Integrazione multipla in $\mathbb{R}^3$ (Integrali tripli) -parte 3-

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Firenze, 14/04/2020

Integrali Tripli

- Ricordo le formule delle fette:

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz} \qquad (\mathrm{I})$$

e una sua applicazione al calcolo del volume di un solido A (con proiezione sull'asse z : $[a,b]$)

$$\boxed{\mu_3(A) = \int_a^b \mu_2(A_z)\,dz} \qquad (\mathrm{II})$$

Integrali Tripli

- Ricordo le formule delle fette:

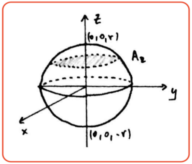
$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz \qquad (I)$$

e una sua applicazione al calcolo del volume di un solido A (con proiezione sull'asse z : $[a,b]$)

$$\mu_3(A) = \int_a^b \mu_2(A_z)\,dz \qquad (II)$$

Esempio:

Calcolo del volume della sfera di raggio r con la formula delle fette (V volume della sfera).



$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$

Integrali Tripli

- Ricordo la formula delle fette:

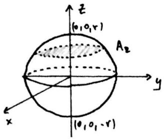
$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz \qquad \text{(I)}$$

e una sua applicazione al calcolo del volume di un solido A (con proiezione sull'asse z: $[a,b]$)

$$\mu_3(A) = \int_a^b \mu_2(A_z)\,dz \qquad \text{(II)}$$

Esempio:

Calcolo del volume della sfera di raggio r con la formula delle fette (V volume della sfera).



si ha che (con la formula (II))

$$\boxed{\frac{V}{2} = \int_0^r \mu_2(A_z)\,dz = \int_0^r \pi\,(r^2 - z^2)\,dz = \frac{2}{3}\pi r^3 \iff V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

dove A_z è la fetta alla quota z: $\boxed{A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2\}}$ ∎

Esempio

Calcoliamo il volume del "cono gelato":

$$\boxed{A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-z \leq 0 , \quad z^2 \geq x^2+y^2 \}}$$

Esempi:

Calcoliamo il volume del "cono gelato":

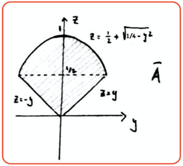
$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-z \leq 0, \quad z^2 \geq x^2+y^2 \}$$

Allora $x^2+y^2+z^2-z \leq 0 \iff x^2+y^2+z^2-z+\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

$$\iff x^2+y^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}$$

Consideriamo nel piano $x=0$ le disequazioni in A (ovvero consideriamo $A \cap \{x=0\}$)

ottenendo $\boxed{A \cap \{x=0\} \cong \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}, \quad z^2 \geq y^2 \}}$



Esempio:

Calcoliamo il volume del "cono gelato":

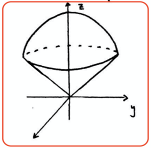
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-z \leq 0, \quad z^2 \geq x^2+y^2\}$$

Allora $x^2+y^2+z^2-z \leq 0 \iff x^2+y^2+z^2-z+\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

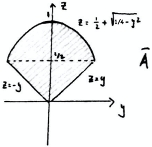
$\iff x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$

Consideriamo nel piano $x=0$ le disequazioni in A (ovvero consideriamo $A \cap \{x=0\}$)

ottenendo $A \cap \{x=0\} \cong \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}, \ z^2 \geq y^2\}$



$\longleftarrow$ facendo ruotare $\bar{A}$ di un angolo 2π intorno all'asse z si ottiene l'insieme A $\longleftarrow$



$\bar{A}$

Esempi:

Calcoliamo il volume del "cono gelato":

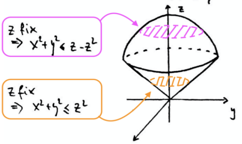
$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-z \le 0, \quad z^2 \ge x^2+y^2 \}$$

Allora $x^2+y^2+z^2-z \le 0 \iff x^2+y^2+z^2-z+\frac{1}{4} \le \frac{1}{4}$

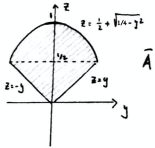
$\iff x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

Consideriamo nel piano $x=0$ le disequazioni in A (ovvero consideriamo $A \cap \{x=0\}$)

ottenendo $A \cap \{x=0\} \cong \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}, \; z^2 \ge y^2 \}$

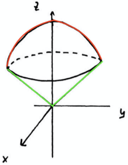


facendo ruotare $\bar{A}$ di un angolo 2π intorno all'asse z si ottiene l'insieme A



$$\boxed{V = \int_0^{1/2} \mu_2(A_z)\,dz + \int_{1/2}^{1} \mu_2(\hat{A}_z)\,dz = \int_0^{1/2} \pi z^2\,dz + \int_{1/2}^{1} \pi(z-z^2)\,dz = \frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{8}.}$$

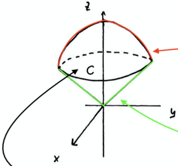
dove $\boxed{A_z} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le z^2 \}$ e $\boxed{\hat{A}_z} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le z-z^2 \}$



In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

$$\boxed{V = \iint_C \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}} dz \right) dx\,dy = \iint_C \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy}$$

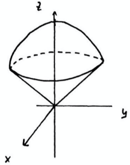
dove $\boxed{C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.}$



In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

$$V = \iint_C \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy = \iint_C \left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy$$

dove $C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$



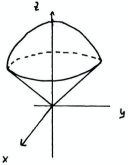
In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

$$V = \iint_C \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy = \iint_C \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy$$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. In questo caso si conclude passando in coordinate polari:

$$\boxed{V = 2\pi \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-\rho^2} - \rho \right) \rho\, d\rho = \frac{2\pi}{24}\left(6x^2 - 8x^3 - (1-4x^2)^{3/2}\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.}$$

■



In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

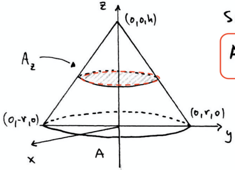
$$V = \iint_C \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy = \iint_C \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy$$

dove $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{1}{4} \}$. In questo caso si conclude passando in coordinate polari:

$$V = 2\pi \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-\rho^2} - \rho \right) \rho \, d\rho = \frac{2\pi}{24} \left(6x^2 - 8x^3 - (1-4x^2)^{3/2} \right)\Big|_0^{1/2} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}. \blacksquare$$

Esempio

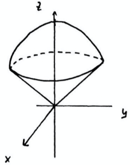
Calcolare il volume di un cono circolare retto di altezza $h>0$ e raggio di base $r>0$.



Sostanzialmente si tratta di integrare $f(x,y,z) \equiv 1$ sul seguente insieme

$$\boxed{A = \left\{ (x,y,z) : x^2+y^2 \leq \frac{r^2}{h^2}(z-h)^2 ,\ 0 \leq z \leq h \right\}}$$

Usando le formule di integrazione per fette e denotato con A_z l'insieme: $\boxed{A_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{r^2}{h^2}(z-h)^2 \right\}}$



In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

$$V = \iint_C \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{1}{2} - \sqrt{1/4 - x^2 - y^2}} dz \right) dx\,dy = \iint_C \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy$$

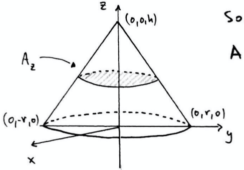
dove $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \}$. In questo caso si conclude passando in coordinate polari:

$$V = 2\pi \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \rho^2} - \rho \right) \rho \, d\rho = \frac{2\pi}{24} \left(6x^2 - 8x^3 - (1-4x^2)^{3/2} \right) \Big|_0^{1/2} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

∎

<u>Esempio</u>

Calcolare il volume di un cono circolare retto di altezza $h>0$ e raggio di base $r>0$.



Sostanzialmente si tratta di integrare $f(x,y,z) \equiv 1$ sul seguente insieme

$$A = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2} (z-h)^2 ,\ 0 \leq z \leq h \right\}$$

Usando le formule di integrazione per fette e denotato con A_z l'insieme: $A_z = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2/h^2 (z-h)^2 \}$

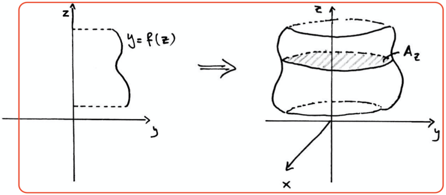
Allora: $\boxed{V = \int_0^h \mu_2(A_z)\, dz = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} (z-h)^2 dz = \frac{\pi}{3} r^2 h.}$

Esempio

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa $\left(f(t) \geq 0, \; \forall\, t \in [a,b] \right)$

Vogliamo calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione, di un angolo di 2π, intorno all'asse z dell'insieme:

$$\boxed{D = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, \; y = f(z) \right\}}$$

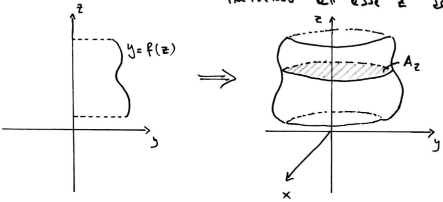


Esempio

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa $\left(f(t) \geq 0, \ \forall t \in [a,b] \right)$

Vogliamo calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione, di un angolo di 2π, intorno all'asse z dell'insieme:

$$D = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, \ y = f(z) \right\}$$



Usando le formule di riduzione per fette abbiamo:

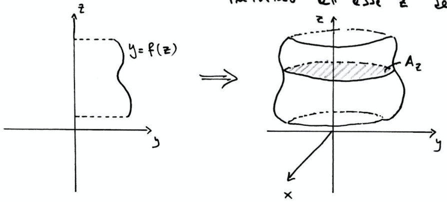
$$\boxed{V = \int_a^b \mu_2(A_z)\, dz = \pi \int_a^b f^2(z)\, dz}$$

dove $A_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq f^2(z) \right\}$

Esempio

Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa $\left(f(z)\geq 0,\ \forall z\in[a,b]\right)$

Vogliamo calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione, di un angolo di 2π, intorno all'asse z dell'insieme:



$$D=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2:\ a\leq z\leq b,\ y=f(z)\right\}$$

Usando le formule di risoluzione per fette abbiamo:

$$V=\int_a^b \mu_2(A_z)\,dz=\pi\int_a^b f^2(z)\,dz$$

dove $A_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq f^2(z)\right\}$

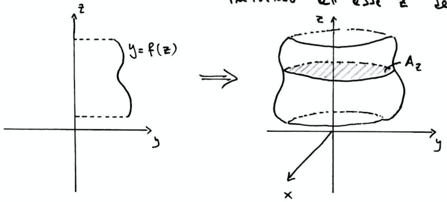
Ad esempio il volume del paraboloide ottenuto facendo ruotare il grafico di $f(z)=\sqrt{z}$, con $z\in[0,1]$, attorno all'asse z è dato dalla formula:

$$\boxed{V=\int_0^1 \mu_2(A_z)\,dz=\int_0^1 \pi(\sqrt{z})^2\,dz=\pi\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}}$$

<u>Esempio</u>

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa ($f(t)\geq 0, \forall t\in[a,b]$)

Vogliamo calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione, di un angolo di 2π, intorno all'asse z dell'insieme:



$$D=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : a\leq z\leq b,\ y=f(z)\}$$

Usando le formule di risoluzione per fette abbiamo:

$$V=\int_a^b \mu_2(A_z)\,dz=\pi\int_a^b f^2(z)\,dz$$

dove $A_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq f^2(z)\}$

Ad esempio il volume del paraboloide ottenuto facendo ruotare il grafico di $f(z)=\sqrt{z}$, con $z\in[0,1]$, attorno all'asse z è dato dalla formula:

$$V=\int_0^1 \mu_2(A_z)dz=\int_0^1 \pi(\sqrt{z})^2 dz=\pi\frac{z^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}$$

Analogamente, facendo ruotare $y=z$, $z\in[0,1]$ attorno all'asse z ottemiamo il cono circolare retto di altezza 1 e:

$$V=\int_0^1 \mu_2(A_z)\,dz=\int_0^1 \pi z^2\,dz=\pi\frac{z^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}$$