

Integrazione multipla in \mathbb{R}^3 (Integrali tripli) -parte 3-

Luca Bisconti



Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli studenti e alle studentesse sotto licenza:

Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Integrali Tripli

• Ricordo le formule delle fette:

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz \quad (\text{I})$$

e una sua applicazione al calcolo del volume di un solido A (con proiezione sull'asse z : $[a, b]$)

$$M_3(A) = \int_a^b M_2(A_z) \, dz \quad (\text{II})$$

Integrali Tripli

• Ricordo le formule delle fette:

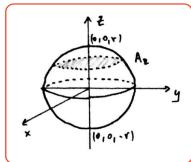
$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz \quad (I)$$

e una sua applicazione al calcolo del volume di un solido A (con proiezione sull'asse z : $[a, b]$)

$$M_3(A) = \int_a^b M_2(A_z) \, dz \quad (II)$$

Esempio:

Calcolo del volume della sfera di raggio r con le formule delle fette (V volume delle sfere).



$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$$

Integrali Tripli

• Ricordo le formule delle fette:

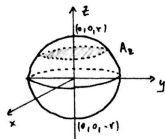
$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z) dx dy \right) dz \quad (I)$$

e una sua applicazione al calcolo del volume di un solido A (con proiezione sull'asse z : $[a,b]$)

$$M_3(A) = \int_a^b M_2(A_z) dz \quad (II)$$

Esempio:

Calcolo del volume della sfera di raggio r con le formule delle fette (V volume della sfera).



Si ha da (con la formula (II))

$$\frac{V}{z} = \int_{-r}^r M_2(A_z) dz = \int_{-r}^r \pi (r^2 - z^2) dz = \frac{2}{3} \pi r^3 (=) V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

dove A_z è la fetta alla quota z : $A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2\}$

Esempio

Calcoliamo il volume del "cono gelato":

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - z \leq 0, \quad z^2 \geq x^2 + y^2 \}$$

Esempio

Calcoliamo il volume del "cono gelato":

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - z \leq 0, \quad z^2 \geq x^2 + y^2 \}$$

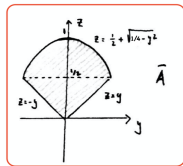
$$\text{Allora } x^2 + y^2 + z^2 - z \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - z + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$$

Consideriamo nel piano $x=0$ le disuguaglianze in A (ovvero consideriamo $A \cap \{x=0\}$)

ottenendo

$$A \cap \{x=0\} \cong \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}, \quad z^2 \geq y^2 \}$$



Esempio

Calcoliamo il volume del "cono gelato":

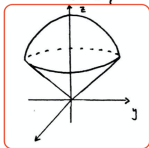
$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - z \leq 0, \quad z^2 \geq x^2 + y^2 \}$$

$$\text{Allora } x^2 + y^2 + z^2 - z \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - z + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

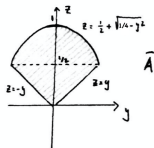
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$$

Consideriamo nel piano $x=0$ le disuguaglianze in A (ovvero consideriamo $A \cap \{x=0\}$)

ottenendo $A \cap \{x=0\} \cong \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}, \quad z^2 \geq y^2 \}$



facendo ruotare \bar{A} di un angolo 2π intorno all'asse z si ottiene l'insieme A



Esempio

Calcoliamo il volume del "cono gelato":

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 0, \quad z^2 \geq x^2 + y^2 \}$$

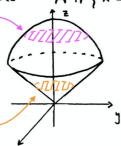
$$\begin{aligned} \text{Allora } x^2 + y^2 + z^2 \leq 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - z + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Consideriamo nel piano $x=0$ le diseguazioni in A (ovvero consideriamo $A \cap \{x=0\}$)

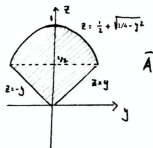
ottenendo $A \cap \{x=0\} \cong \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}, \quad z^2 \geq y^2 \}$

z fix
 $\Rightarrow x^2 + y^2 \leq z - z^2$

z fix
 $\Rightarrow x^2 + y^2 \leq z^2$

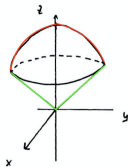


facendo ruotare \bar{A} di un angolo 2π intorno all'asse z si ottiene l'insieme A



$$V = \int_0^{1/2} \mu_2(A_z) dz + \int_{1/2}^1 \mu_2(\hat{A}_z) dz = \int_0^{1/2} \pi z^2 dz + \int_{1/2}^1 \pi (z - z^2) dz = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{8}.$$

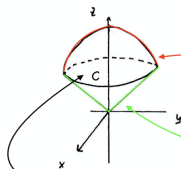
dove $A_z = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2 \}$ e $\hat{A}_z = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z - z^2 \}$



In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

$$V = \iint_C \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}} dz \right) dx dy = \iint_C \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy$$

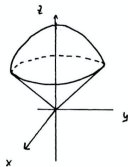
dove $C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$.



In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

$$V = \iint_C \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}} dz \right) dx dy = \iint_C \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy$$

dove $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \}.$

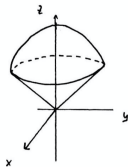


In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

$$V = \iint_C \left(\int_{\frac{z}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}}^{\frac{z}{2}} dz \right) dx dy = \iint_C \left(\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy$$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. In questo caso si conclude passando in coordinate polari:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - z^2} - z \right) z dz = \frac{2\pi}{24} \left(6x^4 - 8x^3 - (1-4x^4)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$



In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

$$V = \iint_C \left(\int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}}^{\frac{1}{2}} dz \right) dx dy = \iint_C \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy$$

dove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. In questo caso si conclude passando in coordinate polari:

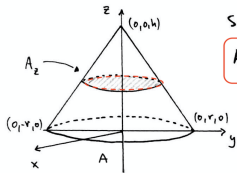
$$V = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - s^2} - s \right) s ds = \frac{2\pi}{24} \left(6x^4 - 8x^3 - (1-4x^4)^{3/2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

Esempio

Calcolare il volume di un cono circolare retto di altezza $h > 0$ e raggio di base $r > 0$.

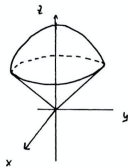
Sostanzialmente si tratta di integrare $f(x, y, z) \equiv 1$ sul seguente insieme

$$A = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2} (z-h)^2, 0 \leq z \leq h \right\}$$



Usando le formule di integrazione per fette e devoluto con A_z

$$\text{l'insieme: } A_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2} (z-h)^2 \right\}$$



In alternativa, con le formule "dei fili" avremmo:

$$V = \iint_C \left(\int_{\frac{z}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}}^{\frac{z}{2}} dz \right) dx dy = \iint_C \left(\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy$$

dove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. In questo caso si conclude passando in coordinate polari:

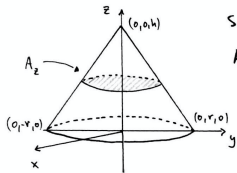
$$V = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - r^2} - r \right) r dr = \frac{2\pi}{24} \left(6x^4 - 2x^3 - (1-4x^4)^{3/2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

Esempio

Calcolare il volume di un cono circolare retto di altezza $h > 0$ e raggio di base $r > 0$.

Sostanzialmente si tratta di integrare $f(x, y, z) \equiv 1$ sul seguente insieme

$$A = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2} (z-h)^2, 0 \leq z \leq h \right\}$$



Usando le formule di integrazione per fette e denotato con A_z

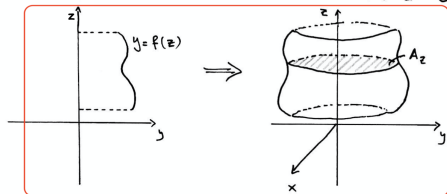
$$\text{l'insieme: } A_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2/h^2 (z-h)^2 \right\}$$

$$\text{Allora: } V = \int_0^h \mathcal{M}_2(A_z) dz = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} (z-h)^2 dz = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Esempio

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa ($f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$)

Vogliamo calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione, di un arco di 2π , intorno all'asse z dell'insieme:

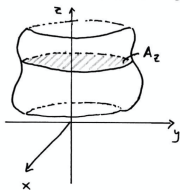
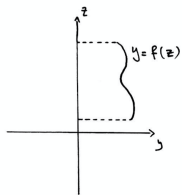


$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, y = f(z)\}$$

Esempio

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa ($f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$)

Vogliamo calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione, di un arco di 2π , intorno all'asse z dell'insieme:



$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, y = f(z)\}$$

Usando la formula di risoluzione per fette abbiamo:

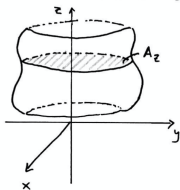
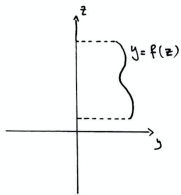
$$V = \int_a^b \mu_2(A_z) dz = \pi \int_a^b f^2(z) dz$$

$$\text{dove } A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq f^2(z)\}$$

Esempio

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa ($f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$)

Vogliamo calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione, di un arco di 2π , intorno all'asse z dell'insieme:



$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, y = f(z)\}$$

Usando la formula di risoluzione per fette abbiamo:

$$V = \int_a^b \mu_2(A_z) dz = \pi \int_a^b f^2(z) dz$$

$$\text{dove } A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq f^2(z)\}$$

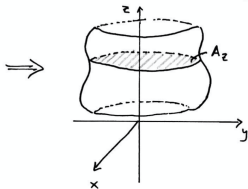
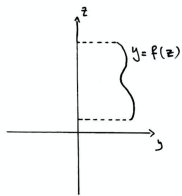
Ad esempio il volume del paraboloido ottenuto ruotando il grafico di $f(z) = \sqrt{z}$, con $z \in [0, 1]$, attorno all'asse z è dato dalla formula:

$$V = \int_0^1 \mu_2(A_z) dz = \int_0^1 \pi (\sqrt{z})^2 dz = \pi \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Esempio

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa ($f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$)

Vogliamo calcolare il volume V del solido ottenuto dalla rotazione, di un arco di 2π , intorno all'asse z dell'insieme:



$$D = \{(z, x, y) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, x^2 + y^2 \leq f^2(z)\}$$

Usando la formula di risoluzione per fette abbiamo:

$$V = \int_a^b \mu_2(A_z) dz = \pi \int_a^b f^2(z) dz$$

$$\text{dove } A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq f^2(z)\}$$

Ad esempio il volume del paraboloido ottenuto facendo ruotare il grafico di $f(z) = \sqrt{z}$, con $z \in [0, 1]$, attorno all'asse z è dato dalla formula:

$$V = \int_0^1 \mu_2(A_z) dz = \int_0^1 \pi (\sqrt{z})^2 dz = \pi \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Analogamente, facendo ruotare $y = z$, $z \in [0, 1]$ attorno all'asse z otteniamo il cono circolare retto di altezza 1 e:

$$V = \int_0^1 \mu_2(A_z) dz = \int_0^1 \pi z^2 dz = \pi \frac{z^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$$