}_{k|k}\right] = 0$. In questo caso, il filtro di Kalman è asintoticamente non polarizzato a prescindere dalla sua inizializzazione.

Riassumendo, il filtro di Kalman preserva ricorsivamente la non polarizzazione e la consegue a regime sotto ipotesi di rilevabilità e stabilizzabilità del sistema (7.1.3)-(7.1.4).

Proprietà diagnostica

Nella sua fase di correzione, il filtro di Kalman genera il segnale *innovazione* $e_k \triangleq y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}$ che, nel caso in cui le osservazioni y_k sono in accordo con il modello sulla base del quale opera il filtro di Kalman i.e.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A_k x_k + b_k + D_k w_k \\ y_k & = & C_k x_k + v_k \\ w_k & = & wn\left(0, Q_k\right) \\ v_k & = & wn\left(0, R_k\right) \\ x_0 & \sim & \left(\hat{x}_0, P_0\right) \\ x_0 & \perp & w_k \ \perp \ v_j \quad \forall k, j \end{array} \right. \tag{7.5.15}$$

soddisfa la seguente *proprietà diagnostica.*

Teorema *(Proprietà diagnostica del filtro di Kalman)* - Il segnale innovazione e_k generato dal filtro di Kalman

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_k & = & y_k - C_k \hat{x}_k \\ S_k & = & R_k + C_k P_k C_k^\top \\ K_k & = & A_k P_k C_k^\top S_k^{-1} \\ \hat{x}_{k+1} & = & A_k \hat{x}_k + b_k + K_k e_k \\ P_{k+1} & = & A_k P_k A_k^\top + D_k Q_k D_k^\top - K_k S_k K_k^\top \end{array} \right. \tag{7.5.16}$$

è un rumore bianco a media nulla e di varianza S_k, i.e. $e_k = wn\left(0, S_k\right)$, se il segnale y_k applicato al filtro di Kalman è generato dal sistema (7.5.15).

Dimostrazione - Definito l'errore di stima $\tilde{x}_k \triangleq x_k - \hat{x}_k$, da (7.5.15) e (7.5.16) è immediato verificare che l'innovazione e_k è generata dal seguente sistema dinamico

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{x}_{k+1} & = & \Phi_k \tilde{x}_k + D_k w_k - K_k v_k \\ e_k & = & C_k \tilde{x}_k + v_k \end{array} \right. \tag{7.5.17}$$

con $\Phi_k \triangleq A_k - K_k C_k$. Risolvendo le equazioni di stato (7.5.17), si ottiene

$$\begin{array}{rcl} e_k & = & C_k \Phi_{k,0} \tilde{x}_0 + \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} C_k \Phi_{k,i+1} D_i w_i - \sum_{i=0}^{k-1} C_k \Phi_{k,i+1} K_i v_i + v_k \\ \Phi_{k,j} & \triangleq & \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{k-1} \cdots \Phi_j = \displaystyle\prod_{i=k-1}^{j} \Phi_i, & k > j \\ I, & k = j \end{array} \right. \end{array}$$

da cui risulta che e_k ha media nulla in quanto $E\left[\tilde{x}_0\right] = 0$, $E\left[w_i\right] = 0$ e $E\left[v_i\right] = 0$ per ogni i. Inoltre, si ha

$$e_{k+j} = C_{k+j} \Phi_{k+j,k}\, \tilde{x}_k + \sum_{i=k}^{k+j-1} C_{k+j} \Phi_{k+j,i+1} D_i w_i - \sum_{i=k}^{l+j-1} C_{k+j} \Phi_{k+j,i+1} K_i v_i + v_{k+j} \tag{7.5.18}$$

Quindi, utilizzando (7.5.15) e (7.5.18), si procede al calcolo della funzione di auto-covarianza dell'innovazione

$$R_e(k+j,k) \triangleq E\left[e_{k+j}\, e_k^\top\right] = \left\{ \begin{array}{ll} R_k + C_k P_k C_k^\top = S_k, & j = 0 \\ C_{k+j} \Phi_{k+j,k} P_k C_k^\top - C_{k+j} \Phi_{k+j,k+1} K_k R_k, & j \neq 0 \end{array} \right. \tag{7.5.19}$$

Poiché $\Phi_{k+j,k} = \Phi_{k+j,k+1} \Phi_k$, per ogni $j \neq 0$ risulta che

$$\begin{array}{rcl} R_e(k+j,k) & = & C_{k+j} \Phi_{k+j,k+1} \left(\Phi_k P_k C_k^\top - K_k R_k \right) \\ & = & C_{k+j} \Phi_{k+j,k+1} \left[\left(A_k - K_k C_k\right) P_k C_k^\top - K_k R_k \right] \\ & = & C_{k+j} \Phi_{k+j,k+1} \left[A_k P_k C_k^\top - K_k \left(R_k + C_k P_k C_k^\top \right) \right] \\ & = & C_{k+j} \Phi_{k+j,k+1} \left[A_k P_k C_k^\top - K_k S_k \right] \\ & = & C_{k+j} \Phi_{k+j,k+1} \left[A_k P_k C_k^\top - A_k P_k C_k^\top S_k^{-1} S_k \right] \\ & = & C_{k+j} \Phi_{k+j,k+1} \left[A_k P_k C_k^\top - A_k P_k C_k^\top \right] \\ & = & 0 \end{array}$$

Quindi $R_e(k+j,k) = S_k \delta_j$ o, equivalentemente, $R_e(k,h) = S_k \delta_{k-h}$ da cui $e_k = wn\left(0, S_k\right)$ come volevasi dimostrare. $\square$

La suddetta proprietà di bianchezza dell'innovazione viene indicata come proprietà diagnostica del filtro di Kalman per il motivo di seguito illustrato. Il precedente teorema afferma che se il filtro di Kalman (7.5.16) è effettivamente applicato al segnale y_k del sistema (7.5.15), l'innovazione e_k generata dal filtro deve risultare un segnale bianco. Se, dunque, il segnale y_k acquisito dal sistema reale sotto monitoraggio viene applicato ad un filtro di Kalman basato su un modello di funzionamento nominale (corretto) del sistema stesso ed un test statistico sul segnale e_k generato dal filtro di Kalman ne riscontra una significativa discordanza dall'ipotesi di bianchezza, questa discordanza non può che essere imputata ad un comportamento del sistema monitorato non conforme al modello nominale. Questo può essere dovuto, oltre che ad una errata modellazione del sistema monitorato, anche ad un guasto di qualche componente del sistema stesso (e.g. sensore o attuatore). Pertanto il filtro di Kalman, in combinazione con un test statistico di bianchezza, viene comunemente usato per la diagnosi di guasti, in tempo reale, di processi industriali.

7.6 Caso LTI: filtro di Kalman stazionario (a guadagno costante)

Si consideri il caso particolare di sistema LTI (7.2.1)-(7.2.2) con disturbo di processo $w_k = swn(0, Q)$ e rumore di misura $v_k = swn(0, R)$ stazionari. Il predittore di Kalman (7.3.13)-(7.3.15), in questo caso, si riduce a

$$\begin{aligned} K_k &= AP_{k|k-1}C^T \left(R + CP_{k|k-1}C^T\right)^{-1} && (7.6.1) \\ \hat{x}_{k+1|k} &= A\hat{x}_{k|k-1} + b_k + K_k \left(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}\right) && (7.6.2) \\ P_{k+1|k} &= AP_{k|k-1}A^T - AP_{k|k-1}C^T \left(R + CP_{k|k-1}C^T\right)^{-1} CP_{k-1|k}A^T + DQD^T && (7.6.3) \end{aligned}$$

Si noti che la matrice di covarianza $P_k = P_{k|k-1}$ propagata nel tempo mediante la DRE (7.6.3) risulta tempo-variante anche se le matrici A, C, D, Q, R sono costanti. Conseguentemente, tramite (7.6.1), il predittore (osservatore alla Luenberger) in (7.6.2) ha guadagno tempo-variante K_k. Vale la pena osservare che se, viceversa, il guadagno di Kalman $K_k = K$ fosse costante seguirebbero notevoli semplificazioni nell'implementazione del filtro di Kalman, i.e., non occorrerebbe aggiornare né memorizzare la matrice di covarianza $P_k = P_{k|k-1}$.

A tale proposito, viene naturale chiedersi se e sotto quali condizioni la soluzione della DRE (7.6.3) converge ad una matrice costante $P = P^T \geq 0$, i.e.,

$$\lim_{k\to\infty} P_{k|k-1} = P \tag{7.6.4}$$

da cui

$$\lim_{k\to\infty} K_k = K. \tag{7.6.5}$$

In primo luogo si osserva, applicando $\lim_{k\to\infty}$ ad ambo i membri di (7.6.3), che tale matrice costante P deve soddisfare

$$P \;=\; APA^T - APC^T\left(R + CPC^T\right)^{-1} CPA^T + DQD^T \tag{7.6.6}$$

che prende il nome di *equazione algebrica di Riccati* (ARE= Algebraic Riccati Equation). In altri termini, una eventuale soluzione costante (punto fisso) $P_{k+1|k} = P_{k|k-1} = P$ della DRE (7.6.3) deve essere soluzione della ARE (7.6.6). Il seguente risultato fornisce condizioni per la risolvibilità di (7.6.6), per la convergenza di (7.6.3) nonché per la stabilià del corrispondente *filtro di Kalman stazionario* (a guadagno costante K).

Teorema (Filtro di Kalman stazionario) - Si consideri il sistema LTI (7.2.1)-(7.2.2) di ordine n con $w_k = swn(0,Q)$ e $v_k = swn(0,R)$ bianchi, stazionari, mutuamente incorrelati ed incorrelati con lo stato iniziale. Sia B tale che $BB^T = DQD^T$. Se la coppia (A,C) è rilevabile e la coppia (A,B) stabilizzabile, i.e.,

$$rank\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = rank\,[\lambda I - A,\; B] = n \qquad \forall \lambda \in sp(A) \text{ tale che } |\lambda| \geq 1, \tag{7.6.7}$$

allora vale quanto segue.

(i) La ARE (7.6.6) ammette una unica soluzione simmetrica semi-definita positiva $P = P^T \geq 0$.

(ii) Qualunque sia la condizione iniziale $P_{1|0} = P_{1|0}^T \geq 0$, la DRE (7.6.3) converge alla matrice P di cui al punto (i), i.e.,

$$\left.\begin{array}{lllll} \lim\limits_{k\to\infty} P_{k+1|k} & = & P & = & AMA^T + DQD^T \\ \lim\limits_{k\to\infty} P_{k|k} & = & M & = & P - PC^T\left(R + CPC^T\right)^{-1} CP \\ \lim\limits_{k\to\infty} L_k & = & L & = & PC^T\left(R + CPC^T\right)^{-1} \\ \lim\limits_{k\to\infty} K_k & = & K & = & AL \end{array}\right\} \quad \forall P_{1|0} = P_{1|0}^T \geq 0. \tag{7.6.8}$$

(iii) Il risultante filtro di Kalman stazionario (a guadagno costante)

$$\begin{array}{rcl} \hat{x}_{k+1|k} & = & A\hat{x}_{k|k-1} + b_k + K\left(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}\right) \\ \hat{x}_{k|k} & = & \hat{x}_{k|k-1} + L\left(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}\right) \end{array} \tag{7.6.9}$$

è un osservatore asintotico, i.e., la matrice $A - KC$ ha tutti gli autovalori all'interno del cerchio unitario ($|\lambda| < 1, \forall \lambda \in sp(A - KC)$).

(iv) Il filtro di Kalman stazionario (7.6.9) è il miglior, nel senso MMSE, osservatore a guadagno costante per il sistema (7.2.1)-(7.2.2). $\square$

Si noti che, nelle condizioni del precedente teorema (i.e., rilevabilità e stabilizzabilità rispetto al disturbo di processo) il filtro di Kalman è asintoticamente stazionario, comunque venga inizializzato. Se, in particolare, il filtro di Kalman viene inizializzato con $P_{1|0} = P$ dove P è l'unica soluzione simmetrica non-negativa definita della ARE allora il filtro di Kalman risulta tempo-invariante, i.e.

$$P_{k|k-1} \equiv P, P_{k|k} \equiv M, L_k \equiv L, K_k \equiv K \qquad \forall k \geq 1. \tag{7.6.10}$$

Esempio (Sistema del primo ordine) - Si consideri il sistema del primo ordine

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & a x_k + w_k \\ y_k & = & x_k + v_k \\ w_k & = & swn(0, q \geq 0) \\ v_k & = & swn(0, r > 0) \end{array} \right. \tag{7.6.11}$$

che risulta osservabile e, se $q > 0$, anche raggiungibile. Pertanto, il sistema è rilevabile e, se $q > 0$ oppure $q = 0$ e $|a| < 1$, anche stabilizzabile. L'equazione algebrica di Riccati (7.6.6), con P scalare, fornisce

$$P = a^2 P + q - \frac{a^2 P^2}{r + P} \tag{7.6.12}$$

da cui si ricava, dopo semplici passaggi, la seguente equazione di secondo grado in P:

$$P^2 + \left(r - a^2 r - q\right) P - qr = 0 \tag{7.6.13}$$

che ammette le seguenti due soluzioni

$$\begin{array}{ll} P_{1,2} \; = \; \dfrac{(a^2 - 1)r + q \pm \sqrt{(r - a^2 r - q)^2 + 4qr}}{2} & \text{se } q > 0 \\ P_1 = 0, P_2 = (a^2 - 1)r & \text{se } q = 0. \end{array}$$

Pertanto se $q > 0$, sistema osservabile e raggiungibile, la ARE ammette una unica soluzione non-negativa

$$P = P_1 = \frac{(a^2 - 1)r + q + \sqrt{(r - a^2 r - q)^2 + 4qr}}{2} > 0. \tag{7.6.14}$$

I corrispondenti guadagno di Kalman, guadagno di correzione e covarianza filtrata in (7.6.8) sono dati da

$$L = \frac{P}{r+P}, \quad K = aL = \frac{aP}{r+P}, \quad M = P - \frac{P^2}{r+P} = \frac{rP}{r+P} \leq \min\{r, P\}. \tag{7.6.15}$$

Pertanto, il filtro di Kalman applicato al sistema (7.7.34), qualunque sia $P_{1|0} \geq 0$, fornisce i seguenti valori asintotici

$$\lim_{k\to\infty} P_{k|k-1} = P, \quad \lim_{k\to\infty} P_{k|k} = M = \frac{rP}{r+P}, \quad \lim_{k\to\infty} L_k = L = \frac{P}{r+P}, \quad \lim_{k\to\infty} K_k = K = \frac{aP}{r+P} \tag{7.6.16}$$

Il risultante filtro di Kalman stazionario, che opera con guadagno costante K pari al valore di regime, è

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= \underbrace{\frac{ar}{r+P}}_{A-KC} \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{\frac{aP}{r+P}}_{K} y_k \\ \hat{x}_{k|k} &= \underbrace{\frac{r}{r+P}}_{I-LC} \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{\frac{P}{r+P}}_{L} y_k \end{aligned} \tag{7.6.17}$$

Si lascia al lettore la verifica che il filtro (7.6.17) è esponenzialmente stabile ovvero che

$$\left| \frac{ar}{r+P} \right| < 1$$

se P è dato da (7.6.14) qualunque siano $a \in \mathbb{R}$, $q > 0$ ed $r > 0$.

Nel caso in cui $q = 0$ e $|a| < 1$ (sistema non raggiungibile ma stabilizzabile), l'unica soluzione non-negativa della ARE (7.6.13) è $P = P_1 = 0$ che corrisponde allo stimatore in catena aperta

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= a\hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1}. \end{aligned}$$

Se, viceversa, $q = 0$ ma $|a| > 1$ (sistema non stabilizzabile) la soluzione $P = P_1 = 0$ fornisce uno stimatore instabile, i.e. con errore di stima che cresce esponenzialmente in accordo a $\tilde{x}_{k+1|k} = a\tilde{x}_{k|k-1}$. Al contrario, l'altra soluzione $P = P_2 = (a^2-1)\,r > 0$ è positiva e fornisce uno stimatore

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= \frac{1}{a}\hat{x}_{k|k-1} + \frac{a^2-1}{a} y_k = a\hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k|k} &= \frac{1}{a^2}\hat{x}_{k|k-1} + \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) y_k \end{aligned}$$

esponenzialmente stabile con errore di stima che evolve in accordo a

$$\tilde{x}_{k+1|k} \;=\; \frac{1}{a^2}\,\tilde{x}_{k|k-1} \;+\; \frac{1-a^2}{a^2}\,v_k.$$

Esempio (Sistema del secondo ordine) - Si consideri il sistema del secondo ordine

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}}_{A} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D} w_k \\ y_k & = & \underbrace{[1 \;\; 0]}_{C}\, x_k + v_k \\ w_k & = & swn(0,q) \\ v_k & = & swn(0,r) \end{array}\right. \tag{7.6.18}$$

con $q > 0$, $r > 0$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. Si lascia al lettore la verifica delle condizioni di osservabilità della coppia (A, C) e di raggiungibilità della coppia (A, B), con $B = \sqrt{q}D$. Definita la matrice di covarianza

$$P \;=\; \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix},$$

che deve soddisfare le condizioni di non-negatività $\alpha \geq 0$ e $\alpha\gamma - \beta^2 \geq 0$ (criterio di Sylvester), si ottiene la seguente equazione algebrica di Riccati:

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}}_{P} & = & \underbrace{\begin{bmatrix} a^2\gamma & ab\beta \\ ab\beta & b^2\alpha \end{bmatrix}}_{APA^T} - \underbrace{\begin{bmatrix} a\beta \\ b\alpha \end{bmatrix}}_{APC^T} \underbrace{\frac{1}{r+\alpha}}_{(R+CPC^T)^{-1}} \underbrace{[a\beta \;\; b\alpha]}_{CPA^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}}_{DQD^T} \\ & = & \begin{bmatrix} a^2\gamma & ab\beta \\ ab\beta & b^2\alpha \end{bmatrix} - \dfrac{1}{r+\alpha} \begin{bmatrix} a^2\beta^2 & ab\alpha\beta \\ ab\alpha\beta & b^2\alpha^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \end{array} \tag{7.6.19}$$

da cui si deducono le seguenti tre equazioni scalari

$$\alpha \;=\; a^2\gamma - \frac{a^2\beta^2}{r+\alpha} \tag{7.6.20}$$

$$\beta \;=\; ab\beta - \frac{ab\alpha\beta}{r+\alpha} \tag{7.6.21}$$

$$\gamma \;=\; b^2\alpha - \frac{b^2\alpha^2}{r+\alpha} + q \tag{7.6.22}$$

da risolvere rispetto alle tre incognite scalari $\alpha \geq 0$, β, γ tali che $\alpha\gamma - \beta^2 \geq 0$. In particolare, da (7.6.21) si ha

$$\beta\left(1 - ab + ab\frac{\alpha}{r+\alpha}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \beta = 0 \;\text{ oppure }\; \frac{\alpha}{r+\alpha} = \frac{ab-1}{ab}.$$

Pertanto (7.6.21) è soddisfatta se

$$\beta = 0 \tag{7.6.23}$$

oppure

$$\frac{\alpha}{r+\alpha} = \frac{ab-1}{ab} \implies \alpha = r(ab-1). \tag{7.6.24}$$

Si lascia al lettore la verifica che la scelta $\alpha = r(ab-1)$ porta ad una soluzione della ARE

$$\gamma = \frac{b}{a} r(ab-1) + q, \quad \beta^2 = \frac{b}{a} r^2 (ab-1)^2 + abqr$$

non ammissibile in quanto $\alpha\gamma - \beta^2 = -qr < 0$. Viceversa, sostituendo $\beta = 0$ in (7.6.20) si ottiene $\gamma = \alpha/a^2$ che, sostituito in (7.6.22), fornisce, dopo semplici passaggi algebrici, la seguente equazione di secondo grado in α:

$$\alpha^2 + \left(r - a^2 b^2 r - a^2 q\right) \alpha - a^2 qr \;=\; 0 \tag{7.6.25}$$

Tale equazione ammette una unica soluzione positiva

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{a^2 q + a^2 b^2 r - r + \sqrt{\left(a^2 q + a^2 b^2 r - r\right)^2 + 4a^2 qr}}{2} > 0 \\
\gamma &= \frac{a^2 q + a^2 b^2 r - r + \sqrt{\left(a^2 q + a^2 b^2 r - r\right)^2 + 4a^2 qr}}{2a^2} > 0 \\
P &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} > 0.
\end{aligned} \tag{7.6.26}$$

Per la matrice di covarianza a posteriori $M = E\left[\tilde{x}_{k|k}\, \tilde{x}_{k|k}^T\right]$ si ha:

$$\begin{aligned}
M &= P - PC^T\left(R + CPC^T\right)^{-1} CP \\
&= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} - \frac{1}{r+\alpha} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} [\alpha \;\, 0] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{r\alpha}{r+\alpha} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \leq P.
\end{aligned} \tag{7.6.27}$$

Il guadagno di correzione risultante è

$$L = PC^T\left(R + CPC^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{r+\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{r+\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.6.28}$$

e, quindi, il guadagno di Kalman

$$K = AL = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{r+\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b\alpha}{r+\alpha} \end{bmatrix}. \tag{7.6.29}$$

Corrispondentemente,

$$A - KC = \begin{bmatrix} 0 & a \\ \frac{br}{r+\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \qquad I - LC = \begin{bmatrix} \frac{r}{r+\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui si deducono le equazioni del filtro di Kalman stazionario

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a \\ \frac{br}{r+\alpha} & 0 \end{bmatrix}}_{A-KC} \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b\alpha}{r+\alpha} \end{bmatrix}}_{K} y_k \\ \hat{x}_{k|k} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{r}{r+\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I-LC} \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{r+\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}}_{L} y_k. \end{aligned} \tag{7.6.30}$$

Si lascia al lettore la verifica della stabilità asintotica (esponenziale) del filtro di Kalman stazionario (7.6.30), ovvero che la matrice $A-KC$ ha polinomio caratteristico $\chi_{A-KC}(z) = det(zI - A + KC) = z^2 - abr/(r+\alpha)$ con entrambe le radici all'interno del cerchio unitario, i.e.

$$\left| \frac{abr}{r+\alpha} \right| < 1$$

qualunque siano $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $q > 0$ e $r > 0$. Per tale verifica, si suggerisce di distinguere i casi $|ab| \leq 1$ e $|ab| > 1$. □

7.7 Filtro di Kalman-Bucy (a tempo continuo)

Si consideri il sistema lineare *a tempo-continuo*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) + D(t)w(t) \tag{7.7.1}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t) \tag{7.7.2}$$

sottostante alle seguenti ipotesi

(i) il disturbo di processo $w(t)$ è un rumore bianco a media nulla di varianza $Q(t) = Q^T(t) > 0$, i.e. $w(t) = wn(0, Q(t))$;

(ii) il rumore di misura $v(t)$ è un rumore bianco a media nulla di varianza $R(t) = R^T(t) > 0$, i.e. $v(t) = wn(0, R(t))$;

(iii) lo stato iniziale $x(0)$ è una variabile aleatoria di media $\hat{x}(0)$ e varianza $P(0) = P^T(0) > 0$, i.e. $x(0) \sim (\hat{x}(0), P(0)$;

(iv) il disturbo di processo $w(\cdot)$ ed il rumore di misura $v(\cdot)$ sono mutuamente incorrelati, i.e. $E\left[w(t)\,v^T(s)\right] = 0$ per ogni coppia di istanti t ed s;

(v) sia il disturbo di processo che il rumore di misura sono incorrelati con lo stato iniziale, i.e. $E\left[w(t)\,\tilde{x}^T(0)\right] = 0$ e $E\left[v(t)\,\tilde{x}^T(0)\right] = 0$ per ogni t.

In questo paragrafo si vuole derivare il filtro di Kalman a tempo-continuo, detto più propriamente *filtro di Kalman-Bucy* [2], come limite del filtro di Kalman a tempo-discreto applicato al sistema campionato di (7.7.1)-(7.7.2) quando l'intervallo di campionamento $\Delta = t_{k+1} - t_k$ tende a zero. A tale proposito, campionando (7.7.1)-(7.7.2) nell'intervallo di tempo compreso fra $t_k = t$ e $t_{k+1} = t + \Delta$, si ottiene la seguente equazione di stato a tempo-discreto

$$\underbrace{x(t+\Delta)}_{x_{k+1}} = \underbrace{\Phi(t+\Delta,t)}_{A_k}\underbrace{x(t)}_{x_k} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta}\Phi(t+\Delta,\sigma)b(\sigma)d\sigma}_{b_k} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta}\Phi(t+\Delta,\sigma)D(\sigma)w(\sigma)d\sigma}_{w_k} \tag{7.7.3}$$

Si ricorda che la matrice di transizione dello stato $\Phi(\cdot,\cdot)$ in (7.7.3) soddisfa

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi(t,t) & = & I \\ \dot{\Phi}(t,\sigma) = \dfrac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\sigma) & = & A(t)\Phi(t,\sigma) \end{array}\right. \tag{7.7.4}$$

da cui, posto $\sigma = t$, si ha

$$A(t) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Phi(t+\Delta,t) - I}{\Delta}. \tag{7.7.5}$$

La matrice di covarianza del disturbo di processo a tempo-discreto w_k in (7.7.3) vale

$$\begin{aligned} Q_k &= E\left[w_k w_k^T\right] \\ &= \int_t^{t+\Delta}\int_t^{t+\Delta}\Phi(t+\Delta,r)\,D(r)\,E\left[w(r)w^T(s)\right]\,D^T(s)\,\Phi^T(t+\Delta,s)\,dr\,ds \\ &= \int_t^{t+\Delta}\int_t^{t+\Delta}\Phi(t+\Delta,r)\,D(r)\,Q(r)\delta(r-s)\,D^T(s)\,\Phi^T(t+\Delta,s)\,dr\,ds \\ &= \int_t^{t+\Delta}\Phi(t+\Delta,r)\,D(r)\,Q(r)\,D^T(r)\,\Phi^T(t+\Delta,r)\,dr \end{aligned} \tag{7.7.6}$$

da cui, facendo tendere Δ a zero,

$$Q_k \to \Delta\, D(t)Q(t)D^T(t) \quad \text{per} \quad \Delta \to 0. \tag{7.7.7}$$

La misura a tempo-discreto può essere vista come una media a breve termine della misura a tempo-continuo, ovvero

$$y_{k+1} = \frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} y(\sigma)d\sigma = \frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} C(\sigma)x(\sigma)d\sigma + \underbrace{\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} v(\sigma)d\sigma}_{v_{k+1}}. \tag{7.7.8}$$

Si noti che per $\Delta \to 0$:

$$y_{k+1} \to y(t) = \underbrace{C(t)}_{C_{k+1}}\underbrace{x(t)}_{x_{k+1}} + v_{k+1}; \tag{7.7.9}$$

inoltre la matrice di covarianza del rumore di misura a tempo-discreto v_{k+1} in (7.7.8) vale

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= E\left[v_{k+1}v_{k+1}^T\right] \\ &= \frac{1}{\Delta^2}\int_t^{t+\Delta}\int_t^{t+\Delta} E\left[v(r)v^T(s)\right] dr\, ds \\ &= \frac{1}{\Delta^2}\int_t^{t+\Delta}\int_t^{t+\Delta} R(r)\delta(r-s)\, dr\, ds \\ &= \frac{1}{\Delta^2}\int_t^{t+\Delta} R(r)\, dr \end{aligned} \tag{7.7.10}$$

Pertanto, facendo tendere Δ a zero, si ha:

$$R_{k+1} \to \frac{R(t)}{\Delta} \quad \text{per} \quad \Delta \to 0. \tag{7.7.11}$$

Applicando il filtro di Kalman a tempo-discreto al sistema TD definito dall'equazione di stato (7.7.3) e dall'equazione di misura (7.7.8), si ottiene il seguente aggiornamento della stima:

$$\underbrace{\hat{x}(t+\Delta|t)}_{\hat{x}_{k+1|k}} = \underbrace{\Phi(t+\Delta,t)}_{A_k}\underbrace{\hat{x}(t|t)}_{\hat{x}_{k|k}} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta}\Phi(t+\Delta,\sigma)b(\sigma)d\sigma}_{b_k} \tag{7.7.12}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{x}(t+\Delta|t+\Delta)}_{\hat{x}_{k+1|k+1}} &= \underbrace{\hat{x}(t+\Delta|t)}_{\hat{x}_{k+1|k}} + \underbrace{P(t+\Delta|t+\Delta)}_{P_{k+1|k+1}}\underbrace{C^T(t)}_{C_{k+1}^T}\underbrace{\Delta R^{-1}(t)}_{R_{k+1}^{-1}} \\ &\quad \underbrace{[y(t) - C(t)\hat{x}(t+\Delta|t)]}_{y_{k+1}-C_{k+1}\hat{x}_{k+1|k}} \end{aligned} \tag{7.7.13}$$

dove in (7.7.13) si è fatto uso di (7.7.11). Combinando la predizione (7.7.12) e la correzione (7.7.13), si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{x}(t+\Delta|t+\Delta)-\hat{x}(t|t)}{\Delta} \;=\;& \frac{\Phi(t+\Delta,t)-I}{\Delta}\,\hat{x}(t|t)+\\ & \frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta}\Phi(t+\Delta,\sigma)\,b(\sigma)d\sigma+\\ & P(t+\Delta|t+\Delta)C^T(t)R^{-1}(t)\,(y(t)-C(t)\hat{x}(t+\Delta|t))\end{aligned} \tag{7.7.14}$$

Applicando $\lim_{\Delta\to 0}$ ad ambo i membri di (7.7.14), sfruttando (7.7.5) e tenendo conto che

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t+\Delta|t+\Delta) &= \lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t+\Delta|t) = \hat{x}(t|t) \stackrel{\triangle}{=} \hat{x}(t)\\ \lim_{\Delta\to 0}P(t+\Delta|t+\Delta) &= \lim_{\Delta\to 0}P(t+\Delta|t) = P(t|t) \stackrel{\triangle}{=} P(t)\end{aligned} \tag{7.7.15}$$

si ottiene la seguente equazione differenziale vettoriale:

$$\dot{\hat{x}}(t) \;=\; A(t)\hat{x}(t)+b(t)+\underbrace{P(t)C^T(t)R^{-1}(t)}_{K(t)}\,\underbrace{[y(t)-C(t)\hat{x}(t)]}_{e(t)} \tag{7.7.16}$$

che regola l'evoluzione del tempo della stima dello stato $\hat{x}(t)$. Per quanto riguarda la matrice di covarianza, la predizione e la correzione del filtro di Kalman a tempo-discreto forniscono:

$$\underbrace{P(t+\Delta|t)}_{P_{k+1|k}} = \underbrace{\Phi(t+\Delta,t)}_{A_k}\,\underbrace{P(t|t)}_{P_{k|k}}\,\underbrace{\Phi^T(t+\Delta,t)}_{A_k^T}+\underbrace{\Delta\,D(t)Q(t)D^T(t)}_{Q_k} \tag{7.7.17}$$

$$\underbrace{P(t+\Delta|t+\Delta)}_{P_{k+1|k+1}} \;=\; \underbrace{P(t+\Delta|t)}_{P_{k+1|k}}-\underbrace{P(t+\Delta|t+\Delta)}_{P_{k+1|k+1}}\,\underbrace{C^T(t)}_{C_{k+1}^T}\,\underbrace{\Delta R^{-1}(t)}_{R_{k+1}^{-1}}\,\underbrace{C(t)}_{C_{k+1}}\,\underbrace{P(t+\Delta|t)}_{P_{k+1|k}} \tag{7.7.18}$$

Combinando (7.7.17) e (7.7.18), si ha

$$\begin{aligned}
P(t+\Delta|t+\Delta) &= (I+\Phi(t+\Delta|t)-I)\,P(t|t)\,(I+\Phi(t+\Delta|t)-I)^T + \\
&\quad \Delta D(t)Q(t)D^T(t) - \\
&\quad \Delta P(t+\Delta|t+\Delta)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t+\Delta|t) \\
&= P(t|t) + \\
&\quad \Delta\left[\frac{\Phi(t+\Delta|t)-I}{\Delta}\right]P(t|t) + \Delta\, P(t|t)\,\left[\frac{\Phi(t+\Delta|t)-I}{\Delta}\right]^T + \\
&\quad \Delta^2\,\left[\frac{\Phi(t+\Delta|t)-I}{\Delta}\right]P(t|t)\left[\frac{\Phi(t+\Delta|t)-I}{\Delta}\right]^T + \\
&\quad \Delta D(t)Q(t)D^T(t) - \\
&\quad \Delta P(t+\Delta|t+\Delta)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t+\Delta|t)
\end{aligned} \tag{7.7.19}$$

da cui, trascurando il termine proporzionale a Δ^2, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{P(t+\Delta|t+\Delta)-P(t|t)}{\Delta} &= \left[\frac{\Phi(t+\Delta|t)-I}{\Delta}\right]P(t|t) + \ P(t|t)\,\left[\frac{\Phi(t+\Delta|t)-I}{\Delta}\right]^T + \\
&\quad D(t)Q(t)D^T(t) - \\
&\quad P(t+\Delta|t+\Delta)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t+\Delta|t).
\end{aligned} \tag{7.7.20}$$

Applicando $\lim_{\Delta\to 0}$ ad ambo i membri di (7.7.14), sfruttando (7.7.5) e tenendo conto di (7.7.15), si ottiene la seguente equazione differenziale matriciale:

$$\dot{P}(t) \;=\; A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + D(t)Q(t)D^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) \tag{7.7.21}$$

che regola l'evoluzione temporale della matrice di covarianza $P(t) \stackrel{\triangle}{=} E\left[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\right]$ dove $\tilde{x}(t) \stackrel{\triangle}{=} x(t) - \hat{x}(t)$. I precedenti sviluppi sono riassunti dal seguente risultato.

Teorema (Filtro di Kalman-Bucy) - Dato il sistema LTV a tempo-continuo (7.7.1)-(7.7.2) che soddisfa le ipotesi (i)-(v), la stima lineare $\hat{x}(t)$ dello stato $x(t)$ che minimizza, ad ogni istante $t \geq 0$, l'errore quadratico medio di stima $P(t) \stackrel{\triangle}{=} E\left[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\right]$ è fornita dal seguente seguente osservatore alla Luenberger

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + b(t) + K(t)\left(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right) \tag{7.7.22}$$

con guadagno tempo-variante

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t) \tag{7.7.23}$$

dipendente dalla matrice $P(t)$ soluzione di

$$\dot{P}(t) \;=\; A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + D(t)Q(t)D^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) \quad (7.7.24)$$

dove le equazioni differenziali (7.7.22) e (7.7.24) sono inizializzate da $\hat{x}(0)$ e, rispettivamente, $P(0)$. $\square$

Si noti che nel filtro di Kalman a tempo-continuo, diversamente da quello a tempo-discreto, non esiste distinzione fra stima predittiva e stima filtrata; ad ogni istante temporale t viene propagata una unica stima $\hat{x}(t)$ basata su tutte le osservazioni $y(\sigma)$, $\sigma < t$, fino all'istante t. Da un punto di vista pratico, la necessità di acquisire ed elaborare misure con continuità rende di fatto impossibile l'implementazione e l'utilizzo del filtro di Kalman-Bucy se non nei seguenti casi particolari:

- se il sistema è tempo-invariante, i disturbi sono stazionari ed il guadagno $K(t) \equiv K$ viene mantenuto costante, allora il filtro di Kalman-Bucy si riduce ad un filtro LTI analogico realizzabile con componenti elettronici lineari (e.g., resistori, condensatori e amplificatori operazionali);

- se le osservazioni vengono acquisite ad istanti discreti (vedi filtro di Kalman ibrido nel paragrafo successivo).

Nel seguito si esamina il caso tempo-invariante ($A(t) \equiv A, C(t) \equiv C, D(t) \equiv D, Q(t) \equiv Q, R(t) \equiv R$) e l'esistenza di un regime stazionario ($P(t) \to P$ e $K(t) \to K$ per $t \to \infty$) in analogia a quanto fatto per il filtro di Kalman a tempo-discreto. In primo luogo, si osserva che una eventuale soluzione costante $P(t) \equiv P$, i.e. $\dot{P}(t) \equiv 0$, dell'*equazione differenziale di Riccati*

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + DQD^T - P(t)C^T R^{-1} CP(t) \quad (7.7.25)$$

deve necessariamente essere soluzione dell'*equazione algebrica di Riccati*

$$AP + PA^T + DQD^T - PC^T R^{-1} CP = 0. \quad (7.7.26)$$

A tale soluzione è ovviamente associato il guadagno costante

$$K \;=\; PC^T R^{-1} \quad (7.7.27)$$

e l'osservatore a guadagno costante (*filtro di Kalman-Bucy stazionario*)

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\,\hat{x}(t) + b(t) + Ky(t) \quad (7.7.28)$$

Vale il seguente risultato.

Teorema (Filtro di Kalman-Bucy stazionario) - Si consideri il sistema LTI a tempo-continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b(t) + Dw(t) \qquad (7.7.29) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \qquad (7.7.30) \end{aligned}$$

di ordine n con $w(t) = swn(0, Q)$ e $v(t) = swn(0, R)$ bianchi, stazionari, mutuamente incorrelati ed incorrelati con lo stato iniziale $x(0)$. Sia B tale che $BB^T = DQD^T$. Se la coppia (A, C) è rilevabile e la coppia (A, B) stabilizzabile, i.e.,

$$rank \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = rank\,[\lambda I - A,\ B] = n \quad \forall \lambda \in sp(A) \text{ tale che } Re(\lambda) \geq 0, \quad (7.7.31)$$

allora vale quanto segue.

(i) La ARE (7.7.26) ammette una unica soluzione simmetrica semi-definita positiva $P = P^T \geq 0$.

(ii) Qualunque sia la condizione iniziale $P(0) = P^T(0) \geq 0$, la soluzione dell'equazione differenziale di Riccati (7.7.25) converge alla matrice P di cui al punto (i), i.e.,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} P(t) &= P \\ \lim_{t\to\infty} K(t) &= K = PC^T R^{-1} \end{aligned}\right\} \forall P(0) = P^T(0) \geq 0. \qquad (7.7.32)$$

(iii) Il risultante filtro di Kalman stazionario (a guadagno costante)

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + b(t) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right] \qquad (7.7.33)$$

è un osservatore asintotico, i.e., la matrice $A - KC$ ha tutti gli autovalori con parte reale negativa ($Re\,(\lambda) < 0, \forall \lambda \in sp(A - KC)$).

(iv) Il filtro di Kalman stazionario (7.7.33) è il miglior, nel senso MMSE, osservatore a guadagno costante per il sistema (7.7.29)-(7.7.30). □

Esempio (Sistema del primo ordine) - Si consideri il sistema a tempo-continuo del primo ordine

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + w(t) \\ y(t) &= x(t) + v(t) \\ w(t) &= swn(0, q \geq 0) \\ v(t) &= swn(0, r > 0) \end{aligned}\right. \qquad (7.7.34)$$

che risulta osservabile e, se $q > 0$, anche raggiungibile. Pertanto, il sistema è rilevabile e, se $q > 0$ oppure $q = 0$ e $a < 0$, anche stabilizzabile. L'equazione algebrica di Riccati (7.7.26), con P scalare, fornisce

$$2aP + q - \frac{P^2}{r} = 0 \tag{7.7.35}$$

da cui si ricava, dopo semplici passaggi, la seguente equazione di secondo grado in P:

$$P^2 - 2arP - qr = 0 \tag{7.7.36}$$

che ammette le seguenti due soluzioni

$$\begin{aligned} P_{1,2} &= ar \pm \sqrt{a^2 r^2 + qr} \quad \text{se } q > 0 \\ P_1 &= 0, P_2 = 2ar \qquad\quad \text{se } q = 0. \end{aligned}$$

Pertanto se $q > 0$, sistema osservabile e raggiungibile, la ARE ammette una unica soluzione non-negativa

$$P = P_1 = ar + \sqrt{a^2 r^2 + qr} > 0 \tag{7.7.37}$$

Il corrispondente guadagno di Kalman in (7.7.32) è dato da

$$K = a + \sqrt{a^2 + q/r} \tag{7.7.38}$$

ed il filtro di Kalman-Bucy stazionario risultante è descritto dall'equazione differenziale

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\sqrt{a^2 + q/r}\ \hat{x}(t) + \left(a + \sqrt{a^2 + q/r}\right) y(t) \tag{7.7.39}$$

con dinamica dell'errore di stima

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\sqrt{a^2 + q/r}\ \tilde{x}(t) + w(t) - \left(a + \sqrt{a^2 + q/r}\right) v(t) \tag{7.7.40}$$

che risulta esponenzialmente stabile in quanto $\alpha = -\sqrt{a^2 + q/r} < 0$ qualunque siano $a \in \mathbb{R}$, $q > 0$ e $r > 0$. Nel caso in cui $q = 0$ e $a < 0$ (sistema non raggiungibile ma stabilizzabile), l'unica soluzione non-negativa della ARE (7.7.36) è $P = P_1 = 0$ che corrisponde allo stimatore in catena aperta

$$\dot{\hat{x}}(t) = a\hat{x}(t).$$

Se, viceversa, $q = 0$ ma $a > 0$ (sistema non stabilizzabile) la soluzione $P = P_1 = 0$ fornisce uno stimatore instabile, i.e. con errore di stima che cresce esponenzialmente in accordo a $\dot{\tilde{x}}(t) = a\tilde{x}(t)$. Al contrario, l'altra soluzione $P = P_2 = 2ar > 0$ è positiva e fornisce uno stimatore

$$\dot{\hat{x}}(t) = -a\hat{x}(t) + 2ay(t)$$

esponenzialmente stabile con errore di stima che evolve in accordo a

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -a\tilde{x}(t) - 2av(t).$$

In questo esempio è possibile risolvere analiticamente l'equazione differenziale di Riccati (7.7.25) che risulta

$$\dot{P}(t) = \frac{dP}{dt}(t) = 2aP(t) + q - \frac{P^2(t)}{r}.$$

Infatti, procedendo mediante separazione delle variabili P e t, si ha:

$$\frac{dP}{P^2 - 2arP - qr} = -\frac{dt}{r}$$

da cui

$$\frac{dP}{(P - P_1)(P - P_2)} = -\frac{dt}{r} \tag{7.7.41}$$

dove $P_1 = ar + \sqrt{a^2r^2 + qr}$ e $P_2 = ar - \sqrt{a^2r^2 + qr}$ sono le due radici della ARE (7.7.36). Effettuando uno sviluppo in fratti semplici a primo membro di (7.7.41) ed integrando ambo i membri, si ottiene

$$\int_{P(0)}^{P(t)} \frac{1}{P_1 - P_2} \left[\frac{1}{P - P_1} - \frac{1}{P - P_2} \right] dP = -\int_0^t \frac{dt}{r}$$

da cui

$$\frac{1}{P_1 - P_2} \left[\log(P - P_1) - \log(P - P_2) \right]_{P(0)}^{P(t)} = -\frac{t}{r}$$

che, a sua volta, implica

$$\log \left[\frac{P(t) - P_1}{P(t) - P_2} \, \frac{P(0) - P_2}{P(0) - P_1} \right] = -\frac{P_1 - P_2}{r} \, t. \tag{7.7.42}$$

Posto

$$\beta \triangleq \frac{P_1 - P_2}{r} = 2\sqrt{a^2 + q/r} > 0$$

ed esponenziando ambo i membri di (7.7.42), si ottiene

$$\frac{P(t) - P_1}{P(t) - P_2} \, \frac{P(0) - P_2}{P(0) - P_1} = e^{-\beta t}$$

da cui, con semplici calcoli, si ha

$$P(t) = \frac{[P(0) - P_2]P_1 - [P(0) - P_1]P_2 \, e^{-\beta t}}{[P(0) - P_2] - [P(0) - P_1] \, e^{-\beta t}}. \tag{7.7.43}$$

Si noti che la soluzione soddisfa la condizione iniziale $P(0)$ per $t = 0$ ed inoltre

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_1, \ \ \forall P(0) \geq 0,$$

ovvero, a conferma della teoria, la soluzione dell'equazione differenziale di Riccati converge, qualunque sia la condizione iniziale, all'unica soluzione positiva P_1 dell'equazione algebrica di Riccati. □

Esempio (Sistema del secondo ordine) - Si consideri il sistema a tempo-continuo del secondo ordine

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= & ax_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= & bx_1(t) + w(t) \\ y(t) &= & x_1(t) + v(t) \\ w(t) &= & swn(0, q) \\ v(t) &= & swn(0, r) \end{cases}$$

con $a \neq 0$, $q > 0$, $r > 0$. Si noti che le matrici A, D, C, Q, R sono le stesse che in (7.6.18) per cui risultano soddisfatte le condizioni di osservabilità e raggiungibilità. Definita la matrice di covarianza

$$P \ = \ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix},$$

che deve soddisfare le condizioni di non-negatività $\alpha \geq 0$ e $\alpha\gamma - \beta^2 \geq 0$ (criterio di Sylvester), si ottiene la seguente equazione algebrica di Riccati:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{0} &= \underbrace{\begin{bmatrix} a\beta & a\gamma \\ b\alpha & b\beta \end{bmatrix}}_{AP} + \underbrace{\begin{bmatrix} a\beta & b\alpha \\ a\gamma & b\beta \end{bmatrix}}_{PA^T} - \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{PC^T} \underbrace{\frac{1}{r}}_{R^{-1}} \underbrace{[\alpha \ \ \beta]}_{CP} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}}_{DQD^T} \\ &= \begin{bmatrix} 2a\beta & a\gamma + b\alpha \\ a\gamma + b\alpha & 2b\beta \end{bmatrix} - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.7.44}$$

da cui si deducono le seguenti tre equazioni scalari

$$2a\beta - \frac{\alpha^2}{r} \ = \ 0 \tag{7.7.45}$$

$$a\gamma + b\alpha - \frac{\alpha\beta}{r} \ = \ 0 \tag{7.7.46}$$

$$2b\beta + q - \frac{\beta^2}{r} \ = \ 0 \tag{7.7.47}$$

da risolvere rispetto alle tre incognite scalari $\alpha \geq 0$, β, γ tali che $\alpha\gamma - \beta^2 \geq 0$. In particolare, da (7.7.47) si deduce l'equazione di secondo grado in β

$$\beta^2 - 2br\beta - qr = 0 \implies \beta = br \pm \sqrt{b^2r^2 + qr}. \tag{7.7.48}$$

Poiché (7.7.45) implica $\alpha^2 = 2ar\beta$, risulta che β deve avere lo stesso segno di a e quindi, da (7.7.48), si ha

$$\beta = \begin{cases} br + \sqrt{b^2r^2 + qr}, & \text{se } a > 0 \\ br - \sqrt{b^2r^2 + qr}, & \text{se } a < 0. \end{cases} \tag{7.7.49}$$

Conseguentemente si ricavano

$$\alpha = \sqrt{2ar\beta} > 0 \tag{7.7.50}$$

$$\gamma = \alpha \left(\frac{\beta}{ar} - \frac{b}{a} \right). \tag{7.7.51}$$

Si noti che

$$\alpha\gamma = \alpha^2 \left(\frac{\beta}{ar} - \frac{b}{a} \right) = 2ar\beta \left(\frac{\beta}{ar} - \frac{b}{a} \right) = 2\beta^2 - 2br\beta = \beta^2 + \beta^2 - 2br\beta = \beta^2 + qr > \beta^2$$

dove si è tenuto conto di (7.7.48), (7.7.50) e (7.7.51). Pertanto, $\alpha\gamma - \beta^2 = qr > 0$ per cui (7.7.49)-(7.7.51) forniscono la desiderata soluzione definita positiva dell'equazione algebrica di Riccati, a cui corrisponde il guadagno di Kalman

$$K = PC^T R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{r} \\ \frac{\beta}{r} \end{bmatrix} \tag{7.7.52}$$

ed il filtro stazionario di Kalman-Bucy

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = -\frac{\alpha}{r}\,\hat{x}_1(t) + a\,\hat{x}_2(t) + \frac{\alpha}{r}\,y(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \left(b - \frac{\beta}{r} \right)\,\hat{x}_1(t) + \frac{\beta}{r}\,y(t) \end{cases} \tag{7.7.53}$$

con dinamica dell'errore di stima

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1(t) = -\frac{\alpha}{r}\,\tilde{x}_1(t) + a\,\tilde{x}_2(t) - \frac{\alpha}{r}\,v(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) = \left(b - \frac{\beta}{r} \right)\,\tilde{x}_1(t) + w(t) - \frac{\beta}{r}\,v(t) \end{cases}. \tag{7.7.54}$$

Si noti che la matrice $A - KC$ ha polinomio caratteristico

$$\chi_{A-KC}(s) = s^2 + \frac{\alpha}{r}s + a\left(\frac{\beta}{r} - b \right) \tag{7.7.55}$$

dove

$$\frac{\alpha}{r} > 0, \quad a\left(\frac{\beta}{r} - b \right) = a\,sgn(a)\,\sqrt{b^2 + q/r} = |a|\,\sqrt{b^2 + q/r} > 0.$$

Quindi, il polinomio caratteristico (7.7.55) ha tutti i coefficienti positivi e, per la regola dei segni di Cartesio, entrambe le radici con parte reale negativa. Questo conferma la stabilità esponenziale del filtro di Kalman-Bucy stazionario qualunque siano i valori di $a \neq 0, b \in \mathbb{R}, q > 0, r > 0$. □

7.8 Filtro di Kalman ibrido

La situazione più frequentemente incontrata nelle applicazioni della stima dello stato è quella di avere un sistema a tempo-continuo ($t \in \mathbb{R}$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f\left(t, x(t), w(t)\right) \\ y(t) & = & h\left(t, x(t), v(t)\right) \end{array} \right. \tag{7.8.1}$$

e misure discrete

$$y_k \; = \; y\left(t_k\right) \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots \tag{7.8.2}$$

acquisite campionando l'uscita $y(t)$ agli istanti $t_1 < t_2, < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$. In questo caso, la stima dello stato può essere ottenuta alternando passi di correzione agli istanti di campionamento t_k e passi di predizione negli intervalli $[t_k, t_{k+1}]$ fra due istanti di campionamento successivi.

Se il sistema (7.8.1) è lineare, ovvero della forma (7.7.1)-(7.7.2), e si assume che, prima di acquisire l'osservazione $y_k = y(t_k)$, si dispone di una stima $\hat{x}_{k|k-1}$di $x(t_k)$ basata sulle osservazioni $y_{1:k-1} = \{y(t_1), \ldots, y(t_{k-1})\}$ e della relativa covarianza $P_{k|k-1}$, il suddetto metodo porta al seguente algoritmo ricorsivo.

Filtro di Kalman ibrido (sistema tempo-continuo e misure discrete)

Dati: matrici $A(t), C(t), D(t), Q(t), R(t)$; stima a priori $\hat{x}_{1|0}$ di $x(t_1)$ e relativa covarianza a priori $P_{1|0}$;
Per $k = 1, 2, \ldots$
Correzione (all'istante t_k):

$$\begin{array}{rcll} y_k & = & y(t_k) & \%\ \textit{acquisizione della misura} \\ C_k & = & C(t_k) & \\ R_k & = & R(t_k) & \\ S_k & = & R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^T & \%\ \textit{covarianza dell'innovazione} \\ L_k & = & P_{k|k-1} C_k^T S_k^{-1} & \%\ \textit{guadagno di correzione} \\ e_k & = & y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} & \%\ \textit{innovazione} \\ \hat{x}_{k|k} & = & \hat{x}_{k|k-1} + L_k e_k & \%\ \textit{correzione della stima} \\ P_{k|k} & = & P_{k|k-1} - L_k S_k L_k^T & \%\ \textit{correzione della covarianza} \\ & = & \left(I - L_k C_k\right) P_{k|k-1} \left(I - L_k C_k\right)^T + L_k R_k L_k^T & \end{array}$$

Predizione (nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$):
Risolvi, nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, l'equazione differenziale vettoriale

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{7.8.3}$$

con condizione iniziale $x(t_k) = \hat{x}_{k|k}$ e poni $\hat{x}_{k+1|k} = x(t_{k+1})$.
Risolvi, nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, l'equazione differenziale matriciale di Lyapunov

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + D(t)Q(t)D^T(t) \tag{7.8.4}$$

con condizione iniziale $P(t_k) = P_{k|k}$ e poni $P_{k+1|k} = P(t_{k+1})$. □

Si noti che il passo di correzione del filtro di Kalman ibrido è uguale a quello del filtro di Kalman a tempo-discreto con equazione di misura $y_k = C_k x_k + v_k$ dove $y_k = y(t_k), C_k = C(t_k), R_k = var(v_k) = R(t_k)$. Viceversa, il passo di predizione equivale alla propagazione, in assenza di misure, di media e covarianza del sistema a tempo-continuo (7.7.1)-(7.7.2) nell'intervallo temporale $[t_k, t_{k+1})$. Si ricorda che (7.8.3) ha soluzione

$$\hat{x}_{k+1|k} \;=\; \Phi\left(t_{k+1}, t_k\right) \hat{x}_{k|k} + \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi\left(t_{k+1}, \sigma\right) b(\sigma) d\sigma}_{b_k} \tag{7.8.5}$$

dove $\Phi(\cdot,\cdot)$ è una matrice fondamentale dell'equazione differenziale omogenea $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ definita mediante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi(t_k, t_k) & = & I \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_k) \overset{\triangle}{=} \dot{\Phi}(t, t_k) & = & A(t)\Phi(t, t_k), \qquad \forall t \in [t_k, t_{k+1}]\,. \end{array} \right. \tag{7.8.6}$$

Analogamente (7.7.1) ha soluzione

$$x\left(t_{k+1}\right) \;=\; \Phi\left(t_{k+1}, t_k\right) x\left(t_k\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi\left(t_{k+1}, \sigma\right) b(\sigma) d\sigma + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi\left(t_{k+1}, \sigma\right) D(\sigma) w(\sigma).d\sigma \tag{7.8.7}$$

Sottraendo (7.8.5) da (7.8.7) e definendo

$$\tilde{x}_{k+1|k} = x(t_{k+1}) - \hat{x}_{k+1|k}, \quad \tilde{x}_{k|k} = x(t_k) - \hat{x}_{k|k}$$

si ottiene

$$\tilde{x}_{k+1|k} = \Phi(t_{k+1}, t_k)\tilde{x}_{k|k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi\left(t_{k+1}, \sigma\right) D(\sigma) w(\sigma) \tag{7.8.8}$$

da cui

$$P_{k+1|k} \stackrel{\triangle}{=} E\left[\tilde{x}_{k+1|k}\,\tilde{x}^T_{k+1|k}\right] = \Phi(t_{k+1},t_k)\,P_{k|k}\,\Phi^T(t_{k+1},t_k) + \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},\sigma)D(\sigma)Q(\sigma)D^T(\sigma)\Phi^T(t_{k+1},\sigma)d\sigma}_{Q_k} \tag{7.8.9}$$

Pertanto, se si dispone della matrice di transizione dello stato $\Phi(\cdot, t_k)$ ottenuta mediante integrazione di (7.8.6), la predizione può essere effettuata tramite (7.8.5) e (7.8.9). In generale, $\Phi(\cdot, t_k)$ non è ottenibile analiticamente ed occorre risolvere (7.8.6), nonché gli integrali in (7.8.5) e (7.8.9), numericamente. Se, viceversa, $A(t) \equiv A$ è costante in $[t_k, t_{k+1})$, la matrice di transizione coincide con l'esponenziale di matrice $\Phi(t,\sigma) = e^{A(t-\sigma)}$ da cui

$$A_k \stackrel{\triangle}{=} \Phi(t_{k+1},t_k) = e^{AT_k}, \qquad T_k \stackrel{\triangle}{=} t_{k+1} - t_k. \tag{7.8.10}$$

Se anche $D(t) \equiv D, Q(t) \equiv Q, b(t) \equiv b(t_k)$ sono costanti in $[t_k, t_{k+1})$ si ha:

$$b_k = \left[\int_0^{T_k} e^{Ar} dr\right] b(t_k), \quad Q_k = \int_0^{T_k} e^{Ar} DQD^T e^{A^T r} dr \tag{7.8.11}$$

Riassumendo, nel caso di sistema a tempo-continuo

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) &=& Ax(t) + b(t) + Dw(t) \\ b(t) &=& b(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \\ w(t) &=& swn(0,Q) \\ y(t) &=& C(t)x(t) + v(t) \\ v(t) &=& wn(0,R(t)) \end{array} \tag{7.8.12}$$

con A e D costanti, disturbo di processo stazionario, ingresso deterministico $b(\cdot)$ mantenuto costante nell'intervallo di campionamento, il filtro di Kalman ibrido si riduce al filtro di Kalman tempo-discreto per il sistema (7.1.3)-(7.1.4) con

$$\begin{array}{l} A_k = e^{AT_k}, T_k = t_{k+1} - t_k, b_k = \left[\int_0^{T_k} e^{Ar} dr\right] b(t_k), D_k = I, Q_k = \int_0^{T_k} e^{Ar} DQD^T e^{A^T r} dr, \\ y_k = y(t_k), C_k = C(t_k), R_k = R(t_k). \end{array} \tag{7.8.13}$$

7.9 Dualità fra regolatore ottimo LQ e filtro di Kalman

In questo paragrafo si vuole mettere in evidenza la corrispondenza algebrica esistente fra i seguenti due problemi:

- sintesi dell'osservatore ottimo a *minimo errore quadratico medio* (MMSE), noto anche come filtro di Kalman, trattata in questo capitolo;

- sintesi del regolatore ottimo *lineare quadratico* (LQ), di norma affrontata nei corsi di *Sistemi di Controllo/Controlli Automatici.*

Tale corrispondenza, più propriamente detta *dualità*, verrà evidenziata per semplicità facendo riferimento al caso stazionario (tempo-invariante) sebbene essa valga anche nel caso non-stazionario (tempo-variante). In realtà, la dualità esistente fra problemi di stima e problemi di controllo si estende oltre anche a sistemi non lineari.

Di seguito, si richiama brevemente il problema di regolazione ottima *lineare-quadratica* (LQ) stazionaria. Dato il sistema *lineare tempo-invariante* (LTI)

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

l'obiettivo è determinare l'ingresso di controllo u_k per $k = 0, 1, 2, \ldots$ in modo da minimizzare il *costo quadratico*

$$J\left(x_0, u_{0:\infty}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k$$

dove $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$ sono opportune matrici di peso. La soluzione di tale problema, ben nota dai corsi di *sistemi di controllo*, è la seguente legge di controllo a retroazione LTI statica dello stato

$$u_k = Fx_k$$

con guadagno di retroazione

$$F = -\left(R + B^T P B\right) B^T P A \tag{7.9.1}$$

dove $P = P^T \geq 0$ è soluzione dell'*equazione algebrica di Riccati* (ARE)

$$P = A^T P A + Q - A^T P B \left(R + B^T P B\right)^{-1} B^T P A. \tag{7.9.2}$$

Inoltre, il costo minimo risulta

$$\min_{u_{0:\infty}} J\left(x_0, u_{0:\infty}\right) \;=\; x_0^T P x_0.$$

Confrontando (7.9.1)-(7.9.2) con il guadagno del filtro di Kalman stazionario

$$K = APC^T\left(R + CPC^T\right)^{-1}$$

e la corrispondente ARE (7.6.6), risulta evidente la corrispondenza matematica fra le soluzioni dei due problemi (regolatore LQ ed osservatore MMSE stazionari).

In riferimento al regolatore LQ stazionario, si introducono le seguenti notazioni

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{LQ}(A,B,C;R) &= -\left(R + B^T P B\right)^{-1} B^T P A \\
\mathcal{R}_{LQ}(A,B,C;R) &= P
\end{aligned}$$

dove $P = P^T \geq 0$ è l'unica soluzione simmetrica semi-definita positiva della ARE (7.9.2) con $Q = C^T C$. In altri termini, $\mathcal{G}_{LQ}(\cdot,\cdot,\cdot;\cdot)$ e $\mathcal{R}_{LQ}(\cdot,\cdot,\cdot;\cdot)$ forniscono rispettivamente il guadagno ottimo F e la matrice di costo minimo P del regolatore LQ stazionario in funzione delle matrici A, B, C, R dove la matrice C è tale che $C^T C = Q$.

In modo analogo, per il filtro di Kalman stazionario si introducono

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{KF}(A,B,C;R) &= APC^T \left(R + CPC^T\right)^{-1} \\
\mathcal{R}_{KF}(A,B,C;R) &= P
\end{aligned}$$

dove $P = P^T \geq 0$ è l'unica soluzione simmetrica semi-definita positiva della ARE (7.6.6) con $DQD^T = BB^T$. Quindi, $\mathcal{G}_{KF}(\cdot,\cdot,\cdot;\cdot)$ e $\mathcal{R}_{KF}(\cdot,\cdot,\cdot;\cdot)$ forniscono rispettivamente il guadagno di Kalman K e la matrice di covarianza P del predittore di Kalman stazionario in funzione delle matrici A, B, C, R dove la matrice B è tale che $BB^T = DQD^T$.

Il seguente risultato formalizza in modo rigoroso la dualità esistente fra regolatore LQ e filtro (più precisamente predittore) di Kalman stazionari.

Teorema (Dualità fra filtro di Kalman e regolatore LQ stazionari) - I problemi di filtraggio alla Kalman e di regolazione LQ sono duali nel senso delle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{KF}(A,B,C;R) &= -\mathcal{G}_{LQ}\left(A^T, C^T, B^T; R\right) \\
\mathcal{R}_{KF}(A,B,C;R) &= \mathcal{R}_{LQ}\left(A^T, C^T, B^T; R\right)
\end{aligned} \tag{7.9.3}$$

Dimostrazione - La verifica di (7.9.3) è immediata dalla tabella 7.1. □

Si noti che, definito il sistema duale $\mathcal{S}^* = \left(A^T, C^T, B^T\right)$ del sistema $S = (A, B, C)$, risulta evidente dal precedente teorema di dualità come la soluzione del problema di filtraggio alla Kalman per il sistema $\mathcal{S}$ sia riconducibile alla soluzione del problema di regolazione LQ per il sistema duale $\mathcal{S}^*$, e viceversa.

Osservatore MMSE (filtro di Kalman)	**Regolatore LQ**
sistema: $x_{k+1} = Ax_k + b_k + Dw_k$ $y_k = Cx_k + v_k$	sistema: $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$
statistiche dei rumori: $w_k = swn\left(0, Q\right), v_k = swn\left(0, R\right)$ $DQD^T = BB^T$	costo: $J\left(x_0, u_{0:\infty}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k$ $Q = C^T C$
osservatore ottimo: $\hat{x}_{k+1\|k} = A\hat{x}_{k\|k-1} + b_k + K\left(y_k - C\hat{x}_{k\|k-1}\right)$	regolatore ottimo: $u_k = Fx_k$
guadagno di Kalman: $K = APC^T\left(R + CPC^T\right)^{-1}$	guadagno del regolatore LQ: $F = -\left(R + B^T PB\right)^{-1} B^T PA$
ARE: $P = APA^T + BB^T - APC^T\left(R + CPC^T\right)^{-1} CPA^T$	ARE: $P = A^T PA + C^T C - A^T PB\left(R + B^T PB\right)^{-1} B^T PA$
MMSE: $E\left[\left(x_k - \hat{x}_{k\|k-1}\right)\left(x_k - \hat{x}_{k\|k-1}\right)^T\right] = P$	costo minimo: $\min_{u_{0:\infty}} J\left(x_0, u_{0:\infty}\right) = x_0^T P x_0$

Tabella 7.1: Dualità fra filtro di Kalman e regolatore LQ stazionari

Bibliografia

[1] R.E. Kálmán: A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, vol. 82 (series D), pp 35-45, 1960.

[2] R.E. Kálmán, R.S. Bucy: New results in linear filtering and prediction theory, *Journal of Basic Engineering*, vol. 83, no. 1, pp. 95-108, 1961.

[3] B.D.O. Anderson, J.B. Moore: *Optimal filtering*, Prentice Hall, 1979.

[4] B.D.O. Anderson, J.B. Moore: Detectability and stabilizability of time-varying discrete-time linear systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 19, no. 1, pp. 20-32, 1981.

[5] A.H. Jazwinski: *Stochastic processes and filtering theory*, Academic Press, 1970.

[6] E.W. Kamen, J.K. Su: *Introduction to optimal estimation*, Springer & Verlag, 1999.

[7] T. Södeström: *Discrete-time stochastic systems: estimation and control*, Prentice Hall, 1994.