ES. DISCUTERE al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x \cdot \arctg\sqrt{x}}{e^{x}}\,dx$$

oss: $0 < \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} < 1$. la funzione $\frac{\sin x \cdot \arctg\sqrt{x}}{e^{x}} \in C^{0}([0,1])$ quindi dal teo della media
$\exists\, \xi_n \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right)$ t.c.

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x \cdot \arctg\sqrt{x}}{e^{x}}\,dx = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{\sin\xi_n \cdot \arctg\sqrt{\xi_n}}{e^{\xi_n}} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sin\xi_n \arctg\sqrt{\xi_n} \cdot e^{-\xi_n}$$

oss: $\forall n$ $\frac{1}{n+1} < \xi_n < \frac{1}{n} \Rightarrow \xi_n = \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$ e $\xi_n \to 0$, da cui

$\sin\xi_n = \Theta(\xi_n) = \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$ e $e^{\xi_n} = \Theta(1)$

$\arctg\sqrt{\xi_n} = \Theta(\sqrt{\xi_n}) = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

segue

$$\underbrace{n^{\alpha} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \sin x \cdot \arctg\sqrt{x}\, e^{-x}\,dx}_{\doteq a_n} = \frac{n^{\alpha}}{n(n+1)} \Theta\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \Theta\left(\frac{1}{n^{3/2+2-\alpha}}\right)$$

Inoltre la succ $a_n > 0$ $\forall n$ in quanto $\forall x \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right)$ si ha $x \in (0,1)$ e
$\sin x \cdot \arctg\sqrt{x}\, e^{-x} > 0$ $\forall x \in (0,1)$.

dal criterio del confronto asintotico si ha quindi
$\sum_{1}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso comportamento di $\sum \frac{1}{n^{\frac{7}{2}-\alpha}}$

quindi la serie converge sse $\frac{7}{2} - \alpha > 1$ cioè $\alpha < \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$.