

Complementi sul filtro di Kalman

per gli studenti del corso di
Stima e identificazione

Luigi Chisci, 5 Maggio 2020

Capitolo 1

Estensioni del filtro di Kalman

Nella sua formulazione standard, il filtro di Kalman fa riferimento ad un sistema lineare con rumori di processo e di misura a media nulla, bianchi, fra loro incorrelati ed incorrelati con lo stato iniziale. In termini matematici il modello standard è il seguente:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + b_k + D_k w_k \\ y_k = C_k x_k + v_k \end{cases} \quad (1.0.1)$$

con le assunzioni

$$E \begin{bmatrix} x_0 \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E \left\{ \begin{bmatrix} x_0 - \hat{x}_0 \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_0 - \hat{x}_0)^T, w_j^T, v_j^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k \delta_{k,j} & 0 \\ 0 & 0 & R_k \delta_{k,j} \end{bmatrix}$$

Nel seguito si vuole mostrare come in realtà queste assunzioni non siano restrittive, potendosi sempre ricondurre al caso standard mediante opportune trasformazioni e/o ridefinizioni delle variabili in gioco nel problema.

1.1 Disturbi a media non nulla

Si consideri ad esempio il sistema dinamico

$$x_{k+1} = A_k x_k + b_k + D_k \xi_k \quad (1.1.1)$$

con disturbo di processo

$$\xi_k = \bar{\xi}_k + w_k$$

dove $w_k = wn(0, Q_k)$ e il segnale deterministico $\bar{\xi}_k$ rappresenta la media di ξ_k .

Si distinguono due casi.

Se la media $\bar{\xi}_k$ è nota, ci si riconduce ad un problema di filtraggio alla Kalman standard con termine deterministico noto b_k sostituito da $b_k + D_k \bar{\xi}_k$. Questo comporta unicamente,

nelle ricorsioni del filtro di Kalman, la modifica dell'equazione di predizione dello stato con:

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k} + b_k + D_k \bar{\xi}_k.$$

Viceversa, se la media $\bar{\xi}_k$ non è nota si può pensare di stimarla, congiuntamente con lo stato del sistema, modellandola tramite una rappresentazione di stato. Ad esempio, se si ipotizza la media $\bar{\xi}_k = \bar{\xi}$ costante nel tempo, la si può modellare tramite:

$$\bar{\xi}_{k+1} = \bar{\xi}_k. \quad (1.1.2)$$

Combinando (1.1.1) con (1.1.2), ci si riconduce ad un problema di filtraggio alla Kalman standard nello stato esteso $[x_k^T, \bar{\xi}_k^T]^T$ relativamente al modello di stato

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \bar{\xi}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & D_k \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{\xi}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_k \\ 0 \end{bmatrix} w_k \\ y_k = [C_k, 0] \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{\xi}_k \end{bmatrix} + v_k \end{cases}$$

Si consideri adesso l'equazione di misura:

$$y_k = C_k x_k + \zeta_k \quad (1.1.3)$$

con disturbo di misura

$$\zeta_k = \bar{\zeta}_k + v_k$$

dove $v_k = wn(0, R_k)$ mentre il segnale deterministico $\bar{\zeta}_k$ rappresenta la media di ζ_k . Anche in riferimento al rumore di misura, si distinguono i due casi in cui la sua media sia nota oppure ignota.

Se $\bar{\zeta}_k$ è noto, ci si riconduce ad un problema di filtraggio alla Kalman standard con osservazione y_k sostituita da $y_k - \bar{\zeta}_k$. Questo comporta unicamente, nelle ricorsioni del filtro di Kalman, la modifica dell'equazione di correzione dello stato con:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + L_k [y_k - \bar{\zeta}_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}].$$

Se, viceversa, la media $\bar{\zeta}_k$ non è nota, si può pensare di stimarla, congiuntamente con lo stato del sistema, modellandola tramite una rappresentazione di stato. Ad esempio, se si ipotizza $\bar{\zeta}_k = \bar{\zeta}$ costante nel tempo, la si può modellare tramite $\bar{\zeta}_{k+1} = \bar{\zeta}_k$. In questo modo, ci si riconduce ad un problema di filtraggio alla Kalman standard nello stato esteso $[x_k^T, \bar{\zeta}_k^T]^T$ relativamente al modello di stato:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \bar{\zeta}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{\zeta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_k \\ 0 \end{bmatrix} w_k \\ y_k = [C_k, I] \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{\zeta}_k \end{bmatrix} + v_k \end{cases}$$

1.2 Disturbo di processo colorato

Un disturbo di processo colorato ω_k , può essere modellato in modo piuttosto generale tramite la rappresentazione di stato:

$$\begin{cases} x_{k+1}^\omega &= A_k^\omega x_k^\omega + D_k^\omega w_k \\ \omega_k &= C_k^\omega x_k^\omega + w_k \end{cases} \quad (1.2.1)$$

dove w_k è un rumore bianco. Ad esempio, un generico processo stocastico stazionario ω_k con spettro $\Phi_\omega(z)$ ammette, con buona approssimazione, la fattorizzazione spettrale $\Phi_\omega(z) \cong H_\omega(z) Q H_\omega^T(z^{-1})$ con $Q = Q^T > 0$ e $H_\omega(z)$ funzione di trasferimento avente poli e zeri all'interno del cerchio unitario. In tal caso, se viene scelta una realizzazione di stato $(A^\omega, D^\omega, C^\omega)$ tale che $H_\omega(z) = C^\omega(zI - A^\omega)^{-1}D^\omega + I$, ω_k ammette la rappresentazione (1.2.1) con matrici costanti $A^\omega, D^\omega, C^\omega$ e ingresso bianco $w_k = \text{swn}(0, Q)$.

Pertanto, la stima dello stato del sistema dinamico (1.1.1) con rumore di processo colorato ω_k modellato da (1.2.1), può essere ricondotta al problema di filtraggio alla Kalman standard nello stato esteso $[x_k^T, (x_k^\omega)^T]^T$ relativo al sistema dinamico:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^\omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_k & D_k C_k^\omega \\ 0 & A_k^\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_k \\ D_k^\omega \end{bmatrix} w_k \\ y_k &= [C_k, 0] \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^\omega \end{bmatrix} + v_k \end{cases} \quad (1.2.2)$$

dove il rumore di processo $w_k = \text{swn}(0, Q)$ è bianco.

1.3 Disturbi di processo e di misura correlati

Si consideri adesso il sistema (1.1.1) con disturbi di processo e di misura correlati, allo stesso istante temporale. A tale proposito, si assume:

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} [w_j^T, v_j^T] \right\} = \begin{bmatrix} Q_k & M_k \\ M_k^T & R_k \end{bmatrix} \delta_{k,j} \quad (1.3.1)$$

dove M_k rappresenta appunto la correlazione, all'istante k , fra il disturbo di processo ed il disturbo di misura. Dall'equazione di misura si deduce che $y_k - C_k x_k - v_k = 0$. Pertanto l'equazione di stato può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + b_k + D_k [w_k + T_k (y_k - C_k x_k - v_k)] \\ &= (A_k - D_k T_k C_k) x_k + b_k + D_k T_k y_k + D_k \underbrace{(w_k - T_k v_k)}_{\bar{w}_k} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

dove la matrice T_k è arbitraria. Si può pertanto cercare di sfruttare l'arbitrarietà di T_k per de-correlare il disturbo di processo $\bar{w}_k \triangleq w_k - T_k v_k$ con il disturbo di misura v_k , ovvero per imporre

$$E [\bar{w}_k v_k^T] = E [(w_k - T_k v_k) v_k^T] = E [w_k v_k^T] - T_k E [v_k v_k^T] = M_k - T_k R_k = 0$$

da cui si ricava

$$T_k = M_k R_k^{-1}. \quad (1.3.3)$$

Con questa scelta di T_k , si ottiene da (1.3.2) il modello di stato

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \bar{A}_k x_k + b_k + D_k M_k R_k^{-1} y_k + D_k \bar{w}_k \\ y_k &= C_k x_k + v_k \end{cases}$$

con:

- disturbo di processo \bar{w}_k incorrelato con il disturbo di misura v_k e di varianza $\bar{Q}_k \triangleq Q_k - M_k R_k^{-1} M_k^T$;
- matrice di transizione dello stato $\bar{A}_k \triangleq A_k - D_k M_k R_k^{-1} C_k$;
- termine deterministico noto $b_k + D_k M_k R_k^{-1} y_k$ al posto di b_k .

In questo modo, il problema di filtraggio alla Kalman per disturbi correlati è stato ricondotto al problema standard (con disturbi incorrelati) con le quantità:

$$\begin{aligned} \bar{A}_k &\triangleq A_k - D_k M_k R_k^{-1} C_k \\ \bar{b}_k &\triangleq b_k + D_k M_k R_k^{-1} y_k \\ \bar{Q}_k &\triangleq Q_k - M_k R_k^{-1} M_k^T \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

al posto di A_k, b_k, Q_k del problema originario. Con sviluppi semplici anche se un pò lunghi, si può verificare che l'algoritmo di filtraggio alla Kalman per rumori correlati risultante assume la forma:

$$\begin{aligned} \text{Per } k &= 1, 2, \dots \\ S_k &= R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^T \\ K_k &= (A_k P_{k|k-1} C_k^T + D_k M_k) S_k^{-1} \\ e_k &= y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{x}_{k+1|k} &= A_k \hat{x}_{k|k-1} + b_k + K_k e_k \\ P_{k+1|k} &= A_k P_{k|k-1} A_k^T + D_k Q_k D_k^T - K_k S_k K_k^T \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

in cui l'unica differenza, rispetto all'algoritmo standard, risiede nella formula di calcolo del guadagno di Kalman K_k dove compare il termine aggiuntivo $D_k M_k$. Si noti che tale termine risulta nullo nel caso di rumori incorrelati, cioè $M_k = 0$, per cui l'algoritmo (1.3.5) generalizza il filtro di Kalman alla possibile presenza di rumori correlati.

1.4 Disturbo di misura colorato

Si consideri adesso, analogamente a quanto fatto per il disturbo di processo, un disturbo di misura colorato v_k modellato tramite il seguente modello alle innovazioni:

$$\begin{cases} x_{k+1}^v &= A_k^v x_k^v + D_k^v e_k \\ v_k &= C_k^v x_k^v + e_k \end{cases} \quad (1.4.1)$$

dove e_k è un rumore bianco, i.e. $e_k = wn(0, \Sigma_k^e)$. Anche in questo caso, si può riformulare il problema di stima dello stato rispetto allo stato esteso $[x_k^T, (x_k^v)^T]^T$. Si ottiene in questo modo il seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_k & 0 \\ 0 & D_k^v \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} w_k \\ e_k \end{bmatrix}}_{\xi_k} \\ y_k = [C_k, C_k^v] \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^v \end{bmatrix} + e_k \end{cases} \quad (1.4.2)$$

in cui si può riscontrare che il rumore di processo $\xi_k \triangleq [w_k^T, e_k^T]^T$ è correlato con il rumore di misura e_k ; infatti, risulta

$$E [\xi_k e_k^T] = E \begin{bmatrix} w_k e_k^T \\ e_k e_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_k^e \end{bmatrix} \neq 0$$

dove Σ_k^e è la matrice di covarianza di e_k . Pertanto si può risolvere il problema di filtraggio alla Kalman in presenza di disturbo di misura colorato riconducendosi all'approccio relativo a disturbi correlati esposto nel precedente paragrafo.

Capitolo 2

Predizione e regolarizzazione

Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t + \mathbf{D}_t \mathbf{w}_t \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \end{cases} \quad (2.0.1)$$

con le solite ipotesi statistiche standard sui disturbi \mathbf{w}_t e \mathbf{v}_t . Il problema della stima dello stato \mathbf{x}_t basata sulle osservazioni $\mathbf{y}^k \triangleq \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ prende il nome di

$$\begin{cases} \text{predizione} & \text{se } t > k \\ \text{filtraggio} & \text{se } t = k \\ \text{regolarizzazione (smoothing)} & \text{se } t < k \end{cases}$$

Il filtro di Kalman propriamente detto determina, in modo ricorsivo, ad ogni istante temporale t sia la stima filtrata $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ che la stima predittiva ad un passo $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$.

2.1 Predizione

Ci si concentra adesso sul problema della predizione, ovvero della determinazione della stima $\hat{\mathbf{x}}_{t|k}$ e della relativa covarianza $\mathbf{P}_{t|k}$ per $t > k$. Esistono, in particolare, tre tipologie di predizione alle quali si può essere interessati:

- **Predizione a punto fisso:** si vuole determinare $\hat{\mathbf{x}}_{t|k}$ e $\mathbf{P}_{t|k}$, fissato t e partendo da $j < t$, per $k = j, j + 1, \dots, t - 1$;
- **Predizione ad intervallo fisso:** si vuole determinare $\hat{\mathbf{x}}_{t|k}$ e $\mathbf{P}_{t|k}$, fissato k , per $t = k + 1, k + 2, \dots$;
- **Predizione ad anticipo fisso:** si vuole determinare $\hat{\mathbf{x}}_{t+\ell|t}$ e $\mathbf{P}_{t+\ell|t}$, fissato l'anticipo $\ell > 0$, per ogni $t > 0$.

Predizione a punto fisso

Definendo la matrice di transizione dello stato

$$\Phi_{t,k} \triangleq \mathbf{A}_{t-1} \cdots \mathbf{A}_k = \Phi_{t,k+1} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{t-1} \Phi_{t-1,k}$$

è immediato constatare che

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|k} = \Phi_{t,k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \sum_{i=k}^{t-1} \Phi_{t,i+1} \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i = \Phi_{t,k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \sum_{i=k+1}^{t-1} \Phi_{t,i+1} \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t|k+1} &= \Phi_{t,k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} + \sum_{i=k+1}^{t-1} \Phi_{t,i+1} \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \\ &= \Phi_{t,k+1} (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{L}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}) + \sum_{i=k+1}^{t-1} \Phi_{t,i+1} \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{t|k} + \Phi_{t,k+1} \mathbf{L}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \end{aligned}$$

Per la covarianza si ha:

$$\mathbf{P}_{t|k+1} \triangleq E [\tilde{\mathbf{x}}_{t|k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{t|k+1}^T] = \mathbf{P}_{t|k} - \Phi_{t,k+1} \mathbf{L}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{L}_{k+1}^T \Phi_{t,k+1}^T$$

dove $\mathbf{L}_{k+1} \triangleq \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_{k+1}^T \mathbf{S}_{k+1}^{-1}$ è il guadagno di correzione del filtro di Kalman e $\mathbf{S}_{k+1} \triangleq \mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_{k+1}^T$ la matrice di covarianza dell'innovazione $\mathbf{e}_{k+1} \triangleq \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$. Riassumendo, si hanno dunque le seguenti ricorsioni del predittore a punto fisso:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{t|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{t|k} + \Phi_{t,k+1} \mathbf{L}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\ \mathbf{P}_{t|k+1} = \mathbf{P}_{t|k} - \Phi_{t,k+1} \mathbf{L}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{L}_{k+1}^T \Phi_{t,k+1}^T \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Predizione ad intervallo fisso

Per la predizione ad intervallo fisso si nota che:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|k} = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|k} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t \\ \mathbf{P}_{t+1|k} = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t|k} \mathbf{A}_t^T + \mathbf{D}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{D}_t^T \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Predizione ad anticipo fisso

Combinando in sequenza il passo di predizione (2.1.2) ed il passo di correzione (2.1.1) si ottengono le ricorsioni di aggiornamento della predizione ad anticipo $\ell \triangleq t - k$ fisso:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|k+1} = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|k} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t + \Phi_{t+1|k+1} \mathbf{L}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1} \\ \mathbf{P}_{t+1|k+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t|k} \mathbf{A}_t^T + \mathbf{D}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{D}_t^T - \Phi_{t+1|k+1} \mathbf{L}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{L}_{k+1}^T \Phi_{t+1|k+1}^T \end{cases} \quad (2.1.3)$$

2.2 Regularizzazione

Ci si concentra adesso sul problema della regularizzazione (smoothing), ovvero della determinazione della stima $\hat{\mathbf{x}}_{t|k}$ e della relativa covarianza $\mathbf{P}_{t|k}$ per $t < k$. Esistono, in particolare, tre tipologie di regularizzazione alle quali si può essere interessati:

- **Regularizzazione a punto fisso:** si vuole determinare $\hat{\mathbf{x}}_{t|k}$ e $\mathbf{P}_{t|k}$, fissato t e partendo da $j > t$, per $k = j, j + 1, \dots$;
- **Regularizzazione a ritardo fisso:** si vuole determinare $\hat{\mathbf{x}}_{t|t+\ell}$ e $\mathbf{P}_{t|t+\ell}$, fissato il ritardo $\ell > 0$, per ogni $t \geq 0$;
- **Regularizzazione ad intervallo fisso:** si vuole determinare $\hat{\mathbf{x}}_{t|k}$ e $\mathbf{P}_{t|k}$, fissato $k > 0$, per $t = 0, 1, \dots, k$.

Regularizzazione a punto fisso

Un possibile approccio alla regularizzazione a punto fisso è il seguente. Si definisce lo stato esteso:

$$\mathbf{s}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\xi}_k \end{bmatrix}$$

dove $\boldsymbol{\xi}_k \triangleq \mathbf{x}_t$ rappresenta lo stato all'istante t , obiettivo della regularizzazione. Poiché $\mathbf{s}_{k+1} = [\mathbf{x}_{k+1}^T, \boldsymbol{\xi}_{k+1}^T]^T = [\mathbf{x}_{k+1}^T, \mathbf{x}_t^T]^T$, è immediato verificare le seguenti equazioni nello stato esteso:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{s}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}_k = \mathcal{A}_k \mathbf{s}_k + \mathcal{B}_k \mathbf{u}_k + \mathcal{D}_k \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = [\mathbf{C}_k \ \mathbf{0}] \mathbf{s}_k + \mathbf{v}_k = \mathcal{C}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Applicando al sistema (2.2.1) il filtro di Kalman, quest'ultimo fornisce in uscita la predizione ad un passo dello stato esteso:

$$\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k+1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|k} \end{bmatrix}$$

e la corrispondente matrice di covarianza

$$\mathbf{P}_{k+1|k} \triangleq E [\tilde{\mathbf{s}}_{k+1|k} \tilde{\mathbf{s}}_{k+1|k}^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k+1|k} & \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k}^T \\ \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k} & \mathbf{P}_{t|k} \end{bmatrix}$$

dove

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = E [\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T], \quad \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k} = [\tilde{\mathbf{x}}_{t|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T], \quad \mathbf{P}_{t|k} = [\tilde{\mathbf{x}}_{t|k} \tilde{\mathbf{x}}_{t|k}^T]$$

Pertanto, per la regolarizzazione a punto fisso si può procedere nel seguente modo. Inizialmente si applica il filtro di Kalman al sistema originario, con le misure \mathbf{y}^{t-1} e \mathbf{u}^{t-2} , per determinare $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ e $\mathbf{P}_{t|t-1}$. Successivamente si applica il filtro di Kalman al sistema esteso (2.2.1), a partire dall'istante t con la seguente inizializzazione:

$$\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{t|t-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{t|t-1} & \mathbf{P}_{t|t-1} \\ \mathbf{P}_{t|t-1} & \mathbf{P}_{t|t-1} \end{bmatrix}$$

Definendo il guadagno di Kalman relativo al sistema esteso (2.2.1)

$$\mathcal{K}_k = \mathcal{A}_k \mathcal{P}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathcal{C}_k \mathcal{P}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k \\ \bar{\mathbf{K}}_k \end{bmatrix}$$

e sfruttando la forma particolare delle matrici $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k, \mathcal{D}_k$ si ottiene il seguente algoritmo di regolarizzazione a punto fisso.

Algoritmo FPKS (Fixed-Point Kalman Smoother)

Dati $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ e $\mathbf{P}_{t|t-1}$, si procede ciclicamente come segue per $k = t, t+1, t+2, \dots$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \mathbf{R}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \\ \bar{\mathbf{K}}_k &= \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{t|k-1} + \bar{\mathbf{K}}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k} &= \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} (\mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{D}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T \\ \mathbf{P}_{t|k} &= \mathbf{P}_{t|k-1} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{S}_k \bar{\mathbf{K}}_k^T \end{aligned}$$

Regolarizzazione a ritardo fisso

Un possibile approccio alla regolarizzazione a ritardo fisso è il seguente. Si definisce lo stato esteso:

$$\mathbf{s}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{t-\ell-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(\ell+2)}$$

dove ℓ è il ritardo di regolarizzazione (in realtà, come si vedrà in seguito, è il massimo ritardo che interessa considerare). Partendo dal sistema originario, è immediato constatare

come lo stato esteso così definito evolva in accordo alle seguenti equazioni di stato

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{s}_{t+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{s}_t + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_t + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{s}_t + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t + \mathbf{D}_t \mathbf{w}_t \\ \mathbf{y}_t = [\mathbf{C}_t \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \mathbf{s}_t + \mathbf{v}_t = \mathbf{C}_t \mathbf{s}_t + \mathbf{v}_t \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

Il predittore di Kalman ad un passo associato al sistema esteso (2.2.2) assume la forma

$$\hat{\mathbf{s}}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{s}}_{t|t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{s}}_{t|t-1}) \quad (2.2.3)$$

dove

$$\hat{\mathbf{s}}_{t+1|t} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|t} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-\ell|t} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{s}}_{t|t-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-2|t-1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-\ell-1|t-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t \\ \mathbf{K}_t^{(1)} \\ \mathbf{K}_t^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_t^{(\ell+1)} \end{bmatrix}$$

Si noti, in particolare, che i due blocchi superiori di \mathbf{K}_t non sono altro che il guadagno del predittore di Kalman ad un passo \mathbf{K}_t ed il guadagno del correttore di Kalman $\mathbf{L}_t = \mathbf{K}_t^{(1)}$. Sfruttando la forma particolare della matrici di stato $\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t, \mathbf{C}_t, \mathbf{D}_t$ in (2.2.2), (2.2.3) fornisce le seguenti equazioni ricorsive:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{L}_t \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + \mathbf{K}_t^{(2)} \mathbf{e}_t \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-\ell+1|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t-\ell+1|t-1} + \mathbf{K}_t^{(\ell)} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-\ell|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t-\ell|t-1} + \mathbf{K}_t^{(\ell+1)} \mathbf{e}_t \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

che permettono di aggiornare la stima predittiva $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$, la stima filtrata $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ e le stime regolarizzate con ritardo i , $\hat{\mathbf{x}}_{t-i|t}$, per $i = 1, 2, \dots, \ell$. Si noti, in particolare, che (2.2.4) fornisce tutte le stime regolarizzate fino al ritardo massimo ℓ . Poiché la complessità computazionale per ciclo di elaborazione del filtro di Kalman è $O(n^3)$, dove n è la dimensione del vettore di stato, il regolarizzatore con ritardo $\ell > 0$ risulta avere un carico computazionale, rispetto al filtro, aumentato di un fattore moltiplicativo $O(\ell + 2)^3$.

Regolarizzazione ad intervallo fisso

La regolarizzazione ad intervallo fisso è effettuata *off-line* supponendo di avere a disposizione le osservazioni $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ sull'intervallo temporale di interesse e di volere determinare da queste le stime $\hat{\mathbf{x}}_{t|k}$ per $t = 0, 1, \dots, k$. Un modo possibile per affrontare questo problema, analogo a quello impiegato per la regolarizzazione a ritardo fissato, è quello di introdurre lo stato esteso $\mathbf{s}_t = [\mathbf{x}_t^T, \mathbf{x}_{t-1}^T, \dots, \mathbf{x}_{t-k}^T]^T$ ma, poiché solitamente k è molto grande, questo approccio risulta computazionalmente molto oneroso e difficilmente applicabile in pratica. Un metodo molto più efficiente è quello di procedere in due fasi come segue:

- nella prima fase si elaborano in avanti i dati, nell'intervallo $[0, k]$, con un filtro di Kalman memorizzando tutte le stime e relative covarianze $(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \mathbf{P}_{t|t-1})$ e $(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}, \mathbf{P}_{t|t})$ per $t = 1, 2, \dots, k$;
- nella seconda fase si rielaborano i dati all'indietro, nello stesso intervallo, utilizzando le stime e covarianze memorizzate nella prima fase.

Un algoritmo di stima che opera in questo modo è presentato in [1, pp. 334-338] ed è riportato di seguito.

Algoritmo FIKS (Fixed-Interval Kalman Smoother)

1. Date le condizioni iniziali $(\hat{\mathbf{x}}_{1|0}, \mathbf{P}_{1|0})$, si determinano ricorsivamente in avanti, mediante un filtro di Kalman, $(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \mathbf{P}_{t|t-1})$ e $(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}, \mathbf{P}_{t|t})$ per $t = 1, 2, \dots, k$.
2. Per $t = k - 1, \dots, 1, 0$ si procede all'indietro nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}}_t &= \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{A}_t^T \mathbf{P}_{t+1|t}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + \bar{\mathbf{K}}_t (\hat{\mathbf{x}}_{t+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}) \\ \mathbf{P}_{t|k} &= \mathbf{P}_{t|t} - \bar{\mathbf{K}}_t (\mathbf{P}_{t+1|t} - \mathbf{P}_{t+1|k}) \bar{\mathbf{K}}_t^T\end{aligned}$$

Capitolo 3

Applicazioni del filtro di Kalman

3.1 Sistemi di controllo

Un approccio classico al controllo dei processi si basa sulla retroazione statica dello stato, ovvero su una legge di controllo del tipo

$$u_k = g_k(x_k, r_k) \quad (3.1.1)$$

in cui l'ingresso di controllo u_k viene generato in funzione dello stato x_k del processo/impianto da controllare e di un eventuale termine di *feedforward* r_k . In molte situazioni pratiche, lo stato x_k non è completamente accessibile per la retroazione ma è disponibile una uscita y_k . Si potrebbe, dunque, utilizzare uno stimatore dello stato (e.g. filtro di Kalman, se si adotta un modello lineare del processo da controllare) che fornisca una stima dello stato $\hat{x}_{k|k}$ basata sulle osservazioni fino a k , i.e. y^k , e sugli ingressi di controllo precedenti, i.e. u^{k-1} . Lo schema di sistema di controllo risultante (vedi fig. 1) consiste di uno stimatore in serie al regolatore (3.1.1), i quali congiuntamente realizzano una retroazione dinamica dall'uscita y_k . In questo modo, la legge di controllo (3.1.1) viene sostituita da

$$u_k = g_k(\hat{x}_{k|k}, r_k) \quad (3.1.2)$$

che rimpiazza lo stato inaccessibile x_k con la sua stima $\hat{x}_{k|k}$.

3.2 Stima parametrica

Il problema statico di stima parametrica in presenza di osservazioni y_k acquisite ad istanti diversi, trattato nel capitolo 5, può essere affrontato come caso particolare del problema di stima dello stato esaminato in questo capitolo. Sia, infatti, $X \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei parametri da stimare e siano

$$y_k = h_k(X, v_k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2.1)$$

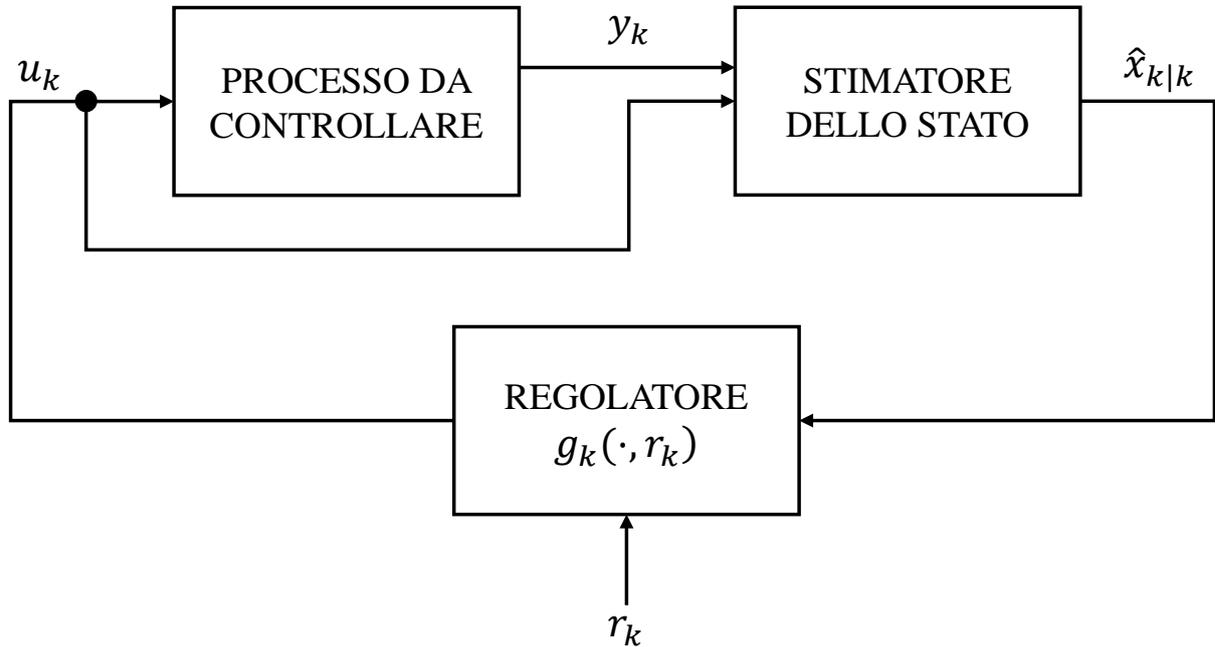


Figura 3.1: Filtro di Kalman nei sistemi di controllo

le osservazioni acquisite ad istanti discreti t_k ($t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$) ed affette da errori di misura v_k fra loro indipendenti. Definendo lo stato $x_k = X$ e considerando il modello di moto $x_{k+1} = x_k$ per tenere conto della ipotizzata tempo-invarianza del vettore dei parametri X , il problema di stima di X secondo il modello di osservazione (3.2.1) si riconduce al problema di stima dello stato per il sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k \\ y_k = h_k(x_k, v_k) \\ v_k = wn(0, R_k) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Si noti che in (3.2.2) lo stato non evolve il che equivale a considerare un modello di moto LTI $x_{k+1} = Ax_k + w_k$ con $A = I$ e $w_k = wn(0, Q = 0) \equiv 0$. In particolare, in relazione al sistema (3.2.2), il passo di predizione risulta banalmente

$$\hat{x}_{k+1|k} = \hat{x}_{k|k}, \quad P_{k+1|k} = P_{k|k} \quad (3.2.3)$$

ovvero non modifica né la stima né la covarianza. Se, inoltre, anche il modello di osservazione è lineare, i.e.,

$$\begin{aligned} y_k &= C_k x_k + v_k \\ v_k &= wn(0, R_k) \end{aligned}$$

si può procedere alla determinazione della stima ottima $\hat{x}_{k|k}$ di X basata sulle osservazioni $y^k = \{y_1, \dots, y_k\}$ mediante un filtro di Kalman che, ad ogni $k \geq 1$, effettua solo il passo

di correzione in quanto il passo di predizione (3.2.3) lascia tutto inalterato. Il lettore può immediatamente verificare che il passo di correzione del filtro di Kalman coincide con l'algoritmo sequenziale di covarianza per la stima parametrica del capitolo 5. Per tenere conto di eventuali variazioni lente nel tempo dei parametri si può modificare il loro modello di evoluzione come segue

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + w_k \\w_k &= wn(0, Q_k > 0)\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

introducendo un disturbo di processo non nullo, i.e. con covarianza $Q_k > 0$ che quantifica l'entità della variazione temporale dei parametri $x_k = X$. In questo caso, la predizione si modifica in

$$\hat{x}_{k+1|k} = \hat{x}_{k|k}, \quad P_{k+1|k} = P_{k|k} + Q_k > P_{k|k}\tag{3.2.5}$$

dove l'incertezza dovuta alla variazione temporale dei parametri si riflette in un aumento $Q_k > 0$ della matrice di covarianza. Il modello di evoluzione (3.2.4) è noto in letteratura come *random walk* (*passeggiata a caso*).

3.3 Stima del moto: tracking e navigazione

Problemi di stima di grande rilevanza pratica sono i problemi di stima del moto che normalmente si dividono in due categorie.

- *Navigazione*: stima dello stato (posa) del navigatore (veicolo/velivolo/natante autonomo oppure con pilota umano) sulla base di osservazioni fornite da sensori di bordo (e.g., lidar, telecamere, radar, sonar, GPS, sensori inerziali, etc.)
- *Tracciamento (tracking)*: stima dello stato dell'oggetto da tracciare (veicolo/velivolo/natante) ed eventualmente della sua forma/estensione/tipologia sulla base di osservazioni fornite da sensori remoti (e.g., radar attivo o passivo, sonar, telecamere, sensori wireless, microfoni, etc.).

Navigazione

Nei problemi di navigazione occorre localizzare il navigatore, stimarne l'assetto (orientazione nello spazio) e, in casi più complessi, ricostruire la mappa dell'ambiente circostante sfruttando l'informazione di uno o più sensori che si trovano a bordo del navigatore. Di norma, il navigatore è un corpo rigido di forma nota il cui stato (detto anche posa) ad un generico istante temporale t è costituito da

- coordinate ξ, η, ζ del centro di massa o di un qualunque punto di riferimento del veicolo;

- angoli di orientazione (e.g., angoli di Eulero o di imbardata-beccheggio-rollio).

Quindi, la posa 3D è, in generale, un vettore $x \in \mathbb{R}^6$. Nel seguito si considera, per semplicità, il caso di navigazione 2D (e.g. moto sulla superficie terrestre o marina, volo o immersione a quota costante). In tal caso, il navigatore ha tre gradi di libertà:

- posizione (ξ, η) del suo centro di massa;
- unico angolo di orientazione θ che indica la direzione di avanzamento del navigatore.

Modello di moto del navigatore 2D

Dal momento che nei problemi di navigazione si può presumere che il navigatore abbia accesso ai comandi (ingressi di controllo) generati dal sistema di guida, nei modelli di navigazione tali ingressi possono essere considerati come segnali deterministici noti, mentre nei problemi di tracciamento dovranno essere considerati come disturbi stocastici ignoti al tracciatore remoto. In altri termini, un generico modello di moto a tempo-discreto, eventualmente ottenuto da un modello a tempo-continuo mediante discretizzazione temporale, per il navigatore è della forma

$$x_{k+1} = F_k(x_k, u_k, w_k) = f_k(x_k, w_k) \quad (3.3.1)$$

dove: x_k è lo stato (posa) del navigatore al k -mo istante di campionamento; u_k il vettore degli ingressi di controllo; w_k il disturbo di processo che riassume l'effetto di tutte le azioni indesiderate sul moto del navigatore.

Un modello di moto classico per la navigazione 2D (vedi fig. 3.2) è il seguente *modello a unicycle*:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) &= [v(t) + \delta v(t)] \cos \theta(t) \\ \dot{\eta}(t) &= [v(t) + \delta v(t)] \sin \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t) + \delta \omega(t) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

dove:

- ξ, η, θ sono le variabili di stato (posa) del navigatore;
- v (modulo della velocità o velocità di avanzamento) e ω (velocità angolare di sterzata) sono i comandi (ingressi di controllo) noti al navigatore;
- δv e $\delta \omega$ sono disturbi che tengono delle perturbazioni degli ingressi effettivi rispetto a quelli nominali v e ω , noti al navigatore.

Definendo il vettore di stato $x = [\xi, \eta, \theta]^T \in \mathbb{R}^3$, il vettore di ingresso $u = [v, \omega]^T \in \mathbb{R}^2$ ed il disturbo di processo $w = [\delta v, \delta \omega]^T \in \mathbb{R}^2$, il modello a tempo-continuo (3.3.2) assume la forma

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [u(t) + w(t)] \quad (3.3.3)$$

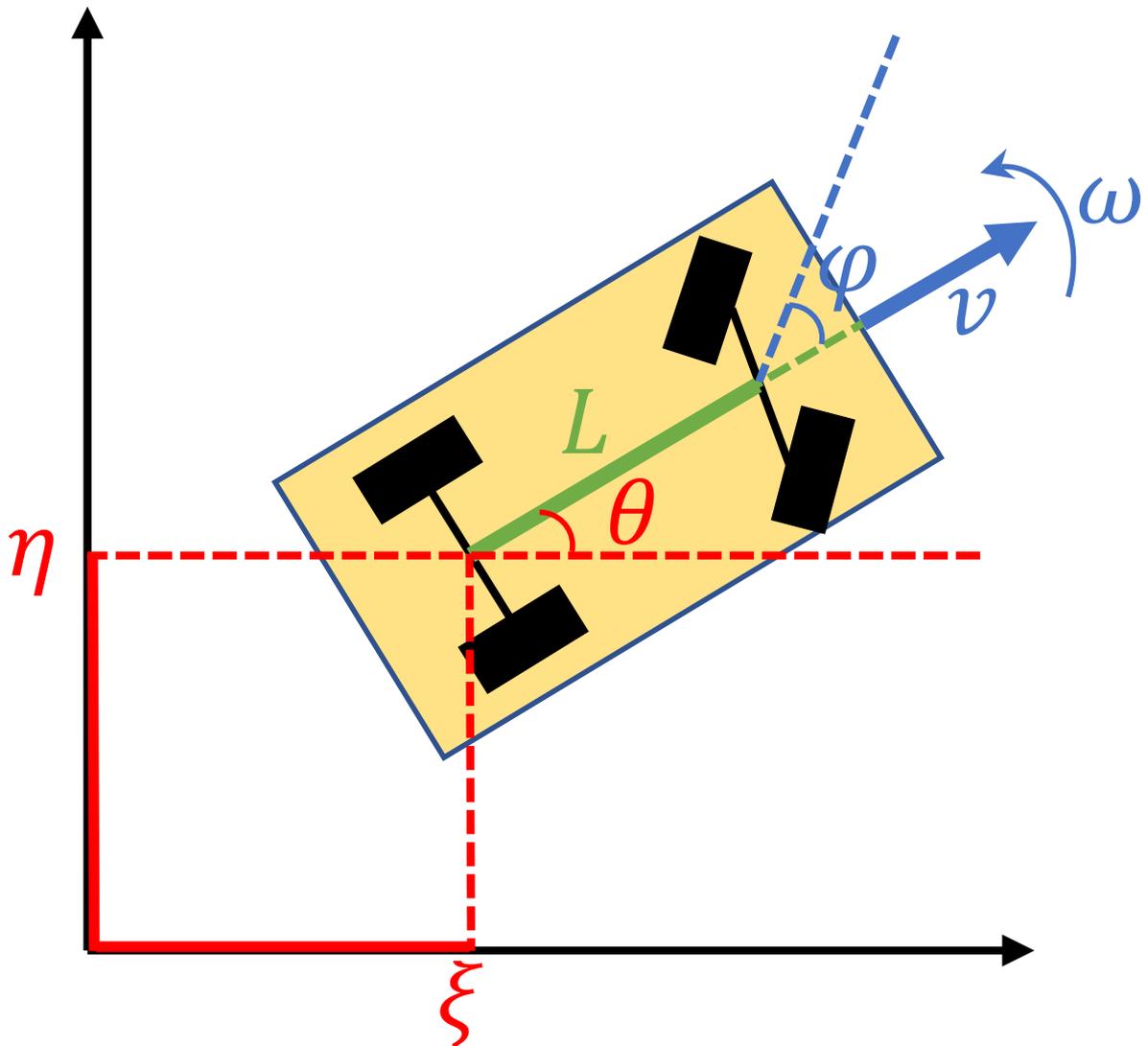


Figura 3.2: Modelli a unicycle e car-like per la navigazione 2D

che risulta essere non lineare (in quanto $\theta(t) = x_3(t)$ è una variabile di stato) e con disturbo di processo non additivo. Per ottenere un modello di moto a tempo-discreto, più conveniente ai fini della stima dello stato in presenza di osservazioni $y_k = y(t_k)$ ed ingressi di controllo $u_k = u(t_k)$ campionati, si può applicare a (3.3.3) il metodo di discretizzazione approssimato di Eulero, ottenendo

$$x_{k+1} = x_k + T_k \begin{bmatrix} \cos \theta_k & 0 \\ \sin \theta_k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (u_k + w_k) \quad (3.3.4)$$

dove $T_k \triangleq t_{k+1} - t_k$ è l'intervallo di campionamento.

Un modello di moto alternativo, detto *car-like* perché presuppone che il navigatore si comporti come un veicolo a quattro ruote di cui le due anteriori sterzanti, considera l'angolo di sterzo $\varphi(t)$ (vedi fig. 3.2) come ingresso di controllo al posto della velocità angolare $\omega(t)$. Il modello *car-like* differisce dal modello a *uniciclo* (3.3.2) soltanto nella terza equazione di stato (quella relativa all'orientazione) che si modifica in

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v(t) + \delta v(t)}{L} \tan[\varphi(t) + \delta\varphi(t)] \quad (3.3.5)$$

dove L è la distanza interasse (vedi fig. 3.2). Ridefinendo l'ingresso $u = [v, \varphi]^T$ ed il disturbo di processo $w = [\delta v, \delta\varphi]^T$, si ottiene il seguente modello di moto a tempo-continuo

$$\dot{x} = (u_1 + w_1) \begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ \frac{u_1 + w_1}{L} \tan(u_2 + w_2) \end{bmatrix} \triangleq F(x, u, w) \quad (3.3.6)$$

dal quale, mediante il metodo di Eulero, si ha il seguente modello *car-like* a tempo-discreto:

$$x_{k+1} = x_k + T_k F(x_k, u_k, w_k). \quad (3.3.7)$$

Sensori di navigazione

Esiste una gran varietà di problemi di navigazione di natura diversa a seconda dei sensori cinematici impiegati a bordo del navigatore, e.g., GPS, telecamere, sensori inerziali, radar, lidar, sonar eventualmente utilizzati in combinazione. A titolo esemplificativo, si considera la situazione particolare in cui il navigatore è dotato, a bordo, di radar che rileva la presenza di un certo numero di *punti di riferimento* (*landmark*) nell'ambiente circostante e ne misura sia la distanza che la distanza angolare. Supponendo di avere N landmark e indicando con (ξ^i, η^i) la posizione del landmark i , la rilevazione di tale landmark all'istante k fornisce l'osservazione

$$y_k^i = h(\underbrace{\xi_k, \eta_k, \theta_k}_{x_k}, \underbrace{\xi^i, \eta^i}_{x^i}) + v_k^i \quad (3.3.8)$$

con

$$h(\xi, \eta, \theta, \xi^i, \eta^i) \triangleq \begin{bmatrix} \sqrt{(\xi - \xi^i)^2 + (\eta - \eta^i)^2} \\ -\theta + \angle(\xi - \xi^i) + j(\eta - \eta^i) \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

Pertanto, all'istante k il navigatore dispone di un vettore di misura y_k che ingloba tutte le misure $y_k^i \in \mathbb{R}^2$ relative a landmark rilevati dal radar a quell'istante. Precisamente, indicando con $\mathcal{I}_k \subseteq \{1, \dots, N\}$ il sottoinsieme, di cardinalità $N_k \leq N$, dei landmark rilevati dal radar all'istante k , si ha $y_k = \text{col}\{y_k^i\}_{i \in \mathcal{I}_k} \in \mathbb{R}^{p_k}$, con $p_k = 2N_k$, ovvero y_k è il

vettore che incolonna tutti i vettori y_k^i relativi a landmark $i \in \mathcal{I}_k$. Si noti come in questo problema di stima, si ha un numero di osservazioni p_k variabile nel tempo, situazione che non comporta alcuna difficoltà nell'impiego del filtro di Kalman e di altri stimatori dello stato. Se le posizioni (ξ^i, η^i) dei landmark sono note e si conosce il landmark di provenienza di ciascuna misura y_k^i , il problema di navigazione si riduce alla stima dello stato del navigatore $x_k \in \mathbb{R}^3$, sulla base del modello di moto, e.g. (3.3.4) o (3.3.6)-(3.3.7), e delle osservazioni fornite dal modello di osservazione

$$\begin{aligned} y_k &= \text{col}\{y_k^i\}_{i \in \mathcal{I}_k} \\ y_k^i &= h^i(x_k) + v_k^i \\ h^i(x) &= h(x, \xi^i, \eta^i). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Nella pratica, è più frequente la situazione in cui gli stati (posizioni) $x^i = [\xi^i, \eta^i]^T$ dei landmark non sono noti e devono essere stimati congiuntamente con lo stato (posa) $x_k = [\xi_k, \eta_k, \theta_k]^T$ del navigatore. A tale proposito, si definisce lo stato aumentato

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^1 \\ \vdots \\ x_k^N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, n = 3 + 2N \quad (3.3.11)$$

dove, assumendo i landmark statici (non mobili), i relativi stati obbediscono al modello di moto

$$x_{k+1}^i = x_k^i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.3.12)$$

In questo caso, il problema di navigazione è ricondotto alla stima dello stato aumentato (3.3.11) basandosi sui modelli di moto disaccoppiati del navigatore, e.g. (3.3.4) o (3.3.6)-(3.3.7), e dei landmark (3.3.12) nonché sul modello di osservazione

$$\begin{aligned} y_k &= \text{col}\{y_k^i\}_{i \in \mathcal{I}_k} \\ y_k^i &= h^i(X_k) + v_k^i \\ h^i(X) &= h(x, x^i). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Questo problema di navigazione, con landmark di posizione incognita, è noto in *robotica mobile* come *simultanea localizzazione e costruzione della mappa* (in inglese: *SLAM = Simultaneous Localization And Mapping*), dove la *localizzazione* si riferisce alla stima della posa del robot mobile (navigatore) mentre per *costruzione della mappa (mapping)* si intende la rilevazione e localizzazione dei landmark presenti nell'ambiente circostante. In situazioni reali, il problema di navigazione robotica è ulteriormente complicato da:

- associazione ignota delle misure ai landmark;
- presenza di false misure, non originate da alcun landmark;

- mancata rilevazione e conseguente osservazione di landmark;
- eventuale presenza di landmark mobili;
- presenza di landmark estesi (non puntiformi), con conseguente necessità di stimarne forma ed estensione per evitare collisioni;
- presenza di più navigatori con diversi campi di vista che cooperano alla costruzione della mappa.

La considerazione di queste problematiche richiede l'utilizzo di ulteriori strumenti, in aggiunta alle tecniche di stima dello stato, e va oltre gli scopi di questo corso.

Capitolo 4

Modelli cinematici

Nei problemi di stima del moto (e.g. tracking e navigazione) si fa uso di un modello di stato del moto nella forma:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) + w_k \quad (4.0.1)$$

dove: x_k è lo stato cinematico (posizioni, velocità, ...) da stimare; u_k sono le azioni di comando (forze, coppie, ...), note solo nei problemi di navigazione; il disturbo di processo w_k modella perturbazioni casuali delle grandezze cinematiche.

4.1 Modelli cinematici lineari

Nei problemi di “tracking”, ovvero stima del moto di un oggetto da parte di un osservatore remoto, le azioni di comando non sono note ed il modello di moto (4.0.1) si riduce ad un modello cinematico

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k \quad (4.1.1)$$

In questo paragrafo si considerano modelli cinematici lineari. Assumendo per il momento che il moto sia 1-dimensionale, cioè si sviluppi in una unica dimensione, ed indicando con $p(t)$ la posizione dell’oggetto di interesse al tempo $t \in \mathbb{R}$, un modello cinematico di ordine n può essere definito nel seguente modo:

$$\mathcal{D}^n p(t) = \frac{d^n}{dt^n} p(t) = w(t) \quad (4.1.2)$$

dove $w(t) \sim (0, q)$ è un rumore bianco a media nulla e di varianza $q > 0$. Pertanto il modello (4.1.2) assume che la derivata n -esima della posizione rispetto al tempo (la velocità per $n = 1$, l’accelerazione per $n = 2$, il jerk per $n = 3$, etc.) sia un rumore bianco. Introducendo il vettore di stato n -dimensionale $x \triangleq [p, \dot{p}, \dots, \mathcal{D}^{n-1}p]^T$, (4.1.2) dà luogo

alla seguente equazione di stato lineare tempo-invariante a tempo-continuo

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_c} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_c} w(t) \quad (4.1.3)$$

Campionando (4.1.3) agli istanti t_k , definendo $x_k \triangleq x(t_k)$ ed introducendo l'intervallo di campionamento $T_k \triangleq t_{k+1} - t_k$, si ottiene il modello cinematico a tempo-discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + w_k \\ w_k &\sim wn(0, Q_k) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

dove

$$A_k = e^{A_c T_k} = \begin{bmatrix} 1 & T_k & \frac{T_k^2}{2!} & \cdots & \frac{T_k^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{T_k^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & T_k & & \frac{T_k^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{T_k^{n-1}}{(n-1)!} \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & T_k \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

$$Q_k = q \int_0^{T_k} e^{A_c r} D_c D_c^T e^{A_c^T r} dr$$

In particolare, per $n = 2$, il modello risultante, cosiddetto *WNA = White Noise Acceleration*, è caratterizzato dalle matrici

$$\text{modello WNA: } A_k = \begin{bmatrix} 1 & T_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_k = \begin{bmatrix} \frac{T_k^3}{3} & \frac{T_k^2}{2} \\ \frac{T_k^2}{2} & T_k \end{bmatrix} q. \quad (4.1.6)$$

Analogamente, per $n = 3$ (*modello WPA = Wiener Process Acceleration*), si ha:

$$\text{modello WPA: } A_k = \begin{bmatrix} 1 & T_k & \frac{T_k^2}{2} \\ 0 & 1 & T_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_k = \begin{bmatrix} \frac{T_k^5}{20} & \frac{T_k^4}{8} & \frac{T_k^3}{6} \\ \frac{T_k^4}{8} & \frac{T_k^3}{3} & \frac{T_k^2}{2} \\ \frac{T_k^3}{6} & \frac{T_k^2}{2} & T_k \end{bmatrix} q. \quad (4.1.7)$$

L'unico parametro nei modelli cinematici di tipo (4.1.5) è la varianza q scelta in modo tale che le variazioni della variabile cinematica $\mathcal{D}^{n-1}p(t)$ siano dell'ordine di \sqrt{qT} nell'intervallo temporale T . I modelli WNA ($n = 2$) e WPA ($n = 3$) rappresentano i casi più

comunemente usati di (4.1.4)-(4.1.5). In entrambi i casi, tuttavia, l'assunzione che l'accelerazione sia un rumore bianco oppure un processo di Wiener (processo non stazionario con varianza crescente linearmente nel tempo) è piuttosto irrealistica. A tale proposito, un modello cinematico più realistico detto *ECA = Exponentially Correlated Acceleration* ipotizza che l'accelerazione sia un processo esponenzialmente correlato. Il modello ECA è descritto dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{p} = v \\ \dot{v} = a \\ \dot{a} = -\rho a + \bar{w} \end{cases} \quad (4.1.8)$$

dove $\rho > 0$ è il coefficiente di correlazione esponenziale dell'accelerazione mentre $\bar{w} = wn(0, \sigma^2)$ è un rumore bianco la cui varianza è legata alla varianza dell'accelerazione σ_a^2 dalla relazione $\sigma^2 = 2\rho\sigma_a^2$. Introducendo il vettore di stato $x = [p, v, a]^T$, da (4.1.8) si ottengono le equazioni di stato a tempo-continuo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (4.1.9)$$

da cui, campionando, si ottiene il modello discretizzato (4.1.4) con

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} 1 & T_k & (\rho T_k - 1 + e^{-\rho T_k})/\rho^2 \\ 0 & 1 & (1 - e^{-\rho T_k})/\rho \\ 0 & 0 & e^{-\rho T_k} \end{bmatrix}, \quad Q_k = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \\ q_{11} &= \frac{\sigma_a^2}{\rho^4} [1 - e^{-2\rho T_k} + 2\rho T_k + \frac{2}{3}\rho^3 T_k^3 - 2\rho^2 T_k^2 - 4\rho T_k e^{-\rho T_k}] \\ q_{12} &= \frac{\sigma_a^2}{\rho^3} [e^{-2\rho T_k} + 1 - 2e^{-\rho T_k} + 2\rho T_k e^{-\rho T_k} - 2\rho T_k + \rho^2 T_k^2] \\ q_{13} &= \frac{\sigma_a^2}{\rho^2} [1 - e^{-2\rho T_k} - 2\rho T_k e^{-\rho T_k}] \\ q_{22} &= \frac{\sigma_a^2}{\rho^2} [4e^{-\rho T_k} - 3 - e^{-2\rho T_k} + 2\rho T_k] \\ q_{23} &= \frac{\sigma_a^2}{\rho} [e^{-2\rho T_k} + 1 - 2e^{-\rho T_k}] \\ q_{33} &= \sigma_a^2 [1 - e^{-2\rho T_k}]. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Per quanto riguarda l'accelerazione si fanno le seguenti ipotesi realistiche (soprattutto nel caso del moto di un aereo):

1. l'accelerazione può variare nell'intervallo $[-a_m, a_m]$;

2. con probabilità finita p_m l'accelerazione assume i valori massimi negativo $a = -a_m$ e positivo $a = a_m$;
3. con probabilità finita p_0 l'accelerazione assume valore nullo $a = 0$;
4. la probabilità residua $1 - p_0 - 2p_m$ è uniformemente distribuita nell'intervallo $[-a_m, a_m]$.

Alla luce di queste assunzioni, la PDF dell'accelerazione risulta:

$$p(a) = [\delta(a + a_m) + \delta(a - a_m)] p_m + \delta(a) p_0 + [1(a + a_m) - 1(a - a_m)] \frac{1 - p_0 - 2p_m}{2a_m} \quad (4.1.11)$$

È facile verificare che la varianza dell'accelerazione corrispondente a (4.1.11) è:

$$\sigma_a^2 = \frac{a_m^2}{3} (1 + 4p_m - p_0). \quad (4.1.12)$$

Il modello ECA definito da (4.1.4) e (4.1.10), con le suddette assunzioni sull'accelerazione da cui deriva la formula (4.1.12), è noto come *modello di Singer* ed è molto usato nelle applicazioni di controllo del traffico aereo. Il coefficiente di correlazione esponenziale è legato alla durata τ_m delle manovre dalla relazione $\rho = 1/\tau_m$. Valori tipici di τ_m variano da 10 s per aerei militari a 60 s per aerei civili.

Fino ad ora sono stati considerati modelli di moto 1-dimensionali. Un approccio semplice per descrivere moti in 2 o 3 dimensioni è quello di considerare modelli indipendenti per le coordinate ξ, η, ζ , vale a dire

$$\begin{aligned} x_{k+1}^\xi &= A_k^\xi x_k^\xi + w_k^\xi \\ x_{k+1}^\eta &= A_k^\eta x_k^\eta + w_k^\eta \\ x_{k+1}^\zeta &= A_k^\zeta x_k^\zeta + w_k^\zeta \end{aligned}$$

dove $x_k^\xi, x_k^\eta, x_k^\zeta$ sono gli stati cinematici indipendenti per le tre coordinate ξ, η, ζ mentre $w_k^\xi, w_k^\eta, w_k^\zeta$ sono disturbi di processo incorrelati di covarianze $Q_k^\xi, Q_k^\eta, Q_k^\zeta$ rispettivamente.

In questo modo, definito lo stato $x_k \triangleq [(x_k^\xi)^T, (x_k^\eta)^T, (x_k^\zeta)^T]^T$, il modello cinematico 3-dimensionale assume la forma (4.1.4) con matrici

$$A_k = \text{diag} \{ A_k^\xi, A_k^\eta, A_k^\zeta \}, \quad Q_k = \text{diag} \{ Q_k^\xi, Q_k^\eta, Q_k^\zeta \}.$$

Ad esempio, per descrivere il moto di un aereo nello spazio 3-dimensionale, si potrebbero combinare due modelli WPA per le coordinate ξ e η ed un modello WNA per la coordinata ζ . Il modello cinematico risultante (4.1.4), con stato $x_k \in \mathbb{R}^8$, è caratterizzato dalle

matrici:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & T_k & T_k^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T_k & T_k^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_k = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{T_k^5}{20} & \frac{T_k^4}{8} & \frac{T_k^3}{6} \\ \frac{T_k^4}{8} & \frac{T_k^3}{3} & \frac{T_k^2}{2} \\ \frac{T_k^3}{6} & \frac{T_k^2}{2} & T_k \end{bmatrix} q_\xi, \begin{bmatrix} \frac{T_k^5}{20} & \frac{T_k^4}{8} & \frac{T_k^3}{6} \\ \frac{T_k^4}{8} & \frac{T_k^3}{3} & \frac{T_k^2}{2} \\ \frac{T_k^3}{6} & \frac{T_k^2}{2} & T_k \end{bmatrix} q_\eta, \begin{bmatrix} \frac{T_k^3}{3} & \frac{T_k^2}{2} \\ \frac{T_k^2}{2} & T_k \end{bmatrix} q_\zeta \right\}$$

4.2 Modello “coordinated turn”

In linguaggio avionico si dice che un oggetto compie una manovra coordinata quando si muove con velocità di modulo costante e velocità angolare costante. In riferimento ad un moto piano (2-dimensionale), si introduce il seguente vettore di stato $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]'$ = $[\xi, \eta, v, h, \omega]'$ dove:

- ξ e η sono le coordinate Cartesiane di posizione;
- v è il modulo del vettore di velocità;
- h è la direzione del vettore di velocità, definita come l'angolo formato da tale vettore con il semiasse ξ positivo;
- ω è la velocità angolare.

Con questa scelta delle variabili di stato, si ottengono le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\xi} = v_\xi = v \cos h = x_3 \cos x_4 \\ \dot{x}_2 = \dot{\eta} = v_\eta = v \sin h = x_3 \sin x_4 \\ \dot{x}_3 = \dot{v} = w_1 \\ \dot{x}_4 = \dot{h} = \omega = x_5 \\ \dot{x}_5 = \dot{\omega} = w_2 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

dove $w_1 = wn(0, \sigma_v^2)$ e $w_2 = wn(0, \sigma_\omega^2)$ sono rumori bianchi indipendenti che modellano le fluttuazioni aleatorie del modulo della velocità e della velocità angolare nelle manovre

coordinate. Si noti che (4.2.1) sono equazioni di stato non lineari a tempo-continuo della forma

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \cos x_4 \\ x_3 \sin x_4 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}}_w \quad (4.2.2)$$

Data la non linearità, (4.2.2) non è discretizzabile in modo esatto; si può tuttavia operare una discretizzazione approssimata nell'intervallo $[t_k, t_{k+1})$ utilizzando il metodo di Eulero

$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \triangleq \frac{x_{k+1} - x_k}{T_k} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1})$$

ed ipotizzando il rumore di processo costante a tratti, cioè

$$w(t) = w_k, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}).$$

In questo modo si ottengono le seguenti equazioni di stato a tempo-discreto del modello *coordinated-turn*:

$$x_{k+1} = \underbrace{x_k + T_k f(x_k)}_{f_k(x_k)} + \underbrace{DT_k}_{D_k} w_k \quad (4.2.3)$$

$$Q_k = E[w_k w_k^T] = \text{diag}\{\sigma_v^2, \sigma_\omega^2\}$$

Si noti che, a differenza dei modelli cinematici esaminati nel precedente paragrafo, (4.2.3) è non lineare.

Un'altra scelta naturale delle variabili di stato è quella di considerare le coordinate Cartesiane, anziché quelle polari, anche per il vettore velocità. In questo caso, il vettore di stato è $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [\xi, v_\xi, \eta, v_\eta, \omega]^T$ e si hanno le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\xi} = v_\xi = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dot{v}_\xi = \frac{d}{dt}(v \cos h) = \dot{v} \cos h - v \sin h \dot{h} = -v_\eta \omega + w_1 = -x_4 x_5 + w_1 \\ \dot{x}_3 = \dot{\eta} = v_\eta = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dot{v}_\eta = \frac{d}{dt}(v \sin h) = \dot{v} \sin h + v \cos h \dot{h} = v_\xi \omega + w_2 = x_2 x_5 + w_2 \\ \dot{x}_5 = \dot{\omega} = w_3 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

dove $w_i = wn(0, \sigma_i^2)$ ($i = 1, 2, 3$) sono rumori bianchi indipendenti che modellano le fluttuazioni aleatorie di $\dot{v} \cos h$, $\dot{v} \sin h$ e, rispettivamente, $\dot{\omega}$. Si noti che (4.2.4) può essere riscritta in forma matriciale come

$$\dot{x}(t) = A_c(\omega) x(t) + Dw(t)$$

con

$$A_c(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Assumendo con buona approssimazione la velocità angolare $\omega(t) = \omega_k$ costante nell'intervallo di campionamento $[t_k, t_{k+1})$, si ottiene il seguente modello a tempo-discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k(\omega_k)x_k + w_k \\ w_k &= wn(0, Q_k) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

con

$$A_k = A(T_k, \omega_k) = e^{A_c(\omega_k)T_k} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega_k T_k)}{\omega_k} & 0 & \frac{\cos(\omega_k T_k) - 1}{\omega_k} & 0 \\ 0 & \cos(\omega_k T_k) & 0 & -\sin(\omega_k T_k) & 0 \\ 0 & \frac{1 - \cos(\omega_k T_k)}{\omega_k} & 1 & \frac{\sin(\omega_k T_k)}{\omega_k} & 0 \\ 0 & \sin(\omega_k T_k) & 0 & \cos(\omega_k T_k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

$$Q_k = \int_0^{T_k} e^{A_c(\omega_k)r} D Q D^T e^{A_c^T(\omega_k)r} dr, \quad Q = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2\}$$

Si noti che, in generale, il modello (4.2.5) è non lineare a causa della dipendenza della matrice A_k in (4.2.6) dalla variabile di stato $x_5 = \omega$. Se tale velocità angolare ω_k fosse tuttavia nota e costante nell'intervallo di campionamento, non occorrerebbe stimarla ed il modello *coordinated turn* (4.2.5)-(4.2.6), non lineare e del quinto ordine, si semplificherebbe nel seguente modello lineare del quart'ordine:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega_k T_k)}{\omega_k} & 0 & \frac{\cos(\omega_k T_k) - 1}{\omega_k} \\ 0 & \cos(\omega_k T_k) & 0 & -\sin(\omega_k T_k) \\ 0 & \frac{1 - \cos(\omega_k T_k)}{\omega_k} & 1 & \frac{\sin(\omega_k T_k)}{\omega_k} \\ 0 & \sin(\omega_k T_k) & 0 & \cos(\omega_k T_k) \end{bmatrix} x_k + w_k \quad (4.2.7)$$

con stato $x = [\xi, v_\xi, \eta, v_\eta]^T$ e rumore di processo $w_k = wn(0, Q_k)$. Il calcolo della matrice di covarianza $Q_k \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, semplice concettualmente ma laborioso, è lasciato per esercizio al lettore.

Capitolo 5

Sensori cinematici

Nei problemi di stima del moto (e.g. tracking e navigazione) si fa uso di svariati sensori cinematici che, in una forma del tutto generale, sono descritti da un'equazione di misura del tipo

$$\begin{aligned} y_k &= h(x_k) + v_k \\ v_k &\sim wn(0, R) \end{aligned} \quad (5.0.1)$$

dove: x_k è lo stato cinematico (posizioni, velocità, ...) da stimare; y_k è l'osservazione (eventualmente vettoriale) rumorosa fornita dal sensore; v_k è il rumore di misura; $h_k(\cdot)$ è la funzione di misura che caratterizza la dipendenza funzionale della variabile osservata dallo stato cinematico in assenza di rumore. Nel seguito si esaminano le caratteristiche (funzione di misura $h(\cdot)$ e varianza del rumore di misura R) di alcuni sensori comunemente impiegati nelle applicazioni di tracciamento e/o navigazione.

Radar

Il radar (fig. 5.1) è un apparato che utilizza le onde elettromagnetiche per rilevare la presenza di un oggetto in movimento (nave, aereo, veicolo, etc.) e determinarne la posizione, tipicamente in coordinate polari (distanza, azimuth, angolo di elevazione). Indicato con $x = [\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \dots]^T$ il vettore di stato cinematico dell'oggetto di interesse ed assumendo l'origine degli assi Cartesiani in corrispondenza della posizione del radar, la funzione di misura del radar 3D risulta

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \\ \angle(\xi + j\eta) \\ \angle\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + j\zeta \end{bmatrix} \quad (5.0.2)$$

Tipicamente, si ipotizza che gli errori di range, azimuth ed elevazione siano indipendenti cioè $R = \text{diag}\{\sigma_r^2, \sigma_\theta^2, \sigma_\epsilon^2\}$ con deviazioni standard $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\epsilon$ dipendenti dalle caratteristi-

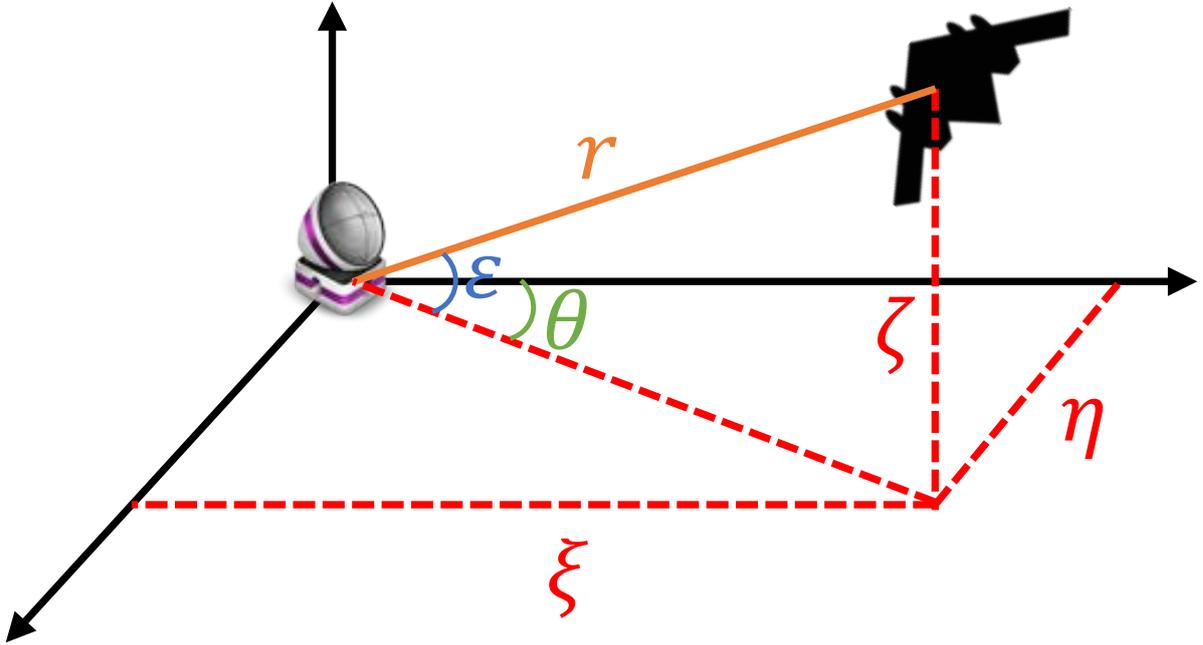


Figura 5.1: Radar 3D per il controllo del traffico aereo

che dello specifico radar impiegato. Si noti che un singolo radar è in grado di localizzare, esattamente in assenza di rumore, la posizione di un oggetto e, pertanto, garantisce l'osservabilità dello stato cinematico dell'oggetto.

Sensori TOA e DOA

Un sensore TOA (Time Of Arrival) misura la distanza di un oggetto dal sensore tramite il tempo impiegato da un segnale (elettromagnetico o acustico) a percorrere (in sola andata o, eventualmente, in andata e ritorno) tale distanza. Indicata con (ξ^s, η^s, ζ^s) la posizione, supposta nota, del sensore, la funzione di misura del sensore TOA risulta:

$$h(x) = \sqrt{(\xi - \xi^s)^2 + (\eta - \eta^s)^2 + (\zeta - \zeta^s)^2} \quad (5.0.3)$$

Per garantire l'osservabilità dello stato cinematico occorrono almeno 3 sensori TOA nel piano e almeno 4 nello spazio.

Un sensore DOA (Direction Of Arrival), detta anche AOA (Angle Of Arrival) misura la direzione di arrivo di un segnale proveniente dall'oggetto che si vuole localizzare. Considerando il caso 2D (2-dimensionale) ed assumendo il sensore in posizione (ξ^s, η^s) nota, la funzione di misura del sensore DOA risulta:

$$h(x) = \angle(\xi - \xi^s) + j(\eta - \eta^s) \quad (5.0.4)$$

Per garantire osservabilità dello stato cinematico occorrono almeno 2 sensori DOA nel piano.

Sensore RSS

Anche il sensore RSS (Received Signal Strength) misura la distanza oggetto-sensore ma, diversamente dai sensori TOA, non tramite una misura di tempo bensì attraverso una misura dell'attenuazione di segnale radio nel collegamento sensore-oggetto. Utilizzando un modello di attenuazione del canale di comunicazione radio, l'equazione di misura del sensore RSS assume la forma:

$$h(x) = y_0 - 5 \alpha \log_{10} [(\xi - \xi^s)^2 + (\eta - \eta^s)^2 + (\zeta - \zeta^s)^2] \quad (5.0.5)$$

dove (ξ^s, η^s, ζ^s) è la posizione nota del sensore mentre α (esponente di *pathloss*) e y_0 (potenza ricevuta in *dBm* alla distanza di 1 *m*) sono parametri caratteristici del collegamento radio. Per l'osservabilità si possono fare ragionamenti analoghi al caso di sensori TOA. I sensori RSS, tuttavia, forniscono solitamente misure di distanza molto meno accurate di quelle dei sensori TOA.

Sensore Doppler

Questo sensore si basa sull'effetto Doppler, ovvero sulla variazione di frequenza di un segnale radio indotta dal moto relativo fra ricevitore e trasmettitore. Tale variazione, che può essere facilmente misurata, risulta proporzionale alla velocità radiale

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \left[\sqrt{(\xi - \xi^s)^2 + (\eta - \eta^s)^2 + (\zeta - \zeta^s)^2} \right]$$

Assumendo la posizione del sensore (ξ^s, η^s, ζ^s) nota, e qualora il sensore sia in movimento anche la sua velocità $(\dot{\xi}^s, \dot{\eta}^s, \dot{\zeta}^s)$, si ottiene la seguente funzione di misura del sensore Doppler:

$$h(x) = -\frac{1}{\lambda} \frac{(\xi - \xi^s)(\dot{\xi} - \dot{\xi}^s) + (\eta - \eta^s)(\dot{\eta} - \dot{\eta}^s) + (\zeta - \zeta^s)(\dot{\zeta} - \dot{\zeta}^s)}{\sqrt{(\xi - \xi^s)^2 + (\eta - \eta^s)^2 + (\zeta - \zeta^s)^2}} \quad (5.0.6)$$

dove $\lambda = c/f_c$ è la lunghezza d'onda del segnale, f_c la frequenza della portante e c la velocità di propagazione del segnale. Si noti che, diversamente dai sensori cinematici precedentemente considerati, la misura fornita dal sensore Doppler dipende anche dalle componenti di velocità $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ oltre che da quelle di posizione ξ, η, ζ dell'oggetto di interesse. Studi sull'osservabilità mediante sensori Doppler hanno dimostrato che ne occorrono almeno 3, non allineati, per poter stimare lo stato cinematico nel piano ed almeno 4, non tutti complanari, nello spazio.

Radar passivo

Diversamente dal radar attivo precedentemente considerato, che trasmette segnali radar e riceve gli echi di ritorno dagli oggetti di interesse, il radar passivo (fig. 5.2) riceve soltanto gli echi riflessi da tali oggetti di segnali irradiati da trasmettitori radio di opportunità. Misurando, con tecniche di elaborazione del segnale, il ritardo temporale fra il segnale ricevuto di riflesso dall'oggetto di interesse ed il segnale ricevuto direttamente dal trasmettitore, il radar passivo fornisce, moltiplicando tale ritardo per la velocità di propagazione, una misura di una pseudo-distanza definita nel seguente modo:

$$r = d_{RO} + d_{OT} - d_{RT}$$

dove d_{RO} è la distanza del radar (ricevitore) dall'oggetto, d_{OT} la distanza dell'oggetto dal trasmettitore e d_{RT} la distanza nota fra radar e trasmettitore. Fissando l'origine degli

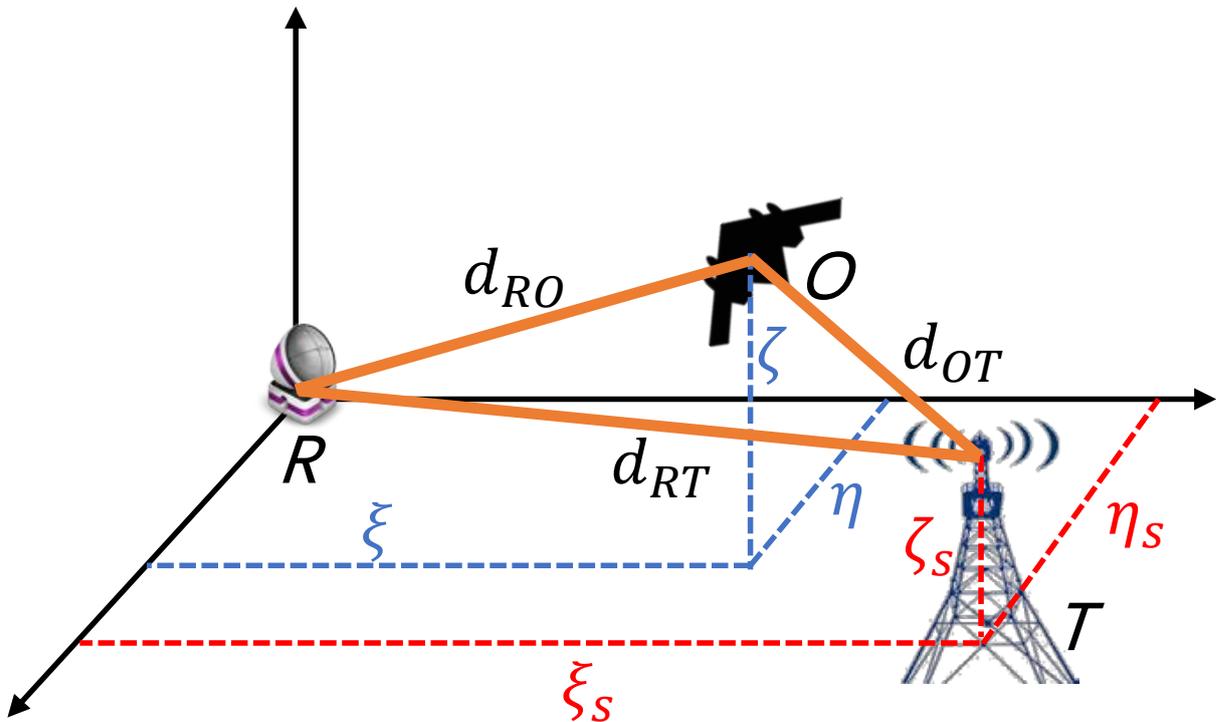


Figura 5.2: Radar passivo

assi in corrispondenza del radar (ricevitore) ed assumendo nota la posizione (ξ^s, η^s, ζ^s) del trasmettitore, si ha la seguente equazione di misura

$$h(x) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \sqrt{(\xi - \xi^s)^2 + (\eta - \eta^s)^2 + (\zeta - \zeta^s)^2} - d_{RT} \quad (5.0.7)$$

dove $d_{RT} = \sqrt{(\xi^s)^2 + (\eta^s)^2 + (\zeta^s)^2}$ è una costante nota. Si noti che il luogo dei punti $O = (\xi, \eta, \zeta)$ (possibili posizioni dell'oggetto) individuate da una misura non rumorosa

di pseudo-distanza r altro non è che il luogo dei punti per cui la somma delle distanze dai punti fissi R (ricevitore) e T (trasmettitore) è costante e pari al valore $r + d_{RT}$. Tale luogo, nel caso 2-dimensionale, altro non è che l'ellisse avente per fuochi le posizioni del ricevitore e del trasmettitore. Naturalmente, in presenza di rumore, il luogo dei punti compatibili con la misura, ad un prestabilito livello di confidenza, diventa una corona ellittica di spessore dipendente dalla deviazione standard del rumore di misura. Dalle suddette considerazioni geometriche risulta chiaro che per avere osservabilità occorre disporre di almeno tre trasmettitori (oppure tre ricevitori) diversi nel piano, almeno quattro nello spazio; tali ricevitori e trasmettitori devono essere disposti in modo che non ve ne siano tre allineati nel piano e quattro complanari nello spazio. Solitamente il radar passivo utilizza, in aggiunta a misure di pseudo-distanza, anche misure Doppler.

GPS

Il GPS (fig. 5.3), acronimo che sta per *Global Positioning System*, è un sistema di navigazione satellitare (come anche GLONASS, GALILEO, etc.) con copertura in tutto il mondo che permette ad ogni utente, dotato di ricevitore GPS, di ricevere informazioni di posizionamento e di temporizzazione dai satelliti visibili della costellazione. La attuale

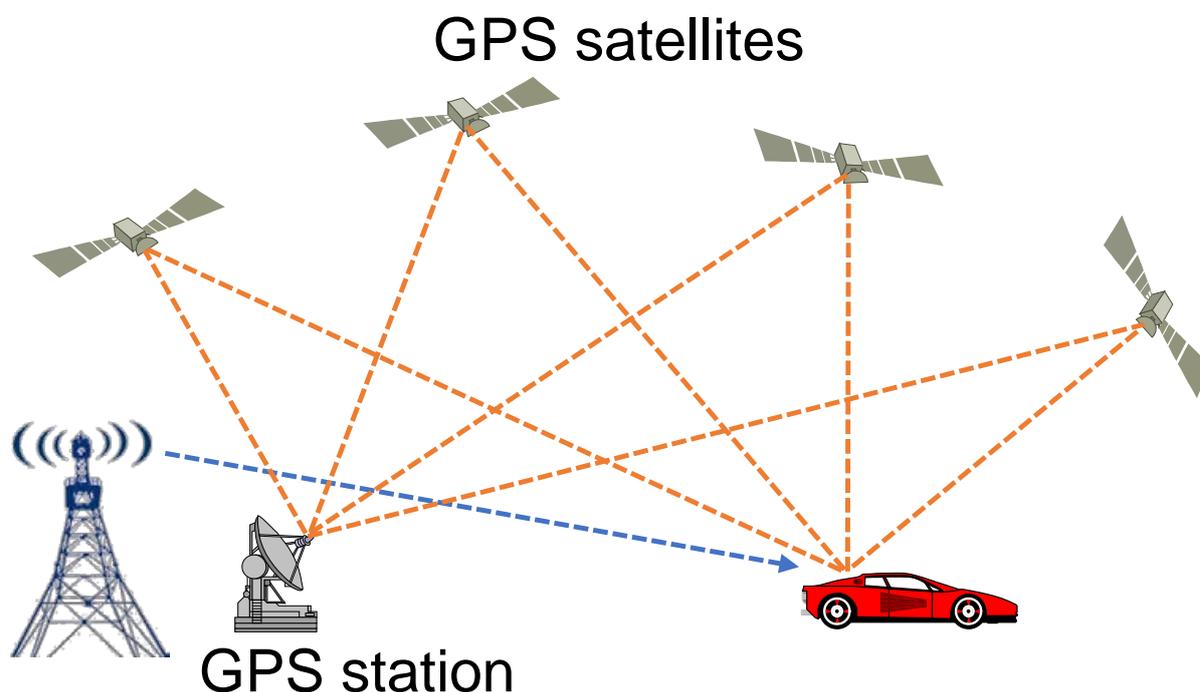


Figura 5.3: Sistema di navigazione satellitare

costellazione del GPS consiste di 24 satelliti disposti in modo tale che, in ogni punto della

Terra e ad ogni istante temporale, risultano visibili almeno 4, al più 11 e, nella maggior parte dei casi, da 6 a 8 satelliti. Il principio della localizzazione GPS si basa sulla determinazione della distanza del ricevitore GPS da ogni satellite visibile della costellazione, tramite una misura del tempo impiegato a percorrere tale distanza. Per ogni satellite s visibile all'istante di campionamento k -esimo, si ha dunque una misura di pseudodistanza

$$y_k^s = h^s(x_k) + \nu_k^s \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (5.0.8)$$

dove:

$$h^s(x) = \sqrt{(\xi - \xi^s)^2 + (\eta - \eta^s)^2 + (\zeta - \zeta^s)^2} + cb; \quad (5.0.9)$$

(ξ^s, η^s, ζ^s) è la posizione nota del satellite s ; c è la velocità della luce; b è l'errore di sincronizzazione fra l'orologio del ricevitore e l'orologio del sistema GPS; ν_k^s è il rumore di misura, non necessariamente bianco. Si noti che, per una corretta localizzazione del ricevitore GPS, occorre stimare anche l'errore di sincronizzazione b (bias) che, altrimenti, moltiplicato per la velocità della luce $c = 3 \cdot 10^8$ m/s comporterebbe un notevole errore sulla distanza satellite-ricevitore. A tale proposito, l'evoluzione temporale dell'errore $b(t)$ può essere descritta con un modello di stato cinematico analogo a quelli comunemente impiegati per descrivere l'evoluzione temporale delle coordinate di posizione ξ, η, ζ del navigatore. Ad esempio, ipotizzando che l'errore $b(t)$ abbia un andamento lineare nel tempo, in realtà quasi lineare per l'inevitabile presenza di fluttuazioni casuali, cioè

$$b(t) \cong b_0 + dt$$

si può adottare il seguente modello di stato

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{b}(t) = d(t) + w_b(t) \\ \dot{d}(t) = w_d(t) \\ w_b(t) \sim wn(0, \sigma_b^2) \\ w_d(t) \sim wn(0, \sigma_d^2) \\ w_b \perp w_d \end{array} \right. \quad (5.0.10)$$

Discretizzando nel tempo tale modello con intervallo di campionamento $T > 0$, si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} b((k+1)T) \\ d((k+1)T) \end{bmatrix} \triangleq \underbrace{\begin{bmatrix} b_{k+1} \\ d_{k+1} \end{bmatrix}}_{x_{k+1}^c} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_0} \underbrace{\begin{bmatrix} b_k \\ d_k \end{bmatrix}}_{x_k^c} + w_k^c \\ w_k^c \sim wn(0, Q_c) \\ Q_c = \sigma_d^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix}}_{Q_0} + \sigma_b^2 \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.0.11)$$

Pertanto, in relazione a problemi di navigazione GPS, occorre includere nel vettore di stato anche lo stato $x_k^c \triangleq [b_k, d_k]^T$ che modella l'errore di orologio. Per quanto riguarda il rumore di misura ν_k^s in (5.0.8) associato al satellite s , esso viene comunemente modellato come la somma di un processo esponenzialmente autocorrelato μ_k^s e di un rumore bianco v_k^s , ovvero

$$\begin{cases} \mu_{k+1}^s &= \varrho \mu_k^s + w_k^s \\ \nu_k^s &= \mu_k^s + v_k^s \end{cases} \quad (5.0.12)$$

dove: $\varrho \in (0, 1)$ è il coefficiente di autocorrelazione; $w_k^s \sim wn(0, \sigma_w^2)$ e $v_k^s \sim wn(0, \sigma_v^2)$ sono rumori bianchi mutuamente incorrelati.

Adottando modelli di moto WNA per gli assi coordinati ξ e η , WNV per l'asse ζ , il modello (5.0.11) per l'errore di sincronizzazione dell'orologio e (5.0.12) per gli errori di misura ν_k^s dovuti alle altre cause, si introducono i seguenti vettori di stato e di osservazione:

$$x = \left[\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}, \zeta, \underbrace{b, d}_{x^c}, \mu^1, \mu^2, \dots, \mu^N \right]^T \in \mathbb{R}^{N+7}, \quad y = [y^1, y^2, \dots, y^N]^T \in \mathbb{R}^N$$

Inglobando i modelli sopra menzionati, si ottengono le seguenti equazioni di stato per la navigazione GPS:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k = h(x) + v_k \\ w_k \sim wn(0, Q) \\ v_k \sim wn(0, R) \\ A = \text{diag}\{A_0, A_0, 1, A_0, \varrho I_N\} \\ Q = \text{diag}\{\sigma_\xi^2 Q_0, \sigma_\eta^2 Q_0, \sigma_\zeta^2, Q_c, \sigma_w^2 I_N\} \\ R = \sigma_v^2 I_N \\ h(\cdot) = [h^1(\cdot), h^2(\cdot), \dots, h^N(\cdot)]^T \\ h^s(x) = \sqrt{(\xi - \xi^s)^2 + (\eta - \eta^s)^2 + (\zeta - \zeta^s)^2} + cb + \mu^s \quad s = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (5.0.13)$$

In realtà, ad ogni istante k , il vettore di osservazione y_k ha un numero variabile di componenti $p_k \leq N$ pari al numero di satelliti visibili dal ricevitore GPS a tale istante.

Capitolo 6

Filtraggio a modelli multipli

6.1 Sistema Markoviano a salti

Nel filtraggio a modelli multipli si ipotizza che il sistema di interesse sia descrivibile con diversi modelli (lineari e/o non lineari) rappresentativi di diverse modalità di funzionamento del sistema. Per essere più precisi, si consideri il problema della stima dello stato per il seguente *sistema Markoviano a salti*

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(m_t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) + \mathbf{w}_t \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \\ \mathbf{w}_t \sim wn(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(m_t)) \\ \mathbf{v}_t \sim wn(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \end{cases} \quad (6.1.1)$$

dove $m_t \in \mathcal{M} \triangleq \{1, 2, \dots, \mu\}$ denota lo *stato modale* all'istante t che rappresenta il modo (la modalità) in cui il sistema sta operando all'istante t fra μ possibili modi $1, 2, \dots, \mu$, ciascuno dei quali è caratterizzato da un modello accordato al modo con funzione di transizione dello stato $\mathbf{f}(i, \cdot, \cdot)$ e covarianza del rumore di processo $\mathbf{Q}(i)$. Inoltre, le transizioni fra i modi sono modellate tramite una catena di Markov omogenea con probabilità di transizione costanti

$$p_{ij} = \text{prob}(m_t = i | m_{t-1} = j), \quad i, j \in \mathcal{M} \quad (6.1.2)$$

È facile comprendere come un modello Markoviano a salti (6.1.1)-(6.1.2) possa, ad esempio, modellare in modo molto efficace il moto di un oggetto manovrante [1, paragrafo 11.6]. Ad esempio, un modello a velocità quasi-costante (WNA) può essere impiegato per descrivere un moto rettilineo uniforme mentre modelli di manovra coordinata (CT) con vari valori di velocità angolare possono descrivere le manovre dell'oggetto. In alternativa, si possono utilizzare modelli con diverse covarianze $\mathbf{Q}(i)$ del rumore di processo dipendenti dal modo i (piccole per il moto rettilineo e più elevate per le manovre) con la stessa funzione di transizione cinematica $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ indipendente dal modo i . Per sistemi multimodali, tuttavia, l'approccio classico di stima dello stato a modello singolo risulta

inefficace. Per ottenere prestazioni migliori, si adotta quindi l'approccio *a modelli multipli* di seguito presentato.

6.2 Stimatore a modelli multipli statico

Si assume per il momento che il sistema operi ad ogni istante temporale t nello stesso modo $m \in \mathcal{M}$, naturalmente non noto a priori. L'obiettivo è dunque quello di stimare, sulla base delle osservazioni disponibili $\mathbf{z}^t \triangleq \{\mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}\}$, sia lo stato modale costante $m_t \equiv m \in \mathcal{M}$ che lo stato $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$. Assumendo che il sistema operi effettivamente in uno dei modi $1, 2, \dots, \mu$ ipotizzati e sfruttando il teorema della probabilità totale, la PDF condizionata dello stato \mathbf{x}_t risulta

$$p_{t|t}(\mathbf{x}) = PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | \mathbf{z}^t) = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_t^i p_{t|t}^i(\mathbf{x}) \quad (6.2.1)$$

dove

$$\alpha_t^i = Pr(m = i | \mathbf{z}^t) \quad (6.2.2)$$

è la probabilità condizionata alle osservazioni che il sistema operi nel modo i , detta probabilità modale i -esima, mentre

$$p_{t|t}^i(\mathbf{x}) = PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | \mathbf{z}^t, m = i) \quad (6.2.3)$$

è la PDF dello stato \mathbf{x}_t condizionata alle osservazioni e all'ipotesi che il sistema operi nel modo i -esimo, detta PDF condizionata al modo i -esimo. Si noti da (6.2.1) che nel caso in questione la PDF condizionata dello stato $p_{t|t}(\mathbf{x})$, e analogamente $p_{t|t-1}(\mathbf{x})$, è una combinazione convessa di PDF, detta anche *mistura di PDF*. In altri termini, l'adozione di una rappresentazione di stato a modelli multipli si riflette in una PDF condizionata dello stato sotto forma di *mistura di PDF*. Il successivo paragrafo è dedicato appunto alle *misure di PDF*.

6.2.1 Mistura di PDF

Si considerino le possibili PDF $p_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, \mu$) della variabile aleatoria \mathbf{X} e si assuma che con probabilità α_i tale variabile aleatoria è distribuita secondo $p_i(\cdot)$ cioè

$$\alpha_i \triangleq Pr(\mathbf{X} \sim p_i(\cdot)), \quad \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i = 1$$

Per il teorema della probabilità totale, \mathbf{X} risulta distribuita con la *mistura di PDF*

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mu} Pr(\mathbf{X} \sim p_i(\cdot)) p_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i p_i(\mathbf{x}) \quad (6.2.4)$$

Assumendo che la i -esima componente della mistura, $p_i(\cdot)$, abbia media e varianza

$$\bar{\mathbf{x}}_i \triangleq \int \mathbf{x} p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_i \triangleq \int (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)^T p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (6.2.5)$$

si dimostra facilmente che la mistura di PDF (6.2.4) ha media

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \bar{\mathbf{x}}_i \quad (6.2.6)$$

e matrice di covarianza

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \left[\mathbf{P}_i + (\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \right] \quad (6.2.7)$$

Infatti,

$$\bar{\mathbf{x}} \triangleq \int \mathbf{x} \mathbf{p}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \mathbf{x} \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \int \mathbf{x} p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \bar{\mathbf{x}}_i$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &\triangleq \int (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{p}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \int (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i + \bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i + \bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}})^T p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} \left[\mathbf{P}_i + (\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \right] \end{aligned}$$

Si noti che la covarianza della mistura non è semplicemente la media, pesata con le probabilità modali α_i , delle covarianze delle varie componenti $p_i(\cdot)$ ma contiene un termine aggiuntivo che tiene conto della dispersione delle medie $\bar{\mathbf{x}}_i$ delle componenti rispetto alla media totale $\bar{\mathbf{x}}$ della mistura.

6.2.2 Stimatore SMM

Ritornando al problema della stima dello stato del sistema a modelli multipli nel caso statico (modo costante), un modo semplice di procedere ad ogni istante temporale t è il seguente.

Algoritmo SMM

1. Per ogni possibile modo $i \in \mathcal{M}$, un filtro modale di Kalman accordato al modello i (eventualmente esteso o unscented se tale modello è non lineare) propaga la stima modale $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i$ e la relativa covarianza $\mathbf{P}_{t|t}^i$, fornendo in uscita anche la verosimiglianza del modo i

$$\ell_t^i = PDF(\mathbf{y}_t | \mathbf{z}^{t-1}, m = i) = \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{e}_t^i)^T (\mathbf{S}_t^i)^{-1} \mathbf{e}_t^i\right)$$

dove $\mathbf{e}_t^i = \mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^i)$ è l'innovazione all'istante t dell' i -esimo filtro modale ed \mathbf{S}_t^i la relativa matrice di covarianza.

2. Utilizzando il teorema di Bayes, si aggiornano per $i = 1, 2, \dots, \mu$ le probabilità modali nel seguente modo

$$\alpha_t^i \triangleq Pr(m = i | \mathbf{z}^t) = \frac{PDF(\mathbf{y}_t | \mathbf{z}^{t-1}, m = i) Pr(m = i | \mathbf{z}^{t-1})}{c} = \frac{\ell_t^i \alpha_{t-1}^i}{\sum_{j=1}^{\mu} \ell_t^j \alpha_{t-1}^j} \quad (6.2.8)$$

3. Si determinano la stima dello stato $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ e la relativa covarianza $\mathbf{P}_{t|t}$ combinando le stime $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i$ e relative covarianze $\mathbf{P}_{t|t}^i$ modali mediante:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_t^i \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i \\ \mathbf{P}_{t|t} = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_t^i \left[\mathbf{P}_{t|t}^i + (\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) (\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})^T \right] \end{cases} \quad (6.2.9)$$

Si dimostra che se il sistema effettivamente opera, ad ogni istante di tempo, nello stesso modo i appartenente all'insieme considerato, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t^i = \delta_{i-m} = \begin{cases} 1, & i = m \\ 0, & i \neq m \end{cases}$$

cioè, asintoticamente, l'algoritmo SMM (Static Multiple Model) sopra esposto individua correttamente il modo costante in cui opera il sistema.

6.3 Stimatori a modelli multipli dinamici

Si consideri adesso il caso dinamico in cui il modo di funzionamento del sistema possa commutare fra un intervallo di campionamento ed il successivo. In particolare si assume

che tale commutazione sia governata da una catena di Markov omogenea con probabilità di transizione p_{ij} dal modo j al modo i . Per affrontare correttamente, secondo l'approccio Bayesiano, il problema della stima dello stato di un sistema Markoviano a salti occorre tener conto, ad ogni istante temporale t , di tutte le possibili sequenze di modi $m^{t-1} = \{m_1, \dots, m_{t-1}\} \in \mathcal{M}^{t-1}$ occorsi precedentemente. A tale proposito, lo stimatore dinamico a modelli multipli Bayesiano dovrebbe propagare nel tempo tanti filtri quante sono le possibili sequenze modali passate. Infatti, per il teorema della probabilità totale, la PDF condizionata dello stato è della forma

$$p_{t|t}(\mathbf{x}) = \sum_{m^{t-1} \in \mathcal{M}^{t-1}} \alpha_{t|t}^{m^{t-1}} p_{t|t}^{m^{t-1}}(\mathbf{x})$$

dove $\alpha_{t|t}^{\mathbf{m}} \triangleq Pr(m^{t-1} = \mathbf{m} | \mathbf{z}^t)$ è la probabilità della sequenza modale \mathbf{m} condizionata alle osservazioni mentre $p_{t|t}^{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}, m^{t-1} = \mathbf{m})$ è la PDF dello stato \mathbf{x}_t condizionata alle osservazioni ed alla sequenza modale e le probabilità di transizione della catena di Markov, le probabilità delle sequenze modali possono essere aggiornate nel seguente modo:

$$\alpha_{t|t}^{m^{t-1}} = \frac{\ell_t^{m^{t-1}} \alpha_{t|t-1}^{m^{t-1}}}{\sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}^{t-1}} \ell_t^{\mathbf{m}} \alpha_{t|t-1}^{\mathbf{m}}}$$

$$\alpha_{t+1|t}^{m^t} = \sum_{m^{t-1} \in \mathcal{M}^{t-1}} p_{m_t, m_{t-1}} \alpha_{t|t}^{m^{t-1}}$$

Si noti, tuttavia, come l'approccio Bayesiano generalizzato sopra esposto sia di fatto impraticabile in quanto richiederebbe un numero di filtri, μ^t , esponenzialmente crescente con il tempo t . Questo, naturalmente, non permetterebbe un'implementazione ricorsiva del filtro. Pertanto si devono adottare soluzioni subottime che limitano il numero di filtri (o equivalentemente il numero di sequenze modali considerate). Un possibile approccio, noto come *Generalizzato Pseudo-Bayesiano di ordine k* ed indicato con l'acronimo GPB_k , considera unicamente le ipotesi relative agli ultimi k istanti temporali e, pertanto, limita il numero di filtri utilizzati al valore μ^k . Ad esempio, GPB_1 considera solo i possibili modi nell'ultimo intervallo di campionamento mentre GPB_2 prende in esame tutte le possibili combinazioni di modi negli ultimi due intervalli di campionamento; essi richiedono μ e, rispettivamente, μ^2 filtri operanti in parallelo. Un altro algoritmo di filtraggio a modelli multipli comunemente impiegato è denominato *Interacting Multiple Model* ed indicato con l'acronimo IMM; IMM è concettualmente simile a GPB_2 ma utilizza, come GPB_1 , soltanto μ filtri operanti in parallelo.

6.3.1 Stimatore GPB_1

Nello stimatore generalizzato pseudo-Bayesiano del primo ordine, ad ogni istante t la stima viene calcolata considerando μ possibili ipotesi relative al modo in cui il sistema sta

operando attualmente; tutte le sequenze che differiscono per i modi precedenti vengono combinate insieme. Utilizzando il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned}
p_{t|t}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{\mu} Pr(m_{t-1} = i | \mathbf{y}^t) PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{t|t}^i PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{y}_t, \mathbf{y}^{t-1}, \mathbf{u}^{t-1}) \\
&\cong \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{t|t}^i PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{y}_t, \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}, \mathbf{P}_{t-1|t-1})
\end{aligned}$$

L'ultima approssimazione nei passaggi sopra riportati equivale a sostituire il condizionamento rispetto a tutte le osservazioni precedenti con il condizionamento rispetto alla stima $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}$ ed alla covarianza $\mathbf{P}_{t-1|t-1}$ che riassumono, seppur in modo approssimato, tutta la storia passata \mathbf{z}^{t-1} . Sulla base di questa approssimazione, si ottiene l'algoritmo GPB₁ che, ad ogni istante temporale t procede nel modo seguente.

Algoritmo GPB₁

1. Per ogni modo $i \in \mathcal{M}$, il filtro modale di Kalman accordato al modello i (eventualmente esteso o unscented se tale modello è non lineare) viene re-inizializzato alla stima $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}$ ed alla relativa covarianza $\mathbf{P}_{t-1|t-1}$, da cui si ottengono, utilizzando il modello i e l'ultima osservazione \mathbf{y}_t , la stima modale $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i$, la relativa covarianza $\mathbf{P}_{t|t}^i$ e la verosimiglianza ℓ_t^i del modo i .
2. Si aggiornano le probabilità modali tramite:

$$\begin{aligned}
\alpha_{t|t-1}^i &= \sum_{j=1}^{\mu} p_{ij} \alpha_{t-1|t-1}^j \\
\alpha_{t|t}^i &= \frac{\ell_t^i \alpha_{t|t-1}^i}{\sum_{j=1}^{\mu} \ell_t^j \alpha_{t|t-1}^j}
\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

3. Si determinano la stima dello stato $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ e la relativa covarianza $\mathbf{P}_{t|t}$ combinando le stime $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i$ e relative covarianze $\mathbf{P}_{t|t}^i$ modali mediante:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{t|t}^i \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i \\ \mathbf{P}_{t|t}^i = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{t|t}^i \left[\mathbf{P}_{t|t}^i + (\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) (\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})^T \right] \end{cases} \tag{6.3.2}$$

6.3.2 Stimatore GPB₂

Nello stimatore generalizzato pseudo-Bayesiano del secondo ordine, ad ogni istante t la stima viene calcolata considerando μ^2 possibili ipotesi relative ai modi in cui il sistema sta operando attualmente ed ha operato al precedente intervallo di campionamento. Tutte le sequenze che differiscono per i modi precedenti agli ultimi due vengono fuse. Utilizzando il teorema della probabilità totale, si ha:

$$\begin{aligned}
p_{t|t}(\mathbf{x}) &\stackrel{\Delta}{=} PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, m_{t-2} = j, \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}) \\
&\quad Pr(m_{t-2} = j | m_{t-1} = i, \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}) Pr(m_{t-1} = i | \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{y}_t, m_{t-2} = j, \mathbf{y}^{t-1}, \mathbf{u}^{t-1}) \alpha_{t-1|t}^{j|i} \alpha_t^i \\
&\cong \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_t^i \alpha_{t-1|t}^{j|i} PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{y}_t, \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j, \mathbf{P}_{t-1|t-1}^j)
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

dove

$$\begin{aligned}
\alpha_{t-1|t}^{j|i} &\stackrel{\Delta}{=} Pr(m_{t-2} = j | m_{t-1} = i, \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}) \\
&= Pr(m_{t-2} = j | \mathbf{y}_t, m_{t-1} = i, \mathbf{y}^{t-1}, \mathbf{u}^{t-1}) \\
&= \frac{PDF(\mathbf{y}_t, m_{t-1} = i | m_{t-2} = j, \mathbf{y}^{t-1}, \mathbf{u}^{t-1}) Pr(m_{t-2} = j | \mathbf{y}^{t-1}, \mathbf{u}^{t-1})}{c_i} \\
&= \frac{PDF(\mathbf{y}_t | m_{t-1} = i, m_{t-2} = j, \mathbf{z}^{t-1}) Pr(m_{t-1} = i | m_{t-2} = j) Pr(m_{t-2} = j, \mathbf{z}^{t-1})}{c_i} \\
&= \frac{PDF(\mathbf{y}_t | m_{t-1} = i, m_{t-2} = j, \mathbf{z}^{t-1}) p_{ij} \alpha_{t-1}^j}{c_i} \\
&\cong \frac{PDF(\mathbf{y}_t | m_{t-1} = i, \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j, \mathbf{P}_{t-1|t-1}^j) p_{ij} \alpha_{t-1}^j}{c_i}
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

e c_i è un fattore di normalizzazione. In particolare, l'ultima approssimazione in (6.3.3) ed in (6.3.4) equivale a sostituire il condizionamento rispetto a tutte le osservazioni precedenti \mathbf{z}^{t-1} ed all'ipotesi $m_{t-2} = j$ con il condizionamento rispetto alla stima $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j$ ed alla relativa covarianza $\mathbf{P}_{t-1|t-1}^j$ accordate al modo j . Lo stimatore GPB₂ risultante dovrà pertanto utilizzare μ^2 filtri accordati alle coppie di modi $(i, j) \in \mathcal{M}^2$ ipotizzate per gli intervalli di campionamento $t-1$ e $t-2$. Tali filtri forniranno in uscita le stime $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{ij}$

e relative covarianze $\mathbf{P}_{t|t}^{ij}$, a partire da condizioni iniziali $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j$ e $\mathbf{P}_{t-1|t-1}^j$, sfruttando l'ipotesi $m_{t-1} = i$ nonché le ultime osservazioni \mathbf{u}_{t-1} e \mathbf{y}_t . Ad ogni istante temporale t , l'algoritmo GPB₂ procede dunque nel seguente modo.

Algoritmo GPB₂

1. Per ogni coppia $(i, j) \in \mathcal{M}^2$, il filtro modale (i, j) , inizializzato da $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j$ e $\mathbf{P}_{t-1|t-1}^j$, basandosi sull'ipotesi $m_{t-1} = i$ e sulle osservazioni \mathbf{u}_{t-1} e \mathbf{y}_t , fornisce in uscita $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{ij}$, $\mathbf{P}_{t|t}^{ij}$ e la verosimiglianza

$$\ell_t^{ij} \triangleq PDF(\mathbf{y}_t | m_{t-1} = i, \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j, \mathbf{P}_{t-1|t-1}^j) = \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{e}_t^{ij})^T (\mathbf{S}_t^{ij})^{-1} \mathbf{e}_t^{ij}\right]$$

dove $\mathbf{e}_t^{ij} = \mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{ij})$ è l'innovazione all'istante t del filtro modale (i, j) -esimo ed \mathbf{S}_t^{ij} la relativa matrice di covarianza.

2. Si aggiornano le probabilità modali tramite

$$\alpha_t^i = \frac{\sum_{j=1}^{\mu} \ell_t^{ij} p_{ij} \alpha_{t-1}^j}{\sum_{k=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \ell_t^{kj} p_{kj} \alpha_{t-1}^j}$$

e le probabilità di mescolamento tramite

$$\alpha_{t-1|t}^{ij} = \frac{\ell_t^{ij} p_{ij} \alpha_{t-1}^j}{\sum_{k=1}^{\mu} \ell_t^{ik} p_{ik} \alpha_{t-1}^k}$$

3. Si mescolano le stime modali $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{ij}$ e relative covarianze $\mathbf{P}_{t|t}^{ij}$ per ottenere le stime $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i$ e relative covarianze $\mathbf{P}_{t|t}^i$ modali mediante:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i &= \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{t-1|t}^{j|i} \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{ij} \\ \mathbf{P}_{t|t}^i &= \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{t-1|t}^{j|i} \left[\mathbf{P}_{t|t}^{ij} + \left(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{ij} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{ij} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i \right)^T \right] \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

4. Si determinano la stima dello stato $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ e la relativa covarianza $\mathbf{P}_{t|t}$ combinando le stime $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i$ e relative covarianze $\mathbf{P}_{t|t}^i$ modali mediante:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_t^i \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i \\ \mathbf{P}_{t|t}^i = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_t^i \left[\mathbf{P}_{t|t}^i + (\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) (\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})^T \right] \end{cases} \quad (6.3.6)$$

6.3.3 Stimatore IMM

L'algoritmo IMM nasce con l'obiettivo di preservare la memoria di due intervalli di campionamento di GPB₂ utilizzando però un numero di filtri, μ anziché μ^2 , pari al numero di modi ipotizzati. In altri termini IMM vuole fornire un'approssimazione computazionalmente efficiente dell'algoritmo GPB₂ precedentemente descritto. A tale proposito, nello stimatore a modelli multipli interagenti (IMM), ad ogni istante t , la stima e la relativa covarianza vengono calcolate per ogni possibile modo corrente utilizzando μ filtri, ciascuno dei quali parte da condizioni iniziali ottenute combinando in modo diverso le precedenti stime e relative covarianze condizionate ai modi. Utilizzando il teorema della probabilità totale, si ha:

$$\begin{aligned} p_{t|t}(\mathbf{x}) &\triangleq PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}) Pr(m_{t-1} = i | \mathbf{y}^t, \mathbf{u}^{t-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{y}_t, \mathbf{y}^{t-1}, \mathbf{u}^{t-1}) \alpha_{t|t}^i \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{t|t}^i p_{t|t}^i(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

con

$$\begin{aligned} p_{t|t}^i(\mathbf{x}) &\triangleq PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}^{t-1}) \\ &= \frac{PDF(\mathbf{y}_t | m_{t-1} = i, \mathbf{x}_t = \mathbf{x}) PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{z}^{t-1})}{c_i} \\ &= \frac{\ell_t^i(\mathbf{x} | \mathbf{y}_t) p_{t|t-1}^i(\mathbf{x})}{\int \ell_t^i(\boldsymbol{\xi} | \mathbf{y}_t) p_{t|t-1}^i(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}} \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Applicando nuovamente il teorema della probabilità totale alla PDF $p_{t|t-1}^i(\cdot)$, si ha:

$$\begin{aligned}
p_{t|t-1}^i(\mathbf{x}) &\triangleq PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \mathbf{z}^{t-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{\mu} PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, m_{t-2} = j, \mathbf{z}^{t-1}) Pr(m_{t-2} = j | m_{t-1} = i, \mathbf{z}^{t-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{t-1|t-1}^{j|i} PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, m_{t-2} = j, \mathbf{z}^{t-1}) \\
&\cong \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{t-1|t-1}^{j|i} PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j, \mathbf{P}_{t-1|t-1}^j) \\
&\cong PDF(\mathbf{x}_t = \mathbf{x} | m_{t-1} = i, \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{0i}, \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{0i})
\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

dove le stime e relative covarianze $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{0i}, \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{0i}$ sono ottenute da $\left\{ \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j, \mathbf{P}_{t-1|t-1}^j \right\}_{j=1}^{\mu}$ mediante fusione con le probabilità

$$\alpha_{t-1|t-1}^{j|i} \triangleq Pr(m_{t-2} = j | m_{t-1} = i, \mathbf{z}^{t-1})$$

Si noti che la penultima approssimazione in (6.3.9) equivale a sostituire il condizionamento rispetto a tutte le osservazioni precedenti \mathbf{z}^{t-1} ed all'ipotesi $m_{t-2} = j$ con il condizionamento rispetto alla stima $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j$ ed alla relativa covarianza $\mathbf{P}_{t-1|t-1}^j$ accordate al modo j . Viceversa, l'ultima approssimazione in (6.3.9) equivale a sostituire la mistura di PDF con un'unica PDF uguagliando i momenti (media e covarianza) della PDF a quelli della mistura).

Ad ogni istante temporale t , l'algoritmo IMM procede dunque nel seguente modo.

Algoritmo IMM

1. Si calcolano le probabilità di mescolamento tramite:

$$\alpha_{t-1|t-1}^{j|i} = \frac{p_{ij} \alpha_{t-1|t-1}^j}{\sum_{k=1}^{\mu} p_{ik} \alpha_{t-1|t-1}^k} \tag{6.3.10}$$

2. Si mescolano le stime modali $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j$ e relative covarianze $\mathbf{P}_{t-1|t-1}^j$ per ottenere le

condizioni iniziali mescolate $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{0i}$ e $\mathbf{P}_{t-1|t-1}^{0i}$ in accordo a:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{0i} &= \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{t-1|t-1}^{j|i} \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j \\ \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{0i} &= \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{t-1|t-1}^{j|i} \left[\mathbf{P}_{t-1|t-1}^j + \left(\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{0i} \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^j - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{0i} \right)^T \right] \end{cases} \quad (6.3.11)$$

3. Per ogni modo $i \in \mathcal{M}$, il filtro modale i -esimo, inizializzato da $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{0i}$ e $\mathbf{P}_{t-1|t-1}^{0i}$, basandosi sull'ipotesi $m_{t-1} = i$ e sulle osservazioni \mathbf{u}_{t-1} e \mathbf{y}_t , fornisce in uscita $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i$, $\mathbf{P}_{t|t}^i$ e la verosimiglianza

$$\ell_t^i \triangleq PDF(\mathbf{y}_t | m_{t-1} = i, \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{0i}, \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{0i}) = \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{e}_t^i)^T (\mathbf{S}_t^i)^{-1} \mathbf{e}_t^i \right]$$

dove $\mathbf{e}_t^i = \mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^i)$ è l'innovazione all'istante t del filtro modale i -esimo ed \mathbf{S}_t^i la relativa matrice di covarianza.

4. Si aggiornano le probabilità modali mediante (6.3.1).
5. Si determinano la stima dello stato $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ e la relativa covarianza $\mathbf{P}_{t|t}$ combinando le stime modali $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^i$ e relative covarianze $\mathbf{P}_{t|t}^i$ mediante (6.3.2).

Bibliografia

- [1] Y. Bar-Shalom, X. Rong Li, T. Kirubarajan (2001). *Estimation with application to tracking and navigation*, John Wiley & Sons.

Capitolo 7

Limite teorico di Cramer-Rao

Un criterio naturale per valutare le prestazioni di uno stimatore è l'errore quadratico medio definito come momento del secondo ordine dell'errore di stima. Poiché in molti problemi di stima, quando si ha a che fare con modelli non lineari e/o non Gaussiani, risulta impossibile determinare analiticamente lo stimatore ottimo (a minimo errore quadratico medio, MMSE) si deve fare ricorso a stimatori approssimati e, quindi, sub-ottimi. In tal caso, è di grande importanza pratica valutare l'entità dell'approssimazione introdotta. Nonostante l'impossibilità di determinare in forma chiusa lo stimatore MMSE, risulta possibile (come sarà mostrato in seguito) valutare un limite teorico, detto *limite inferiore di Cramer-Rao (CRLB)* [1, 2], al di sotto del quale l'errore quadratico medio di un qualunque stimatore non può scendere.

7.1 Stima parametrica

In questo paragrafo si pone l'attenzione sul problema della stima di un parametro $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ sulla base di un'osservazione $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ della variabile aleatoria Y .

Si definisce *stimatore* una funzione $\hat{x}(Y)$ della variabile aleatoria Y e, data l'osservazione y di Y , si dice che $\hat{x}(y)$ è la corrispondente stima. Assumendo il parametro x deterministico, in accordo ad un approccio non Bayesiano, si definisce la verosimiglianza del parametro x con l'osservazione y come la densità di probabilità $p(y|x)$ di y in corrispondenza del parametro incognito x .

Definizione - Uno stimatore $\hat{x}(\cdot)$ di x si dice **non polarizzato** se

$$E[\hat{x}(Y)] = x$$

o, equivalentemente, definito l'errore di stima $\tilde{x} \triangleq x - \hat{x}(Y)$

$$E[\tilde{x}] = 0$$

Si noti che, nel caso non Bayesiano, l'operatore di media nella suddetta definizione va interpretato come *media rispetto ad Y* secondo la densità $p(y|x)$. Assumendo che, in generale, lo stimatore possa essere polarizzato cioè

$$E[\hat{x}(Y)] = \gamma(x)$$

vale il seguente risultato fondamentale noto come *disuguaglianza di Cramer-Rao*.

Teorema 1 (Disuguaglianza di Cramer-Rao, 1945) - Qualunque sia lo stimatore $\hat{x}(\cdot)$, il suo *errore quadratico medio (MSE)* definito come

$$MSE(\hat{x}) \triangleq E[(x - \hat{x}(Y))(x - \hat{x}(Y))']$$

soddisfa la seguente disuguaglianza matriciale

$$MSE(\hat{x}) \geq \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) \right] J^{-1} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) \right]' \quad 1 \quad (7.1.1)$$

dove J , detta *matrice di informazione di Fisher (FIM)*, è definita nel seguente modo

$$J \triangleq E \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \log p(y|x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \log p(y|x) \right)' \right] = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log p(y|x) \right] \quad 2 \quad (7.1.2)$$

Dimostrazione - Per comodità di scrittura si definisce la funzione

$$\Phi(x, y) \triangleq \frac{\partial}{\partial x} \log p(y|x) \quad (7.1.3)$$

Si noti che

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial p} [\log p(y|x)] \frac{\partial}{\partial x} p(y|x) = \frac{1}{p(y|x)} \frac{\partial}{\partial x} p(y|x) \implies \frac{\partial}{\partial x} p(y|x) = \Phi(x, y) p(y|x)$$

Poichè $p(y|x)$ è una densità di probabilità, si deve avere

$$1 = \int p(y|x) dy \quad (7.1.4)$$

¹Per una funzione vettoriale $g(\cdot) = [g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_m(\cdot)]'$ si definisce con $\frac{\partial g}{\partial x} \triangleq \left[\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_m}{\partial x} \right]'$ il giacobiano di $g(\cdot)$ rispetto a x .

²Per una funzione scalare $f(x, \xi)$ si usano le notazioni $\frac{\partial}{\partial x} f(x, \xi) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, \xi), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x, \xi), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x, \xi) \right]'$, dove $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$, e $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} f(x, \xi) \triangleq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) \right)'$.

Inoltre, si ha

$$\gamma(x) = E[\hat{x}(Y)] = \int \hat{x}(y) p(y|x) dy \quad (7.1.5)$$

Differenziando (7.1.4) rispetto ad x , assumendo condizioni di regolarità tali da poter differenziare sotto il segno di integrale, si ottiene

$$0 = \int \frac{\partial}{\partial x} p(y|x) dy = \int \Phi(x, y) p(y|x) dy = E[\Phi(x, y)] \quad (7.1.6)$$

Analogamente, differenziando (7.1.5) rispetto ad x , si ha

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) = \int \hat{x}(y) \left[\frac{\partial}{\partial x} p(y|x) \right]' dy = \int \hat{x}(y) \Phi'(x, y) p(y|x) dy = E[\hat{x}(y) \Phi'(x, y)] \quad (7.1.7)$$

Sottraendo (7.1.7) e (7.1.6) membro a membro, si ottiene:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) = E[(\hat{x}(y) - x) \Phi'(x, y)] \quad (7.1.8)$$

Si consideri adesso la matrice di covarianza

$$E \begin{bmatrix} \hat{x}(y) - x \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} [(\hat{x}(y) - x)', \Phi'(x, y)] = \begin{bmatrix} MSE(\hat{x}) & \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial \gamma'}{\partial x}(x) & J \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.1.9)$$

dove si è fatto uso di (7.1.8) e del fatto che $E[\Phi(x, y) \Phi'(x, y)]$ coincide con la FIM definita in (7.1.2). Applicando il ben noto risultato

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies A - BC^{-1}B' \geq 0$$

alla matrice (7.1.9), si ottiene la disuguaglianza di Cramer-Rao (7.1.1). Differenziando (7.1.6) rispetto ad x , si ha

$$0 = \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi'(x, y) + \Phi(x, y) \Phi''(x, y) \right] p(y|x) dy = E \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi'(x, y) + \Phi(x, y) \Phi''(x, y) \right]$$

che implica $J = E[\Phi(x, y) \Phi'(x, y)] = -E \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi'(x, y) \right]$, da cui ricordando la definizione (7.1.3) si deduce immediatamente (7.1.2). \square

Commenti

- **Stimatori non polarizzati** - Nel caso di stimatori non polarizzati, si ha

$$\gamma(x) = x \implies \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x) = I.$$

Quindi la disuguaglianza di Cramer-Rao si riduce semplicemente a

$$MSE(\hat{x}) \geq J^{-1} \quad (7.1.10)$$

In particolare la componente (i, i) della matrice J^{-1} rappresenta il limite inferiore sulla varianza della stima della componente i -esima del vettore di parametri x .

- **Valutazione del CRLB** - Si noti che la matrice di informazione di Fisher J e, quindi, il CRLB non dipendono dall'osservazione y mentre, in generale, essi dipendono da x . La valutazione del CRLB andrebbe fatta in corrispondenza del valore vero x_0 di x . Nel caso in cui quest'ultimo non sia disponibile, si potrebbe approssimare il CRLB mediante linearizzazione valutandolo in corrispondenza della stima anche se, naturalmente, questo potrebbe portare ad un risultato del tutto incorretto se la stima a disposizione non è buona.
- **Limite di Cramer-Rao a Posteriori (PCRLB)** - Un risultato del tutto analogo è stato ottenuto nel caso Bayesiano in cui il parametro è considerato come una variabile aleatoria X . Il limite teorico ottenuto in questo caso, noto come *limite di van Trees (1968)* o anche *limite di Cramer-Rao a Posteriori (PCRLB)*, è lo stesso del teorema 1 purchè si sostituisca $p(y|x)$ con la densità di probabilità congiunta $p(x, y)$ e si interpreti l'operatore $E[\cdot]$ come media rispetto alle variabili aleatorie congiunte X e Y secondo la densità $p(x, y)$.

7.2 Regressione non lineare con rumore additivo Gaussiano

Si consideri il modello di osservazione

$$\begin{cases} y = h(x) + v \\ v \sim p_v(\cdot) = \mathcal{N}(\cdot; 0, R) \end{cases} \quad (7.2.1)$$

per il quale di seguito si valuteranno, a titolo di esemplificazione, CRLB e PCRLB. Per il calcolo del CRLB, si nota che:

$$p(y|x) = p_v(y - h(x)) = \frac{1}{(2\pi)^{n_y/2} \det^{1/2} R} \exp \left[-\frac{1}{2} (y - h(x))' R^{-1} (y - h(x)) \right]$$

da cui

$$\log p(y|x) = -\frac{1}{2} (y - h(x))' R^{-1} (y - h(x)) + c$$

dove c è una costante indipendente da x . Pertanto,

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \log p(y|x) = \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x) \right]' R^{-1} (y - h(x)) = C'(x) R^{-1} v$$

dove

$$C(x) \triangleq \frac{\partial h}{\partial x}(x)$$

è il giacobiano della funzione $h(\cdot)$ rispetto ad x . Quindi la matrice di informazione di Fisher risulta:

$$J = J(x) \triangleq E [\Phi(x, y)\Phi'(x, y)] = C'(x)R^{-1}C(x)$$

ed ogni stimatore \hat{x} di x basato su y dovrà soddisfare:

$$MSE(\hat{x}) \geq [C'(x_0)R^{-1}C(x_0)]^{-1}$$

dove il CRLB è valutato in corrispondenza del valore vero x_0 di x .

Si assume adesso che la grandezza da stimare x sia una variabile aleatoria con distribuzione Gaussiana di media \bar{x} e varianza P , cioè

$$X \sim p(\cdot) = \mathcal{N}(\cdot; \bar{x}, P).$$

Per il calcolo del PCRLB, si osserva che:

$$p(x, y) = p(y|x)p(x) \propto \exp \left[-\frac{1}{2}(y - h(x))'R^{-1}(y - h(x)) - \frac{1}{2}(x - \bar{x})'P^{-1}(x - \bar{x}) \right]$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial x} \log p(x, y) = C'(x)R^{-1}v + P^{-1}(\bar{x} - x).$$

Quindi $MSE(\hat{x}) \geq J^{-1}$ con

$$J \triangleq E_{X,Y} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \log p(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \log p(x, y) \right)' \right] = E_X [C'(x)R^{-1}C(x)] + P^{-1}$$

Si noti che il calcolo del PCRLB richiede, rispetto al caso del CRLB, l'ulteriore complicazione della valutazione dell'operatore di media $E_X[\dots]$ rispetto ad x . A tale proposito si può utilizzare il metodo Monte Carlo, generando un elevato numero di campioni x_i con la distribuzione di probabilità $p(\cdot)$ cioè

$$x_i \sim p(x) = \mathcal{N}(x; \bar{x}, P) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ed approssimando la matrice di informazione con

$$J \cong P^{-1} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C'(x_i) R^{-1} C(x_i)$$

7.3 Stimatori efficienti

Si introduce la seguente definizione di *stimatore efficiente*.

Definizione - Uno stimatore non polarizzato dicesi *efficiente* se il suo errore quadratico medio è uguale al limite inferiore di Cramer-Rao (inverso della matrice di informazione di Fisher), vale a dire

$$MSE(\hat{x}) \triangleq E[\tilde{x}\tilde{x}'] = J^{-1}$$

Si consideri un modello lineare con rumore additivo Gaussiano, caso particolare del modello (7.2.1) con

$$h(x) = Cx \implies C(x) \triangleq \frac{\partial h}{\partial x}(x) = C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}$$

Si noti che in questo caso particolare sia il CRLB che il PCRLB:

$$\begin{aligned} CRLB &= (C'R^{-1}C)^{-1} \\ PCRLB &= (P^{-1} + C'R^{-1}C)^{-1} \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

risultano entrambi indipendenti da x e pertanto possono essere determinati senza conoscere il valore vero x_0 e, rispettivamente, senza approssimazione Monte Carlo. D'altro canto, come ben noto, nel caso lineare Gaussiano è possibile determinare esplicitamente lo stimatore ottimo MMSE

$$\hat{x}(y) = (P^{-1} + C'R^{-1}C)^{-1} (P^{-1}\bar{x} + C'R^{-1}y) = J^{-1} (P^{-1}\bar{x} + C'R^{-1}y)$$

che deve risultare efficiente per definizione. Infatti

$$\hat{x}(y) - x = J^{-1} (P^{-1}\bar{x} - Jx + C'R^{-1}y) = J^{-1} [P^{-1}(\bar{x} - x) + C'R^{-1}v]$$

da cui

$$MSE(\hat{x}) \triangleq E[(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)'] = J^{-1} (P^{-1} + C'R^{-1}C) J^{-1} = J^{-1} J J^{-1} = J^{-1}$$

ovvero lo stimatore MMSE si assesta proprio sul limite inferiore di Cramer-Rao. Si noti che nei suddetti sviluppi si è fatto riferimento all'interpretazione Bayesiana della stima (PCRLB); per quanto riguarda l'interpretazione non Bayesiana (CRLB) è sufficiente sostituire $P^{-1} = 0$ nei risultati ottenuti.

In generale (modelli non lineari e/o non Gaussiani) non è garantita l'esistenza di stimatori efficienti. Il seguente risultato fornisce condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di stimatori efficienti.

Teorema 2 - Sotto opportune condizioni di regolarità, esiste uno stimatore (non polarizzato) efficiente di x basato su y se e solo se

$$\Phi(x, y) \triangleq \frac{\partial}{\partial x} \log p(y|x) = J(x) [\hat{x}(y) - x] \quad (7.3.2)$$

dove la matrice $J(x)$ non dipende da y mentre il vettore $\hat{x}(y)$ non dipende da x .

Dimostrazione - *Sufficienza*. Assumendo la validità di (7.3.2) e la non polarizzazione di \hat{x} ($\gamma(x) = x$) in (7.1.9) si ha

$$\begin{aligned}
& E \begin{bmatrix} \hat{x}(y) - x \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} [(\hat{x}(y) - x)', \Phi'(x, y)] = \\
& = \begin{bmatrix} MSE(\hat{x}) & I \\ I & J \end{bmatrix} = \\
& = E \begin{bmatrix} \hat{x}(y) - x \\ J(x)(\hat{x}(y) - x) \end{bmatrix} [(\hat{x}(y) - x)', (\hat{x}(y) - x)'J(x)] = \\
& = \begin{bmatrix} MSE(\hat{x}) & MSE(\hat{x})J(x) \\ J(x)MSE(\hat{x}) & J(x)MSE(\hat{x})J(x) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

da cui si deducono le relazioni

$$\begin{aligned}
J(x) MSE(\hat{x}) &= I \implies MSE(\hat{x}) = J^{-1}(x) \\
J(x) MSE(\hat{x}) J(x) &= J(x) = J \implies MSE(\hat{x}) = J^{-1}(x) = J^{-1}
\end{aligned}$$

Quindi esiste uno stimatore, $\hat{x}(y)$, il cui MSE si assesta sul CRLB J^{-1} come volevasi dimostrare.

Necessità. Si assuma $MSE(\hat{x}) = J^{-1}(x)$. Allora

$$E \begin{bmatrix} \hat{x}(y) - x \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} [(\hat{x}(y) - x)', \Phi'(x, y)] = \begin{bmatrix} J^{-1}(x) & I \\ I & J(x) \end{bmatrix} \tag{7.3.4}$$

Pre-moltiplicando (7.3.4) per $[J(x), -I]$ e post-moltiplicando per $[J(x), -I]'$, si ha

$$E [J(x)(\hat{x}(y) - x) - \Phi(x, y)] [J(x)(\hat{x}(y) - x) - \Phi(x, y)]' = 0$$

da cui si deduce che $\Phi(x, y) = J(x)[\hat{x}(y) - x]$ ed il teorema è dimostrato. \square

Si noti come la fattorizzazione (7.3.2) di $\Phi(x, y)$, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di uno stimatore efficiente, fornisca di fatto sia lo stimatore efficiente $\hat{x}(y)$ che il suo MSE $J(x)$ uguale al CRLB. Si può facilmente verificare che il modello lineare Gaussiano soddisfa le condizioni del teorema 2. Infatti, in questo caso risulta

$$\Phi(x, y) = C'R^{-1}(y - Cx) + P^{-1}(\bar{x} - x) = J(x)[\hat{x}(y) - x]$$

dove

$$\begin{aligned}
J(x) &= J = P^{-1} + C'R^{-1}C \\
\hat{x}(y) &= J^{-1}(C'R^{-1}y + P^{-1}\bar{x}) = (P^{-1} + C'R^{-1}C)^{-1}(C'R^{-1}y + P^{-1}\bar{x})
\end{aligned}$$

7.4 Stima dello stato

Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} x_{t+1} = f_t(x_t, u_t, w_t) \\ y_t = h_t(x_t, v_t) \\ w_t \sim wn(0, Q_t) \\ v_t \sim wn(0, R_t) \end{cases} \quad (7.4.1)$$

di cui si vuole stimare ricorsivamente lo stato x_t . Per poter applicare i risultati sul PCRLB dei precedenti paragrafi, si può considerare il problema di stimare all'istante t l'intera sequenza degli stati $x^t \triangleq \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_t\}$ condizionatamente all'intera sequenza delle misure $y^t \triangleq \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$. Una stima non polarizzata $\hat{x}^{t|t}$ di x^t basata su y^t deve pertanto soddisfare la seguente disuguaglianza di Cramer-Rao

$$E [(\hat{x}^{t|t} - x^t) (\hat{x}^{t|t} - x^t)] \geq I_t^{-1} \quad (7.4.2)$$

dove la matrice di informazione di Fisher I_t è definita nel seguente modo:

$$\begin{aligned} I_t &= E \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^t} \log p(x^t, y^t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^t} \log p(x^t, y^t) \right)' \right] \\ &= -E \left[\frac{\partial^2}{\partial x^t \partial x^t} \log p(x^t, y^t) \right] \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Posto $x^t = [(x^{t-1})', x_t]'$ e conseguentemente $\hat{x}^{t|t} = [(\hat{x}^{t-1|t})', \hat{x}_{t|t}]'$, si partiziona la matrice I_t di dimensione $tn_x \times tn_x$ nel seguente modo

$$I_t = \begin{bmatrix} A_t & B_t \\ B_t' & C_t \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} A_t &= -E \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{t-1} \partial x^{t-1}} \log p(x^t, y^t) \right] \\ B_t &= -E \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{t-1} \partial x_t} \log p(x^t, y^t) \right] \\ C_t &= -E \left[\frac{\partial^2}{\partial x_t \partial x_t} \log p(x^t, y^t) \right] \end{aligned}$$

Utilizzando un ben noto risultato sull'inversione di matrici partizionate a blocchi, si ha

$$I_t^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & (C_t - B_t' A_t^{-1} B_t)^{-1} \end{bmatrix}$$

Pertanto

$$E [(\hat{x}^{t|t} - x^t) (\hat{x}^{t|t} - x^t)] = \begin{bmatrix} * & * \\ * & MSE(\hat{x}_{t|t}) \end{bmatrix} \geq I_t^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & (C_t - B_t' A_t^{-1} B_t)^{-1} \end{bmatrix}$$

da cui

$$MSE(\hat{x}_{t|t}) = E [(x_t - \hat{x}_{t|t}) (x_t - \hat{x}_{t|t})'] \geq J_t^{-1} \triangleq (C_t - B_t' A_t^{-1} B_t)^{-1} \quad (7.4.4)$$

In alcuni casi l'obiettivo è quello di stimare una variabile z_t legata allo stato x_t da una generica trasformazione non lineare

$$z_t = g(x_t)$$

Come è stato dimostrato in [3], si ha

$$MSE(\hat{z}_{t|t}) \geq G_t J_t^{-1} G_t' \quad (7.4.5)$$

dove

$$G_t \triangleq \frac{\partial g}{\partial x}(x_t).$$

La precedente espressione (7.4.4) fornisce un limite teorico non ricorsivo sulla varianza dello stimatore $\hat{x}_{t|t}$ che richiede, all'istante t , l'inversione della matrice A_t di dimensioni $(t-1)n_x \times (t-1)n_x$. Fortunatamente Tichavsky et al. [4] hanno fornito un elegante metodo ricorsivo per calcolare la sequenza J_t per $t = 0, 1, 2, \dots$ partendo dalla condizione iniziale

$$J_0 \triangleq E \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \log p(x_0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \log p(x_0) \right)' \right] \quad (7.4.6)$$

dove $p(\cdot)$ è la densità di probabilità a priori dello stato iniziale x_0 . Tipicamente si assume $p(x_0) = \mathcal{N}(x_0; \hat{x}_{0|0}, P_{0|0})$ da cui con semplici calcoli si verifica che $J_0 = P_{0|0}^{-1}$.

La ricorsione di Tichavsky et al. assume la forma

$$J_{t+1} = D_t^{22} - D_t^{21} (J_t + D_t^{11})^{-1} D_t^{12} \quad (7.4.7)$$

con

$$\begin{aligned} D_t^{11} &= -E \left[\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} \log p(x_{t+1}|x_t) \right] \\ D_t^{12} &= -E \left[\frac{\partial^2}{\partial x_t \partial x_{t+1}} \log p(x_{t+1}|x_t) \right] \\ D_t^{21} &= -E \left[\frac{\partial^2}{\partial x_{t+1} \partial x_t} \log p(x_{t+1}|x_t) \right] = (D_t^{12})' \\ D_t^{22} &= -E \left[\frac{\partial^2}{\partial x_{t+1}^2} \log p(x_{t+1}|x_t) \right] - E \left[\frac{\partial^2}{\partial x_{t+1}^2} \log p(y_{t+1}|x_{t+1}) \right] \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

Per esemplificare il procedimento, si considera un sistema con rumori additivi Gaussiani

$$\begin{cases} x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) + w_t \\ y_t = h_t(x_t) + v_t \\ w_t \sim \text{wgn}(0, Q_t) \\ v_t \sim \text{wgn}(0, R_t) \end{cases} \quad (7.4.9)$$

per il quale

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|x_t) &= p_{w_t}(x_{t+1} - f_t(x_t, u_t)) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(x_{t+1} - f_t(x_t, u_t))' Q_t^{-1} (x_{t+1} - f_t(x_t, u_t))\right] \\ p(y_t|x_t) &= p_{v_t}(y_t - h_t(x_t)) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(y_t - h_t(x_t))' R_t^{-1} (y_t - h_t(x_t))\right] \end{aligned} \quad (7.4.10)$$

Con semplici calcoli si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_t} \log p(x_{t+1}|x_t) &= \left[\frac{\partial f_t}{\partial x}(x_t, u_t) \right]' Q_t^{-1} (x_{t+1} - f_t(x_t, u_t)) \\ \frac{\partial}{\partial x_{t+1}} \log p(x_{t+1}|x_t) &= -Q_t^{-1} (x_{t+1} - f_t(x_t, u_t)) \\ \frac{\partial}{\partial x_{t+1}} \log p(y_{t+1}|x_{t+1}) &= \left[\frac{\partial h_{t+1}}{\partial x}(x_{t+1}) \right]' R_t^{-1} (y_{t+1} - h_{t+1}(x_{t+1})) \end{aligned}$$

da cui, utilizzando (7.4.8), si ottiene

$$\begin{aligned} D_t^{11} &= E [A_t' Q_t^{-1} A_t] \\ D_t^{12} &= -E [A_t'] Q_t^{-1} \\ D_t^{21} &= -Q_t^{-1} E [A_t] \\ D_t^{22} &= Q_t^{-1} + E [C_{t+1}' R_{t+1}^{-1} C_{t+1}] \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} A_t &= A_t(x_t) = \frac{\partial f_t}{\partial x}(x_t, u_t) \\ C_{t+1} &= C_{t+1}(x_{t+1}) = \frac{\partial h_{t+1}}{\partial x}(x_{t+1}) \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

Pertanto, nel caso di rumori Gaussiani additivi, la ricorsione (7.4.7) diventa:

$$J_{t+1} = Q_t^{-1} + E [C_{t+1}' R_{t+1}^{-1} C_{t+1}] - Q_t^{-1} E [A_t] (J_t + E [A_t' Q_t^{-1} A_t])^{-1} E [A_t'] Q_t^{-1} \quad (7.4.12)$$

Si noti che nel caso in cui lo stato x_t sia stocastico (rumore di processo w_t non nullo), il calcolo di (7.4.12) richiede la valutazione delle medie $E [A_t]$, $E [A_t' Q_t^{-1} A_t]$ ed

$E [C'_{t+1} R_{t+1}^{-1} C_{t+1}]$ rispetto a x_t . Tale valutazione può essere effettuata con un metodo di approssimazione Monte Carlo, propagando un insieme di traiettorie dello stato x_t^i per $i = 1, 2, \dots, M$ ottenute a partire da condizioni iniziali generate casualmente $x_0^i \sim p(x_0)$ e generando casualmente in modo indipendente anche le realizzazioni $w_t^i \sim wgn(0, Q_t)$ del disturbo di processo. Da tale insieme di traiettorie si possono approssimare le medie in modo campionario tramite

$$E [A'_t Q_t^{-1} A_t] \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M A'_t(x_t^i) Q_t^{-1} A_t(x_t^i)$$

ed espressioni analoghe per le altre medie. Nel caso, viceversa, di evoluzione dello stato deterministica (rumore di processo w_t nullo) non compaiono medie in (7.4.12) ed i giacobiani $A_t(x_t)$ e $C_{t+1}(x_{t+1})$ in (7.4.11) vanno valutati in corrispondenza dello stato vero, se disponibile, oppure approssimativamente in corrispondenza della stima.

Nell'ulteriore caso particolare di sistema lineare Gaussiano:

$$\begin{cases} x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t \\ y_t = C_t x_t + v_t \\ w_t \sim wgn(0, Q_t) \\ v_t \sim wgn(0, R_t) \end{cases} \quad (7.4.13)$$

i jacobiani in (7.4.11) risultano indipendenti dallo stato e, pertanto, la ricorsione del PCRLB si riduce a

$$J_{t+1} = Q_t^{-1} + C'_{t+1} R_{t+1}^{-1} C_{t+1} - Q_t^{-1} A_t (J_t + A'_t Q_t^{-1} A_t)^{-1} A'_t Q_t^{-1} \quad (7.4.14)$$

Utilizzando il lemma di inversione

$$(A + BCB')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B (C^{-1} + B'A^{-1}B)^{-1} B'A^{-1} \quad (7.4.15)$$

si verifica che

$$Q_t^{-1} - Q_t^{-1} A_t (J_t + A'_t Q_t^{-1} A_t)^{-1} A'_t Q_t^{-1} = (Q_t + A_t J_t^{-1} A'_t)^{-1}$$

che, sostituita nella (7.4.15), fornisce

$$J_{t+1} = (Q_t + A_t J_t^{-1} A'_t)^{-1} + C'_{t+1} R_{t+1}^{-1} C_{t+1} \quad (7.4.16)$$

Nel seguito si vuole dimostrare, per induzione, che se $J_0 = P_{0|0}^{-1}$ allora $J_t = P_{t|t}^{-1}$ per ogni $t > 0$ dove $P_{t|t}$ è la matrice di covarianza fornita dal filtro di Kalman. A tale proposito si assuma $J_t = P_{t|t}^{-1}$. Questo implica

$$Q_t + A_t J_t^{-1} A'_t = Q_t + A_t P_{t|t} A'_t = P_{t+1|t}$$

che, sostituita in (7.4.16), fornisce

$$J_{t+1} = P_{t+1|t}^{-1} + C'_{t+1} R_{t+1}^{-1} C_{t+1} \quad (7.4.17)$$

Invertendo (7.4.17) e sfruttando (7.4.15), si ottiene quindi

$$J_{t+1}^{-1} = P_{t+1|t} - P_{t+1|t} C'_{t+1} (R_{t+1} + C_{t+1} P_{t+1|t} C'_{t+1})^{-1} C_{t+1} P_{t+1|t} = P_{t+1|t+1}$$

Questo mostra per induzione che, nel caso lineare Gaussiano, la matrice di informazione di Fisher coincide ad ogni t con l'inversa della matrice di covarianza del filtro di Kalman ad ulteriore riprova del fatto che quest'ultimo fornisce, nel caso lineare Gaussiano, la stima ottima a minimo errore quadratico medio.

Bibliografia

- [1] H. Cramér: *Mathematical Methods of Statistics*, University Press, Princeton, 1946.
- [2] C. Rao: “Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters”, *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, vol. 37, pp. 81-89, 1945.
- [3] H.L. van Trees: *Detection, estimation and modulation theory*, Wiley, New York, 1968.
- [4] P. Tichavsky, C.H. Muravchik, A. Nehorai: “Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, pp. 1386-1396, 1998.