

Esercizi sugli integrali doppi

Luca Bisconti



Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli studenti e alle studentesse sotto licenza:

Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Esempi Integrali Doppi

Esempio (importante)

Usando gli integrali doppi si può provare che

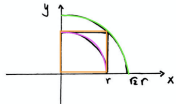
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Esempi Integrali DoppiEsempio (importante)

Usando gli integrali doppi si può provare che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sia $r > 0$ e consideriamo il rettangolo $R = [0, r] \times [0, r]$. Inoltre sia $A_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$
 e in maniera simile $A_{\sqrt{2}r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

Si ha ovviamente che $A_r \subset R \subset A_{\sqrt{2}r}$ da cui segue:



$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_R \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}} dx dy \leq \iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (I)$$

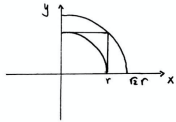
consideriamo questa nuova funzione di due variabili

Esempi Integrali DoppiEsempio (importante)

Usando gli integrali doppi si può provare che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sia $r > 0$ e consideriamo il rettangolo $R = [0, r] \times [0, r]$. Inoltre sia $A_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ e in maniera simile $A_{\sqrt{2}r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

Si ha ovviamente che $A_r \subset R \subset A_{\sqrt{2}r}$ da cui segue:



$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (I)$$

Passando in coordinate polari segue che:

$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4} (-e^{-r^2} + 1)$$

$$\iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} (-e^{-2r^2} + 1) \quad e \quad \iint_R e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^r e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right)^2$$

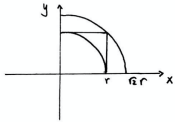
\uparrow
 $y=x$

Esempi Integrali DoppiEsempio (importante)

Usando gli integrali doppi si può provare che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sia $r > 0$ e consideriamo il rettangolo $R = [0, r] \times [0, r]$. Inoltre sia $A_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ e in maniera simile $A_{\sqrt{2}r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

Si ha ovviamente che $A_r \subset R \subset A_{\sqrt{2}r}$ da cui segue:



$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (I)$$

Passando in coordinate polari segue che:

$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4} (-e^{-r^2} + 1)$$

$$\iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} (-e^{-2r^2} + 1) = \iint_R e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^r e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right)^2$$

\uparrow
 $y=x$

Allora dalla (I) segue che

$$\frac{\pi}{4} (-e^{-r^2} + 1) \leq \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (-e^{-2r^2} + 1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{4} (-e^{-r^2} + 1)} \leq \int_0^r e^{-x^2} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{4} (-e^{-2r^2} + 1)}$$

Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ e ricorrendo al teorema dei carabinieri, si ottiene che:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \blacksquare$$

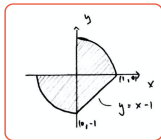
Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ e ricordando il teorema dei residui, si ottiene che:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \blacksquare$$

Esempio

Calcolare l'integrale I su $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, xy \geq 0\} \cup \{(x,y) : x-1 \leq y \leq 0, x \geq 0\}$

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy$$



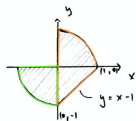
Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ e ricordando il teorema dei residui, si ottiene che:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \blacksquare$$

Esempio

Calcolare l'integrale I su $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, xy \geq 0\} \cup \{(x,y) : x-1 \leq y \leq 0, x \geq 0\}$

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy$$



$$\begin{aligned} \text{Allora } \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 xy \, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 xy \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(x \frac{y^2}{2} \right)_{-\sqrt{1-x^2}}^0 dx + \int_0^1 \left(x \frac{y^2}{2} \right)_{x-1}^0 dx \end{aligned}$$

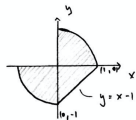
Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ e ricordando il teorema dei residui, si ottiene che:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \blacksquare$$

Esempio

Calcolare l'integrale I su $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, xy \geq 0\} \cup \{(x,y) : x-1 \leq y \leq 0, x \geq 0\}$

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy$$



$$\begin{aligned} \text{Allora } \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 xy \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(x \frac{y^2}{2} \right)_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \left(x \frac{y^2}{2} \right)_{x-1}^0 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 \frac{x}{2} (1-x^2) dx + \int_0^1 \left(x \frac{1-x^2}{2} - \frac{x(x-1)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x-x^3) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x-x^3-x^3+2x^2-x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 + \int_0^1 (x^2-x^3) dx = \frac{1}{8} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

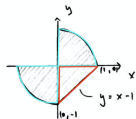
Passiamo al limite per $r \rightarrow +\infty$ e ricordando il teorema dei residui, si ottiene che:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \blacksquare$$

Esempio

Calcolare l'integrale I su $D = \overbrace{\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, xy \geq 0\}}^{D_1} \cup \overbrace{\{(x,y) : x-1 \leq y \leq 0, x \geq 0\}}^{D_2}$

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy$$



$$\begin{aligned} \text{Allora } \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 xy \, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 xy \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(x \frac{y^2}{2} \right)_{-\sqrt{1-x^2}}^0 dx + \int_0^1 \left(x \frac{y^2}{2} \right)_{x-1}^0 dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{x}{2} (1-x^2) dx + \int_0^1 \left(x \frac{1-x^2}{2} - \frac{x(x-1)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x-x^3) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x-x^3-x^2+2x^2-x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 + \int_0^1 (x^2-x^3) dx = \frac{1}{8} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)'_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

osservazione

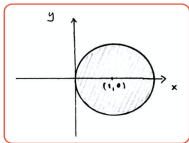
Usando la simmetria di D_1 , rispetto a $S_1(x,y) = (-x,-y)$ e al fatto che $f(x,y) = xy$ è pari rispetto a S_2

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \iint_{D_1} xy \, dx \, dy + \iint_{D_2} xy \, dx \, dy = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 xy \, dy \right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\iint_{\Delta} xy \, dx \, dy = \iint_{\Delta_1} xy \, dx \, dy + \iint_{\Delta_2} xy \, dx \, dy = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 xy \, dy \right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$$

Esempio

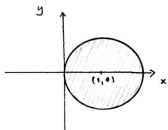
Calcola l'integrale doppio $\iint_{\Delta} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ sull'insieme $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$



$$\iint_{\Delta} xy \, dx \, dy = \iint_{\Delta_1} xy \, dx \, dy + \iint_{\Delta_2} xy \, dx \, dy = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 xy \, dy \right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$$

Esempio

Calcola l'integrale doppio $\iint_{\Delta} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ sull'insieme $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$



Passando in coordinate polari $\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$

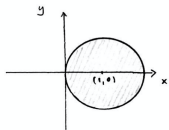
$$\begin{aligned} \text{si ha che } x^2 + y^2 &= (1 + \rho \cos \theta)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta = 1 + \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2\rho \cos \theta \\ &= 1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta \end{aligned}$$

Quindi l'integrale diventa:

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \iint_{D_1} xy \, dx \, dy + \iint_{D_2} xy \, dx \, dy = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 xy \, dy \right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$$

Esempio

Calcola l'integrale doppio $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$



Passiamo in coordinate polari $\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$

$$\text{si ha che } x^2 + y^2 = (1 + \rho \cos \theta)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta = 1 + \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2\rho \cos \theta = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta$$

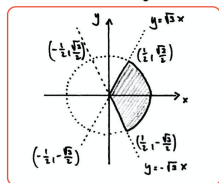
Quindi l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho (1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2) \, d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (\rho + 2\rho^2 \cos \theta + \rho^3) \, d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} + 2\rho^3 \frac{\cos \theta}{3} + \frac{\rho^4}{4} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos \theta + \frac{1}{4} \right) d\theta = \frac{3}{4} 2\pi + \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \frac{3}{2} \pi + 0 = \frac{3}{2} \pi \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esempio

Calcolare l'integrale doppio

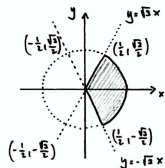
$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0 \}$$



$$I = \iint_A x e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

Esempio

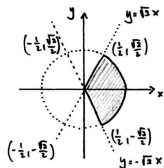
Calcolare l'integrale doppio I su $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0 \}$



Il dominio è sicuramente regolare e per andare ad effettuare l'integrazione

usiamo le coordinate polari $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ con $\rho \in [0, 1]$

Esempio

 Calcolare l'integrale doppio I su $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0 \}$


Il dominio è sicuramente regolare e per andare ad effettuare l'integrazione

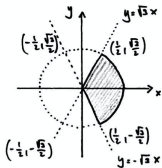
 usiamo le coordinate polari $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ con $\rho \in [0, 1]$

 Per determinare dove varia θ osserviamo che $\frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$

{	Dati da $y = \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}$	<table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="text-align: center;">\uparrow</td> <td style="text-align: center;">\uparrow</td> <td rowspan="2" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; vertical-align: middle;">Nel primo quadrante $\Rightarrow \theta = \pi/3$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\theta = \pi/3$</td> <td style="text-align: center;">$\theta = 4\pi/3$</td> </tr> </table>	\uparrow	\uparrow	Nel primo quadrante $\Rightarrow \theta = \pi/3$	$\theta = \pi/3$	$\theta = 4\pi/3$
	\uparrow	\uparrow	Nel primo quadrante $\Rightarrow \theta = \pi/3$				
$\theta = \pi/3$	$\theta = 4\pi/3$						
{	Poi $y = -\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = -\sqrt{3} = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2}$	<table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="text-align: center;">\uparrow</td> <td style="text-align: center;">\uparrow</td> <td rowspan="2" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; vertical-align: middle;">Nel quarto quadrante $\Rightarrow \theta = 5\pi/3$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\theta = 2\pi/3$</td> <td style="text-align: center;">$\theta = \pi/3$</td> </tr> </table>	\uparrow	\uparrow	Nel quarto quadrante $\Rightarrow \theta = 5\pi/3$	$\theta = 2\pi/3$	$\theta = \pi/3$
\uparrow	\uparrow	Nel quarto quadrante $\Rightarrow \theta = 5\pi/3$					
$\theta = 2\pi/3$	$\theta = \pi/3$						

Esempio

Calcolare l'integrale doppio I su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0\}$



Il dominio è sicuramente regolare e per andare ad effettuare l'integrazione

usiamo le coordinate polari $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ con $\rho \in [0, 1]$

Per determinare dove varia θ osserviamo che $\frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dato che } y = \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} \\ \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \qquad \qquad \qquad \theta = \frac{\pi}{3} \qquad \qquad \qquad \theta = \frac{4\pi}{3} \end{array} \right.$$

Nel primo
quadrante
 $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Poi } y = -\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = -\sqrt{3} = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} \\ \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \qquad \qquad \qquad \theta = \frac{2\pi}{3} \qquad \qquad \qquad \theta = \frac{5\pi}{3} \end{array} \right.$$

Nel quarto
quadrante
 $\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$

Per evitare di considerare $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

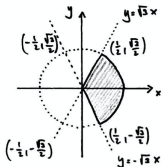
$\Rightarrow \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ quindi $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ e $\rho \in [0, 1]$ come già detto.

$T: D \rightarrow T(D) = A$

$D = [0, 1] \times [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

Esempio

Calcolare l'integrale doppio I su $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0 \}$



Il dominio è sicuramente regolare e per andare ad effettuare l'integrazione

usiamo le coordinate polari $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ con $\rho \in [0, 1]$

Per determinare dove varia θ osserviamo che $\frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$

$$\begin{cases} \text{Dati da } y = \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \quad \theta = \frac{4}{3}\pi \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Nel primo} \\ \text{quadrante} \\ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \text{Poi } y = -\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = -\sqrt{3} = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} \\ \theta = \frac{2}{3}\pi \quad \theta = \frac{5}{3}\pi \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Nel quarto} \\ \text{quadrante} \\ \Rightarrow \theta = \frac{5}{3}\pi \end{array} \right.$$

Per evitare le confusioni $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5}{3}\pi, 2\pi]$

$\Rightarrow \frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ quindi $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ e $\rho \in [0, 1]$ come già detto. $T: D \rightarrow T(D) = A$
 $D = [0, 1] \times [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

$$I = \iint_{T(D)=A} x e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^1 \rho \cos \theta e^{\rho} \rho d\rho \right) d\theta = \left(\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^2 e^{\rho} d\rho \right) = \left(\sin \theta \right)_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\rho^2 e^{\rho} - 2\rho e^{\rho} + 2e^{\rho} \right)_0^1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) (e - 2) = \sqrt{3}(e - 2).$$