Integrazione multipla in $\mathbb{R}^3$ (Integrali tripli) -parte 2-

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/04/2020

Integrali tripli

- Definizione: Un sottoinsieme limitato A di $\mathbb{R}^3$ si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) quando è integrabile in A la funzione $f(x,y,z) \equiv 1$. In tal caso, la misura (3D) di A, detta anche "volume", è il numero: $\boxed{\mu_3(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz.}$

Integrali tripli

- Definizione: Un sottoinsieme limitato A di $\mathbb{R}^3$ si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) quando è integrabile in A la funzione $f(x,y,z) \equiv 1$. In tal caso, la misura (3D) di A, detta anche "volume", è il numero: $\mu_3(A) = \iiint_A 1 \, dx\, dy\, dz$.

- Teorema (di additività rispetto all'insieme di integrazione)

Supponiamo che la funzione $f(x,y,z)$ sia integrabile sia in un insieme A che in un insieme B tali che $A \cap B = \phi$ (o, più in generale $A \cap B$ trascurabile). Allora f è integrabile in $A \cup B$ e vale che:

$$\boxed{\iiint_{A \cup B} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz} \qquad (I)$$

Integrali tripli

- Definizione: Un sottoinsieme limitato A di $\mathbb{R}^3$ si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) quando è integrabile in A la funzione $f(x,y,z) \equiv 1$. In tal caso, la misura (3D) di A, detta anche "volume", è il numero: $\mu_3(A) = \iiint_A 1 \, dx\, dy\, dz$.

- Teorema (di additività rispetto all'insieme di integrazione)

  Supponiamo che la funzione $f(x,y,z)$ sia integrabile sia in un insieme A che in un insieme B tali che $A \cap B = \phi$ (o, più in generale $A \cap B$ trascurabile). Allora f è integrabile in $A \cup B$ e vale che:

$$\iiint_{A\cup B} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad (I)$$

- Diamo adesso un'applicazione del Teorema di Fubini al calcolo di integrali tripli in insiemi con una forma particolare.

Integrali tripli

- Definizione: Un sottoinsieme limitato A di $\mathbb{R}^3$ si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) quando è integrabile in A la funzione $f(x,y,z) \equiv 1$. In tal caso, la misura (3D) di A, detta anche "volume", è il numero: $\mu_3(A) = \iiint_A 1 \, dx\, dy\, dz$.

- Teorema (di additività rispetto all'insieme di integrazione)

  Supponiamo che la funzione $f(x,y,z)$ sia integrabile sia in un insieme A che in un insieme B tali che $A \cap B = \phi$ (o, più in generale $A \cap B$ trascurabile). Allora f è integrabile in $A \cup B$ e vale che:

$$\iiint_{A\cup B} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad (I)$$

- Diamo adesso un'applicazione del Teorema di Fubini al calcolo di integrali tripli in insiemi con una forma particolare. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme del tipo:

$$\boxed{A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2, \ f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}}$$

dove $f_1, f_2 : G \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue su un sottoinsieme chiuso e limitato $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

Integrali tripli

- Definizione: Un sottoinsieme limitato A di $\mathbb{R}^3$ si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) quando è integrabile in A la funzione $f(x,y,z) \equiv 1$. In tal caso, la misura (3D) di A, detta anche "volume", è il numero: $\mu_3(A) = \iiint_A 1 \, dx\, dy\, dz$.

- Teorema (di additività rispetto all'insieme di integrazione)

  Supponiamo che la funzione $f(x,y,z)$ sia integrabile sia in un insieme A che in un insieme B tali che $A \cap B = \phi$ (o, più in generale $A \cap B$ trascurabile). Allora f è integrabile in $A \cup B$ e vale che:

$$\iiint_{A\cup B} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad (I)$$

- Diamo adesso un'applicazione del Teorema di Fubini al calcolo di integrali tripli in insiemi con una forma particolare. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme del tipo:

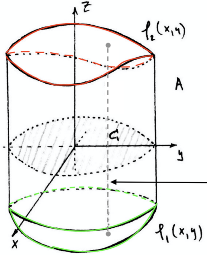
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2 ,\ f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y) \}.$$

dove $f_1, f_2 : G \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue su un sottoinsieme chiuso e limitato $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

L'insieme A si dice semplice rispetto all'asse delle z (o z-semplice) poiché ogni retta parallela →

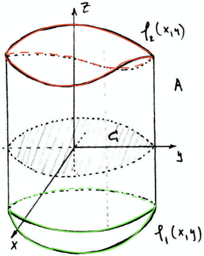
a tale asse interseca A in un intervallo (di estremi $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$, per $(x,y) \in C_1$).

proiezione di A sul piano xy



intervallo parallelo all'asse z e di estremi $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$

a tale asse interseca A in un intervallo (di estremi $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$, per $(x,y) \in C_1$).

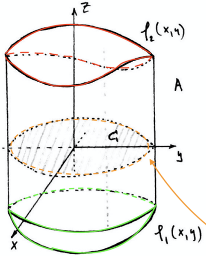


- Supponiamo che f sia una funzione integrabile in A.

Dal Teorema di Fubini si ottiene le seguente <u>formule di riduzione</u>, dette anche formule di integrazione per "fili" o per "spaghetti" (<u>paralleli all'asse z</u>), valide per gli insiemi che sono semplici rispetto all'asse z:

$$\text{(II)} \quad \boxed{\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_C \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy}$$

a tale asse interseca A in un intervallo (di estremi $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$, per $(x,y) \in C_1$).

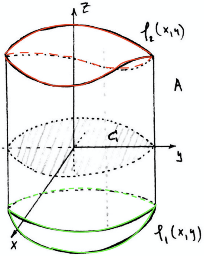


- Supponiamo che f sia una funzione integrabile in A. Dal Teorema di Fubini si ottiene le seguente formule di riduzione, dette anche formule di integrazione per "fili" o per "spaghetti" (paralleli all'asse z), valide per gli insiemi che sono semplici rispetto all'asse z:

$$(\mathrm{II}) \quad \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{C_1} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

dove C_1 è la proiezione ortogonale di A sul piano xy e $f_1, f_2 : C_1 \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue i cui grafici delimitano A.

a tale asse interseca A in un intervallo (di estremi $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$, per $(x,y) \in C$).



- Supponiamo che f sia una funzione integrabile in A.

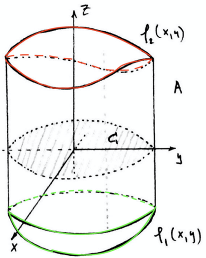
Dal Teorema di Fubini si ottiene le seguente formule di riduzione, dette anche formule di integrazione per "fili" o per "spaghetti" (paralleli all'asse z), valide per gli insiemi che sono semplici rispetto all'asse z:

$$\text{(II)} \quad \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_C \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

dove C è la proiezione ortogonale di A sul piano xy e $f_1, f_2 : C \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue i cui grafici delimitano A.

- Oltre alle formule di integrazione per fili nelle formule (II), si hanno altre due formule formule analoghe: una con fili paralleli all'asse x e l'altra con fili paralleli all'asse y.

a tale asse interseca A in un intervallo (di estremi $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$, per $(x,y) \in C$).



- Supponiamo che f sia una funzione integrabile in A. Dal Teorema di Fubini si ottiene la seguente formula di riduzione, detta anche formula di integrazione per "fili" o per "spaghetti" (paralleli all'asse z), valida per gli insiemi che sono semplici rispetto all'asse z:

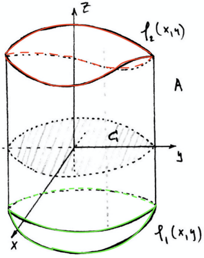
$$(\mathrm{II}) \quad \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_C \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

dove C è la proiezione ortogonale di A sul piano xy e $f_1, f_2 : C \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue i cui grafici delimitano A.

- Oltre alla formula di integrazione per fili nella formula (II), si hanno altre due formule formule analoghe: una con fili paralleli all'asse x e l'altra con fili paralleli all'asse y.

- Nel seguito assumiamo che C sia un insieme regolare di $\mathbb{R}^2$.

a tale asse interseca A in un intervallo (di estremi $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$, per $(x,y) \in C$).



- Supponiamo che f sia una funzione integrabile in A. Dal Teorema di Fubini si ottiene le seguente <u>formule di riduzione</u>, dette anche formule di integrazione per "fili" o per "spaghetti" (paralleli all'asse z), valide per gli insiemi che sono semplici rispetto all'asse z:

$$\text{(II)} \quad \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_C \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

dove C è la proiezione ortogonale di A sul piano xy e $f_1, f_2 : C \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue i cui grafici delimitano A.

- Oltre alle formule di integrazione per fili nelle formule (II), si hanno altre due formule formule analoghe: una con fili paralleli all'asse x e l'altra con fili paralleli all'asse y.

- Nel seguito assumiamo che C sia un insieme regolare di $\mathbb{R}^2$.

<u>Esempio</u>

Calcolare l'integrale $\iiint_A \overset{f(x,y,z)=z}{z}\,dx\,dy\,dz$ dove $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2+4y^2\}$

L'insieme A è z-semplice e $\boxed{f_1(x,y) \equiv 0 \text{ mentre } f_2(x,y) = x^2 + 4y^2}$ e l'insieme C_1', in questo caso, è dato da:

$$\boxed{C_1' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}} \leftarrow$$

Proiezione sul piano xy dell'insieme A

L'insieme A è z-semplice e $f_1(x,y) \equiv 0$ mentre $f_2(x,y) = x^2 + 4y^2$ e l'insieme C_1', in questo caso, è dato da:

$$C_1' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$ ← Proiezione sul piano xy dell'insieme A

Usando la formula di integrazione per fili in (II):

$$\boxed{\iiint_A z \, dx\, dy\, dz = \iint_{C_1'} \left(\int_0^{x^2+4y^2} z \, dz \right) dx\, dy = \iint_{C_1'} \frac{(x^2+4y^2)^2}{2} \, dx\, dy} \quad \text{(III)}$$

↑ integrale doppio

L'insieme A è z-semplice e $f_1(x,y) \equiv 0$ mentre $f_2(x,y) = x^2+4y^2$ e l'insieme C_1, in questo caso, è dato da:

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \leq 1\}$$ ← Proiezione sul piano xy dell'insieme A

Usando la formula di integrazione per fili in (II):

$$\iiint_A z \, dx\,dy\,dz = \iint_{C_1} \left(\int_0^{x^2+4y^2} z \, dz \right) dx\,dy = \iint_{C_1} \frac{(x^2+4y^2)^2}{2} dx\,dy \quad \text{(III)}$$

↑ integrale doppio

Per risolvere l'ultimo integrale doppio in (III) conviene usare le coordinate ellittiche $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$

osservando che $\partial C_1 = \{(x,y) : x^2 + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1\}$ si descrive con $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\theta \end{cases}$ $0 \leq \theta < 2\pi$

L'insieme A è z-semplice e $f_1(x,y) \equiv 0$ mentre $f_2(x,y) = x^2+4y^2$ e l'insieme C_1, in questo caso, è dato da:

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \leq 1\}$$ ← Proiezione sul piano xy dell'insieme A

Usando la formule di integrazione per fili in (II):

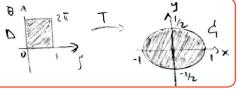
$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \iint_{C_1} \left(\int_0^{x^2+4y^2} z\,dz \right) dx\,dy = \iint_{C_1} \frac{(x^2+4y^2)^2}{2}\,dx\,dy \quad \text{(III)}$$

↑ integrale doppio

Per risolvere l'ultimo integrale doppio in (III) conviene usare le coordinate ellittiche $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$

osservando che $\partial C_1 = \{(x,y) : x^2 + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1\}$

e tutto l'insieme C_1 con $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ descritto da $T: [0,1] \times [0,2\pi] \to C_1$



L'insieme A è z-semplice e $f_1(x,y) \equiv 0$ mentre $f_2(x,y) = x^2 + 4y^2$ e l'insieme C_1, in questo caso, è dato da:

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 1\}$$ ← Proiezione sul piano xy dell'insieme A

Usando la formula di integrazione per fili in (II):

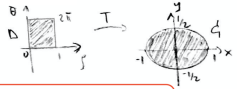
$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \iint_{C_1} \left(\int_0^{x^2+4y^2} z\,dz \right) dx\,dy = \iint_{C_1} \frac{(x^2+4y^2)^2}{2}\,dx\,dy \quad \text{(III)}$$

↑ integrale doppio

Per risolvere l'ultimo integrale doppio in (III) conviene usare le coordinate ellittiche $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$

osservando che $\partial C_1 = \{(x,y) : x^2 + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1\}$

e tutto l'insieme C_1 con $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ descritto da $T: [0,1] \times [0, 2\pi] \to C_1$



$$\boxed{\text{in questo caso } T(\rho,\theta) = \left(\rho\cos\theta, \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \text{ e } \det J_T = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\theta & \frac{1}{2}\rho\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\rho}$$

L'insieme A è z-semplice e $f_1(x,y)\equiv 0$ mentre $f_2(x,y)=x^2+4y^2$ e l'insieme C_1, in questo caso, è dato da:

$$C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2\le 1\} \leftarrow$$ Proiezione sul piano xy dell'insieme A

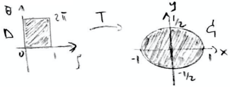
Usando la formula di integrazione per fili in (II):

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \iint_{C_1}\left(\int_0^{x^2+4y^2} z\,dz\right)dx\,dy = \iint_{C_1}\underbrace{\frac{(x^2+4y^2)^2}{2}\,dx\,dy}_{\uparrow\ \text{integrale doppio}} \qquad (III)$$

Per risolvere l'ultimo integrale doppio in (III) conviene usare le coordinate ellittiche $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\rho\le 1$

osservando che $\partial C_1=\{(x,y): x^2+\frac{y^2}{(1/2)^2}=1\}$

e tutto l'insieme C_1 con $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ descritto da $T:[0,1]\times[0,2\pi]\to C_1$



in questo caso $T(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta, \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $\det J_T=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\theta & \frac{1}{2}\rho\cos\theta\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\rho$ e si ha quindi

$$\boxed{(III)=\iint_C\frac{(x^2+4y^2)^2}{2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\frac{(\rho^2)^2}{2}\,\frac{1}{2}\rho\,d\rho\right)d\theta = 2\pi\int_0^1\frac{1}{4}\rho^4\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho^5\,d\rho=\frac{\pi}{12}.}$$ ■

Esempio

Calcolare il volume V di una sfera di raggio $r>0$ con la formula degli spaghetti.

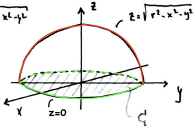
Si ha che:

$$\boxed{\frac{V}{2} = \iint_{C} \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dx\,dy = \iint_{C} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dx\,dy \quad \text{dove } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le r^2\}}$$

volume semisfera

$f_1(x,y) \equiv 0$

$f_2(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$



<u>Esempio</u>

Calcolare il volume V di una sfera di raggio $r>0$ con le formule degli spaghetti.

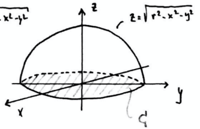
Si ha che:

$$\underbrace{\frac{V}{2}}_{\text{volume semisfera}} = \iint_{C} \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dx\,dy = \iint_{C} \sqrt{r^2-x^2-y^2} \, dx\,dy = \star$$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2\}$

$f_1(x,y) \equiv 0$

$f_2(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$



$$\star \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2} \, \rho \, d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_0^r \rho \sqrt{r^2-\rho^2} \, d\rho = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Passando a coordinate polari $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ con $\begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq r \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \frac{V}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$

$\Leftrightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ∎

Esempio

Calcolare il volume V di una sfera di raggio $r>0$ con la formula degli spaghetti.

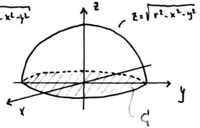
Si ha che:

$$\underbrace{\frac{V}{2}}_{\text{volume semisfera}} = \iint_{C'} \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dx\,dy = \iint_{C'} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dx\,dy = \star$$

dove $C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le r^2\}$

$f_1(x,y) \equiv 0$

$f_2(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$



$$\star \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2}\, \rho \, d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_0^r \rho \sqrt{r^2-\rho^2}\, d\rho = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Passando a coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ con $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le r$

$\iff \frac{V}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$

$\iff V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ∎

- Dal Teorema di Fubini si deduce anche un'altra formula di risoluzione per il calcolo di un integrale triplo in un insieme limitato A: la "formula delle fette" (o di integrazione per fette).

Esempio

Calcolare il volume V di una sfera di raggio $r>0$ con la formula degli spaghetti.

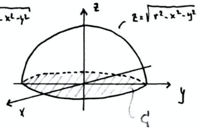
Si ha che:

$$\underbrace{\frac{V}{2}}_{\text{volume semisfera}} = \iint_G \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dx\,dy = \iint_G \sqrt{r^2-x^2-y^2} \, dx\,dy = \star$$

dove $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2\}$

$f_1(x,y) \equiv 0$

$f_2(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$



$$\star = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2} \, \rho \, d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_0^r \rho \sqrt{r^2-\rho^2} \, d\rho = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Passando a coordinate polari $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq r$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \blacksquare$$

- Dal Teorema di Fubini si deduce anche un'altra formula di riduzione per il calcolo di un integrale triplo in un insieme limitato A: la "formula delle fette" (o di integrazione per fette).
- Anche in questo caso, in realtà, si avranno tre formule a seconda che le fette - con le quali si taglia l'insieme A - siano perpendicolari all'asse z, all'asse x o all'asse y.

<u>Esempio</u>

Calcolare il volume V di una sfera di raggio $r>0$ con la formula degli spaghetti.

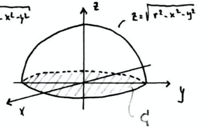
Si ha che:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Volume}\\ \text{semisfera}}}{\frac{V}{2}} = \iint_{G} \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dx\,dy = \iint_{G} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dx\,dy = \star$$

dove $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2\}$

$f_1(x,y) \equiv 0$

$f_2(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$



$$\star \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2}\, \rho \, d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_0^r \rho \sqrt{r^2-\rho^2}\, d\rho = \frac{2}{3}\pi r^3$$

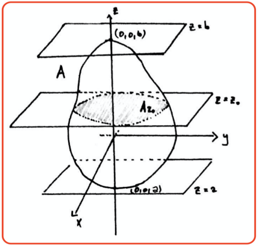
Passando a coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ con $\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq r \end{array}$

$\Leftrightarrow \frac{V}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$

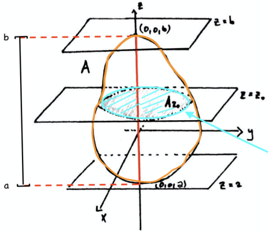
$\Leftrightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ∎

- Dal Teorema di Fubini si deduce anche un'altra formula di riduzione per il calcolo di un integrale triplo in un insieme limitato A: la "formula delle fette" (o di integrazione per fette).
- Anche in questo caso, in realtà, si avranno tre formule a seconda che le fette - con le quali si taglia l'insieme A - siano perpendicolari all'asse z, all'asse x o all'asse y.
- Consideriamo adesso la formula di integrazione per fette (perpendicolari all'asse z). Sia $(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$ una funzione integrabile in un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Fissato $z \in \mathbb{R}$ denotiamo con A_z l'insieme:
$$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\}$$

tale insieme A_z rappresenta "la fetta" (eventualmente vuota) che si ottiene tagliando A con il piano perpendicolare all'asse z e passante per il punto $(0,0,z)$.



tale insieme A_z rappresenta "la fetta" (eventualmente vuota) che si ottiene tagliando A con il piano perpendicolare all'asse z e passante per il punto $(0,0,z)$.

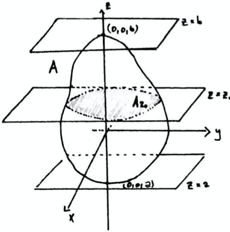


- Sia $[a,b]$ un intervallo contenente la proiezione ortogonale di A sull'asse z. Allora vale la seguente "formula delle fette":

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz} \qquad (\mathrm{III})$$

- Nel seguito assumeremo le fette $\boxed{A_z}$ essere insiemi regolari.

tale insieme A_z rappresenta "la fetta" (eventualmente vuota) che si ottiene tagliando A con il piano perpendicolare all'asse z e passante per il punto $(0,0,z)$.



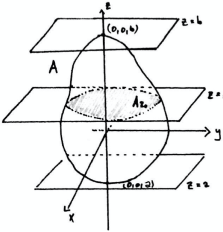
- Sia $[a,b]$ un intervallo contenente la proiezione ortogonale di A sull'asse z. Allora vale la seguente "formula delle fette":

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz \qquad (\mathrm{III})$$

- Nel seguito assumeremo le fette A_z essere insiemi regolari.

<u>Osservazione</u>: Dalla formula delle fette (III) si deduce subito che il volume $\mu_3(A)$ di un solido A la cui proiezione ortogonale all'asse z risulti contenuta in un intervallo $[a,b]$ si ottiene integrando tra a e b l'area $\mu_2(A_z)$ della generica fetta A_z: $\boxed{\mu_3(A) = \int_a^b \mu_2(A_z)\,dz}$

tale insieme A_z rappresenta "la fetta" (eventualmente vuota) che si ottiene tagliando A con il piano perpendicolare all'asse z e passante per il punto $(0,0,z)$.



- Sia $[a,b]$ un intervallo contenente la proiezione ortogonale di A sull'asse z. Allora vale la seguente "formula delle fette":

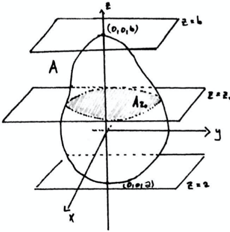
$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz \qquad (\mathrm{III})$$

- Nel seguito assumeremo le fette A_z essere insiemi regolari.

Osservazione: Dalla formula delle fette (III) si deduce subito che il volume $\mu_3(A)$ di un solido A la cui proiezione ortogonale all'asse z risulti contenuta in un intervallo $[a,b]$ si ottiene integrando tra a e b l'area $\mu_2(A_z)$ della generica fetta A_z: $\mu_3(A) = \int_a^b \mu_2(A_z)\,dz$

Se l'intervallo $[a,b]$ è troppo grande $\Rightarrow$ alcune fette saranno vuote e quindi per tali fette $\mu_2(A_z)=0$ (allora vale la pena prendere $a = \inf\{z : (x,y,z)\in A\}$ e $b = \sup\{z : (x,y,z)\in A\}$. Vale quindi la formula:

tale insieme A_z rappresenta "la fetta" (eventualmente vuota) che si ottiene tagliando A con il piano perpendicolare all'asse z e passante per il punto $(0,0,z)$.



- Sia $[a,b]$ un intervallo contenente la proiezione ortogonale di A sull'asse z. Allora vale la seguente "formula delle fette":

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz \qquad (\mathrm{III})$$

- Nel seguito assumeremo le fette A_z essere insiemi regolari.

<u>Osservazione</u>: Dalla formula delle fette (III) si deduce subito che il volume $\mu_3(A)$ di un solido A la cui proiezione ortogonale all'asse z risulti contenuta in un intervallo $[a,b]$ si ottiene integrando tra a e b l'area $\mu_2(A_z)$ della generica fetta A_z: $\mu_3(A) = \int_a^b \mu_2(A_z)\,dz$

Se l'intervallo $[a,b]$ è troppo grande $\Rightarrow$ alcune fette saranno vuote e quindi per tali fette $\mu_2(A_z)=0$ (allora vale la pena prendere $a = \inf\{z : (x,y,z)\in A\}$ e $b = \sup\{z : (x,y,z)\in A\}$. Vale quindi la formula:

$$\boxed{\mu_3(A) = \iiint_A 1\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} dx\,dy \right) dz = \int_a^b \mu_2(A_z)\,dz.}$$