SO(3)

$$SO(3) = \{ A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \mid AA^T = I \, , \det A = 1 \}$$

NOTA: è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^9$, quindi è compatto

- **NOTA**: le colonne di una matrice $A \in SO(3)$ costituiscono un riferimento ortonormale orientato di $\mathbb{R}^3$ (analogamente per le righe).
- $SO(3)$ è l'insieme dei riferimenti ortonormali orientati di $\mathbb{R}^3$.

Dimostriamo che ogni $A \in SO(3)$ definisce una rotazione attorno a un' asse :

- $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ è un polinomio di grado 3, dunque ha almeno una radice reale.

Sia λ_0 radice di P_A e $v \in \mathbb{R}^3$ un' autovettore relativo

$$Av = \lambda_0 v$$

allora

$$\langle Av, Av \rangle = \lambda_0^2 \langle v, v \rangle$$

$$\parallel$$

$$\langle \underbrace{A^T A}_{I} v, v \rangle = \langle v, v \rangle$$

$\Rightarrow \lambda_0 = \pm 1$

$\boxed{\text{caso} \quad \lambda_0 = 1}$

si consideri $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}\{v\} \oplus \mathrm{Span}\{v\}^{\perp}$

NOTA: $\mathrm{Span}\{v\}^{\perp}$ è invariante per A

infatti se $w \in \mathrm{Span}\{v\}^{\perp}$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\lambda_0} \langle Aw, v \rangle = \langle Aw, Av \rangle = \langle A^T A w, v \rangle$$

$$\Rightarrow \langle Aw, v \rangle = 0 \qquad \overset{\shortparallel}{\langle w, v \rangle = 0}$$

quindi

$$A|_{\mathrm{Span}\{v\}^{\perp}} : \mathrm{Span}\{v\}^{\perp} \longrightarrow \mathrm{Span}\{v\}^{\perp}$$

con le proprietà:

- $\langle Aw, Aw' \rangle = \langle w, w' \rangle$
- $\det\left(A|_{\mathrm{Span}\{v\}^{\perp}}\right) = 1$

NOTA: se $\{u_1, u_2\}$ è una base ortonormale di $\text{Span}\{v\}^\perp$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è la matrice di $A|_{\text{Span}\{v\}^\perp}$ rispetto a questa base troviamo:

$$Au_1 = au_1 + cu_2$$

$$\langle Au_1, Au_1 \rangle = \langle au_1 + cu_2, au_1 + cu_2 \rangle = a^2 + c^2$$

$$\langle Au_1, Au_1 \rangle = 1 = \langle u_1, u_1 \rangle$$

$$\langle Au_1, Au_2 \rangle = \langle au_1 + cu_2, bu_1 + du_2 \rangle = ab + cd = 0$$

$$\langle Au_1, Au_2 \rangle = 0 = \langle u_1, u_2 \rangle$$

$$\langle Au_2, Au_2 \rangle = \langle bu_2 + du_2, bu_2 + du_2 \rangle = b^2 + d^2$$

$$\langle Au_2, Au_2 \rangle = 1 = \langle u_2, u_2 \rangle$$

NOTA: rispetto alla base

di $\mathbb{R}^3$

$\{v, u_1, u_2\}$

l'applicazione lineare

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$X \longmapsto AX$$

ha matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

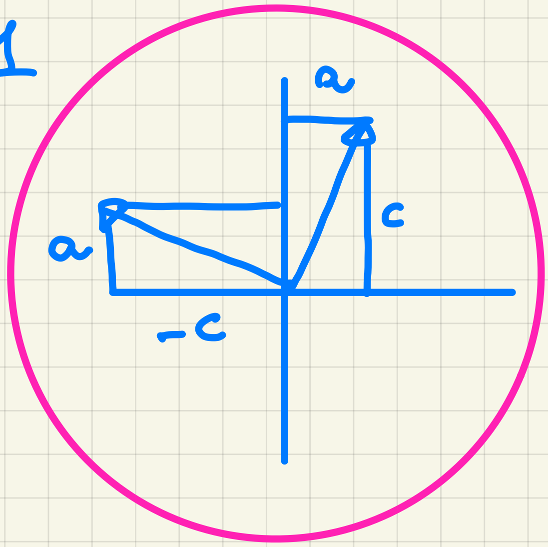
quindi $1 = \det \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = 1 \det B$

$\Rightarrow \det B = 1$

$$\Rightarrow \qquad A|_{\mathrm{Span}\{v\}^{\perp}} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

ossia $\boxed{B \in SO(2)}$



dunque

esiste θ t.c. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

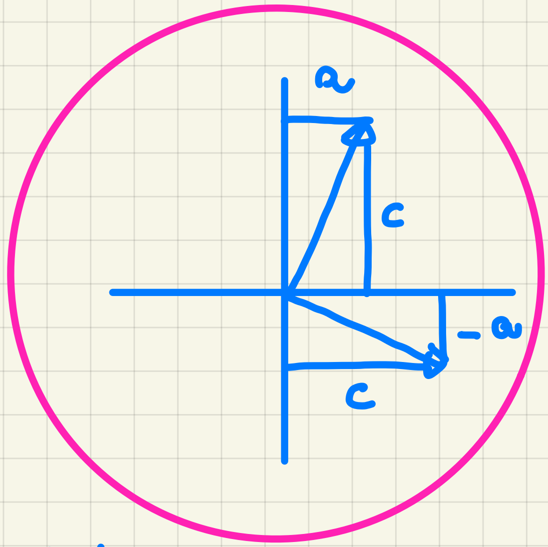
$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

rotazione

② Se $\lambda_0 = -1$ allora $\det B = -1$

esiste θ t.c. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$

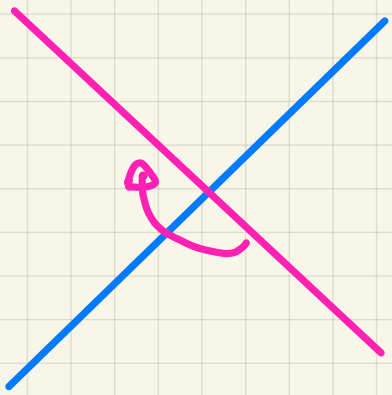
$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & +\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$



$P_B(\lambda) = \lambda^2 - 1$

autovalori ± 1

B è diagonalizzabile



autospazio relativo a $+1$

autospazio relativo a -1

B non è una rotazione ma una riflessione rispetto all'asse blu

Quindi ricapitolando:

se $\lambda_0 = 1$ troviamo una rotazione attorno all'asse v.

se $\lambda_0 = -1$ A è simile a $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

quindi è una rotazione attorno all'asse di autovalore 1, di angolo π.

$$\boxed{\text{Dunque } SO(3) \text{ è l'insieme delle rotazioni attorno a un'asse.}}$$

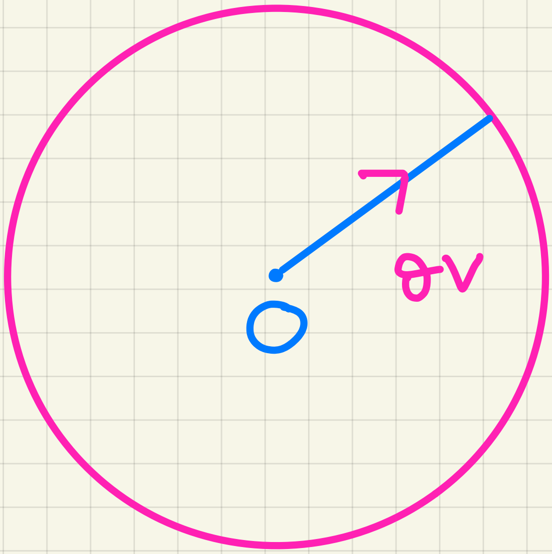
Quindi possiamo parametrizzare $SO(3)$ con coppie $\boxed{(v, \theta) \in S^2 \times [0, \pi]}$

dove v individua un'asse orientato di rotazione

e θ è l'angolo di rotazione

dove le coppie $(v, 0)$ individuano tutti l'identità.

e le coppie (v, π) e $(-v, \pi)$ individuano la stessa rotazione



$\overline{D}^3_\pi(0)$

disco chiuso in $\mathbb{R}^3$ di centro 0 e raggio π.

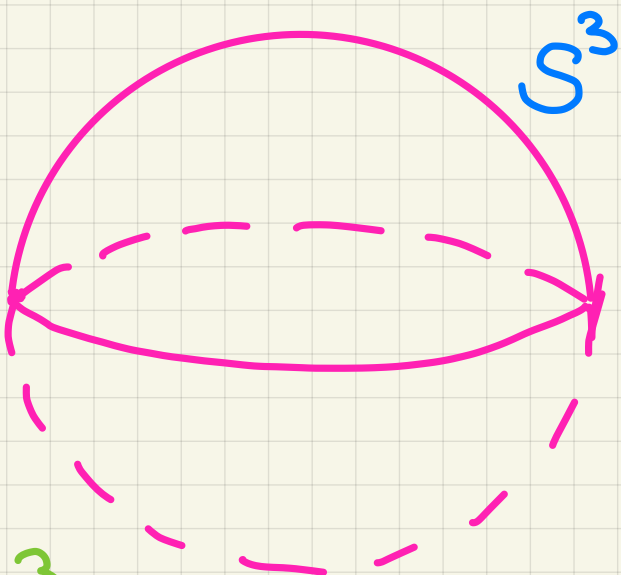
quindi

$$\frac{S^2 \times [0,\pi]}{\sim} = \frac{\overline{D}^3_\pi(0)}{\sim_R} \simeq \frac{S^3}{\mathbb{Z}_2} \simeq \mathbb{RP}^3$$

$(v,0) \sim (w,0)$

$(v,\pi) \sim (-v,\pi)$

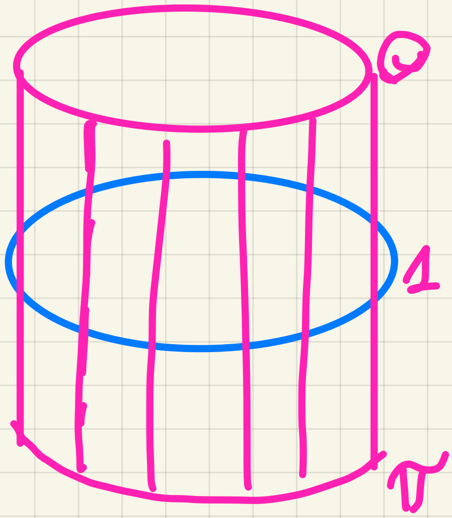
punti antipodali sul bordo identificati

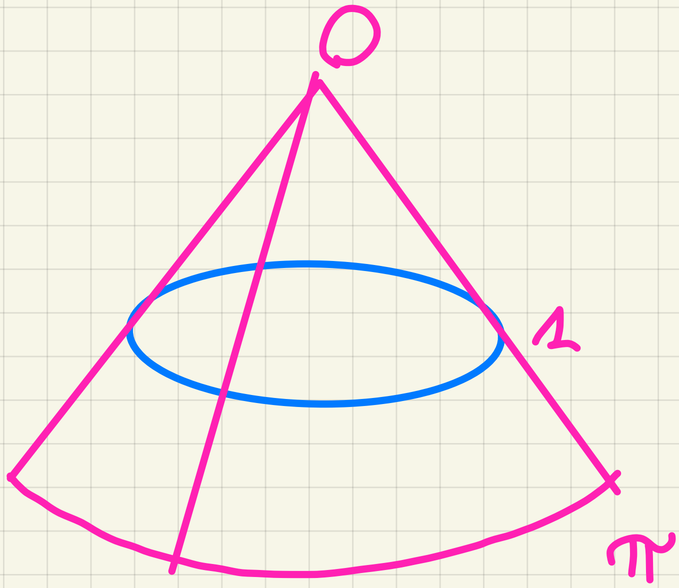


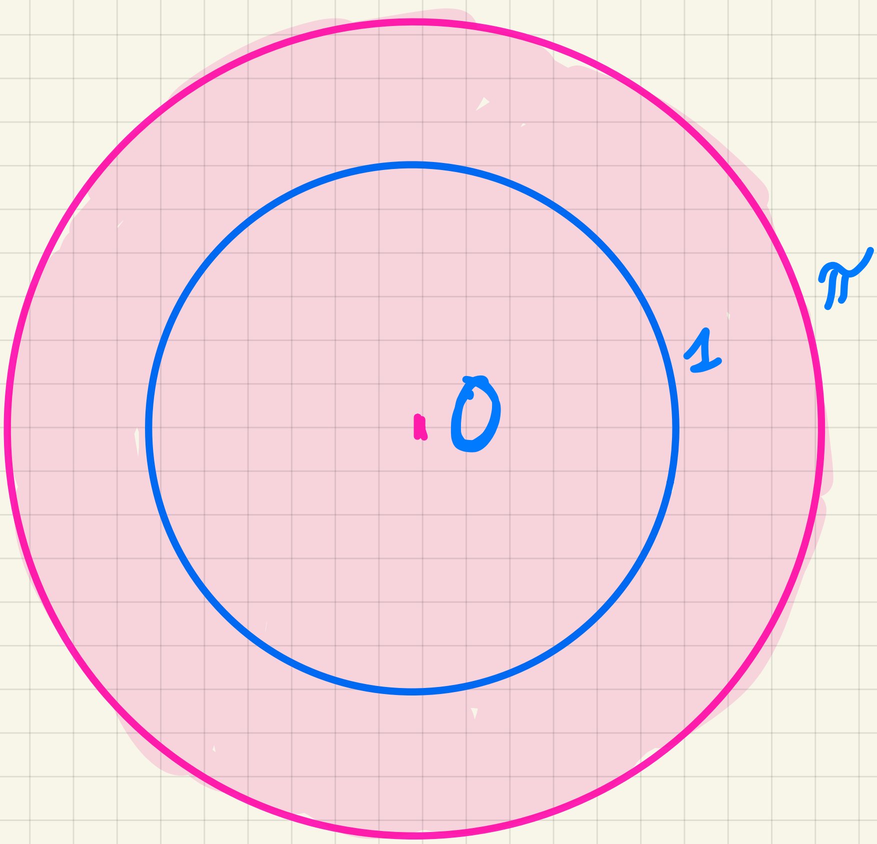
$\Rightarrow$ $SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3$ andiamo a vedere in dettaglio.

Pagine aggiunte

$S^1 \times (0, \pi)$







Quaternioni

$$\mathbb{H} = \{ a + bi + cj + dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad ij = k \quad jk = i \quad ki = j$$
$$ji = -k \quad kj = -i \quad ik = -j$$

$(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ha tutte le proprietà di campo tranne la commutatività del prodotto.

- $|u| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$
- $\overline{u} = a - bi - cj - dk$
- $\overline{uv} = \overline{v}\,\overline{u}$
- $|uv| = |u||v|$
- $u^{-1} = \dfrac{\overline{u}}{|u|^2} \qquad (u \neq 0)$

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$$a + bi + cj + dk \to (a+bi) + (c+di)j$$

Introduciamo

$$SU(2) = \{ A \in M_{2,2}(\mathbb{C}) \mid AA^* = I_n \text{ e } \det A = 1 \}$$

$A \in SU(2)$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$

$a, b \in \mathbb{C}$
con $|a|^2 + |b|^2 = 1$

$A \in SU(2) \longrightarrow q = a + bj$
con $|q| = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow SU(2) = \{ q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1 \} &= Spin(1) \\ \| \qquad\qquad & \\ \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| = 1 \} &= S^3 \end{aligned}}$$

Vogliamo mostrare che

$$S^3 \simeq SU(2) \xrightarrow{\pi} SO(3)$$

mappa di rivestimento
(punti antipodali identificati)

$$\frac{S^3}{\mathbb{Z}_2} = \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2} = SO(3)$$

$$\pi_1(SU(2)) = \{e\} \qquad \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$$

esplicitiamo:

$$SU(2) \xrightarrow{\pi} SO(3)$$

$$q \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} \overset{\mathbb{R}^3}{\underset{\wr}{}}\mathrm{Im}\,\mathbb{H} & \longrightarrow & \overset{\mathbb{R}^3}{\underset{\wr}{}}\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \\ x & \longmapsto & q^{-1} x q \end{array} \right)$$

$$q^{-1} x q = \bar{q} x q$$

- π è ben definita ossia se $x \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ ho che $\pi(x) \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$, infatti

$$q^{-1} x q + \overline{q^{-1} x q} = \bar{q} x q + \bar{q} \bar{x} q =$$
$$= \bar{q} x q - \bar{q} x q = 0$$

- l'applicazione $q : \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \longrightarrow \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$
$$x \longmapsto \bar{q} x q$$

è un elemento di $SO(3)$

quindi π è ben definita.

Verifica :

infatti, ogni $q \in SU(2)$ si può scrivere

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\, v$$

* vedi pagina aggiunta successiva

con $\boxed{\theta \in [0, 2\pi]}$ $\quad v \in \underset{\mathbb{R}^3}{\overset{\parallel}{\mathrm{Im}\,\mathbb{H}}}$ $\quad |v| = 1$

vediamo come opera q su $\mathbb{R}^3$.

$$\bar{q} v q = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\bar{v}\right) v \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} v\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2} v + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} v\right) =$$

$$= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) v + \left(\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) v^2$$

$$+ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} =$$

$$= v - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = v$$

ossia $\boxed{q : v \longrightarrow v}$

Pagina aggiunta

$$q = a + bi + cj + dk$$

$$|q|^2 = 1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

$$a^2 + (b^2 + c^2 + d^2) = 1$$

$$a^2 = \cos^2 \varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$b^2 + c^2 + d^2 = \sin^2 \varphi$$

una $\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ di norma $|\sin \varphi|$

quindi posso scriverlo

$(\sin \varphi) v$ con $v \in \mathbb{R}^3$, $|v| = 1$

NOTA: se prendo $\varphi \in [0, \pi]$ ottengo tutti i possibili q.

Abbiamo verificato che l'applicazione $x \longrightarrow \bar{q}\, x\, q$ ristretta all'asse generato da v è l'identità.

<u>nota</u>: $v, w \in \operatorname{Im}\mathbb{H}$, allora
$vw = -\langle v, w \rangle + v \wedge w$
(identificando $\operatorname{Im}\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3$)

Sia ora $x \in \operatorname{Im}\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3$ t.c.
$\langle v, x \rangle = 0$

$$\bar{q}\, x\, q = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\bar{v}\right) x \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} v\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2} x + \sin\frac{\theta}{2}\bar{v} x\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} v\right)$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2} x + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\bar{v} x$$

$$+ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} x v + \sin^2\frac{\theta}{2}\bar{v} x v =$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2} x - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} v x +$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} x v - \sin^2\frac{\theta}{2} v x v =$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\, x + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, x\wedge v - \sin^2\frac{\theta}{2}\,(v\wedge x)\, v$$

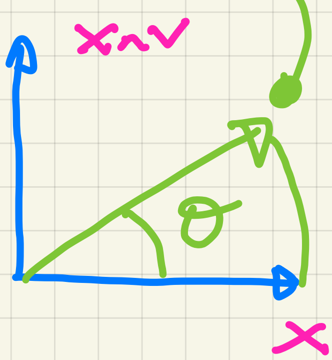
$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\, x + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, x\wedge v - \sin^2\frac{\theta}{2}\,(v\wedge x)\wedge v =$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\, x + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, x\wedge v + \sin^2\frac{\theta}{2}\,\big(v\wedge(v\wedge x)\big) =$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\, x + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, x\wedge v + \sin^2\frac{\theta}{2}\,\big(v\langle v, x\rangle - x\langle v, v\rangle\big) =$$

$$= \boxed{\cos\theta\; x + \sin\theta\; x\wedge v}$$

piano ortogonale a v



Quindi $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\, v$

dà una rotazione di $\theta \in [0, 2\pi]$

attorno all'asse di direzione v.

$$
\begin{tikzcd}
S^3 \simeq SU(2) \arrow[rr, "su"] \arrow[d] & & SO(3) \\
\mathbb{R}P^3 \simeq \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2} \arrow[urr, "iso"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$SU(2)$ semplicemente connesso,

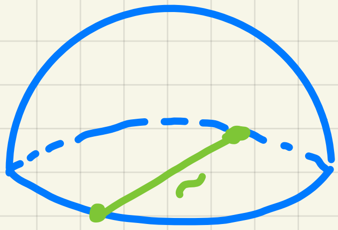
rivestimento doppio di $SO(3)$.

NOTA

$$\begin{tikzcd}
S^3 \simeq SU(2) \arrow[rr, "su"] \arrow[d] & & SO(3) \\
\mathbb{RP}^3 \simeq \dfrac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2} \arrow[urr, "iso"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{RP}^3 = \frac{\text{emisfero } q \in S^3 \text{ con } \mathrm{Re}(q) \geq 0}{\sim}$$

con $\sim$ che identifica i punti antipodali in $S^3 \cap \{\mathrm{Re}(q) = 0\}$



$$q = \underbrace{\cos\frac{\theta}{2}}_{\geq 0} + \sin\frac{\theta}{2}\, v$$

$\theta \in [0, \pi]$

Ritroviamo esplicitate l'identificazione

$$\frac{S^3}{\mathbb{Z}_2} \simeq \mathbb{RP}^3 \simeq \frac{\bar{D}^3_\pi(0)}{\sim}$$

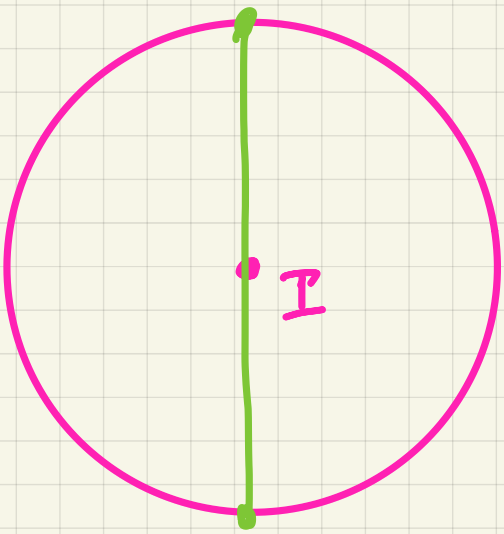
$$q \longmapsto \theta v$$

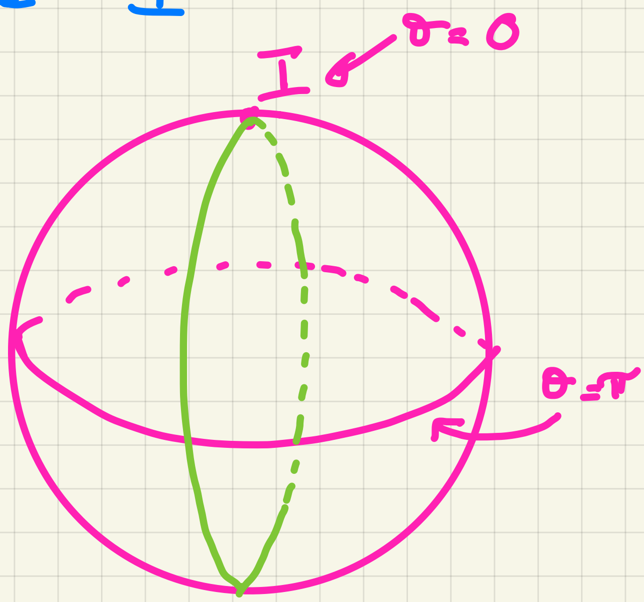
NOTA: il trucco della cintura di Dirac

https://m.youtube.com/watch?v=CYBqIRM8GiY

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$$

cammino chiuso da I





corrisponde a ruotare una particella attorno a un asse di 360°.

Per far tornare la particella al suo stato originario è necessaria una rotazione di 720°, infatti, percorrendo il cammino due volte, ottengo un cammino omotopo a un punto.

NOTA: $SO(3)$ agisce transitivamente su S^2.

Isotropia di N è $S^1 = SO(2)$.

Consideriamo:

$$\begin{tikzcd} SO(3) \arrow[r] \arrow[d] & S^2 \\ \frac{SO(3)}{SO(2)} \arrow[ur, "\text{diffeo}"'] & \end{tikzcd}$$

$$A \longmapsto A(N)$$

esempio di spazio omogeneo

$$
\begin{tikzcd}
S^3 \arrow[rr] \arrow[d] & & S^2 \\
S^3/S^1 \arrow[urr, "\text{diffeo}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
q \longmapsto \bar{q} N q
$$

$$
S^1 \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2
$$

$\boxed{\text{fibrazione di Hopf}}$

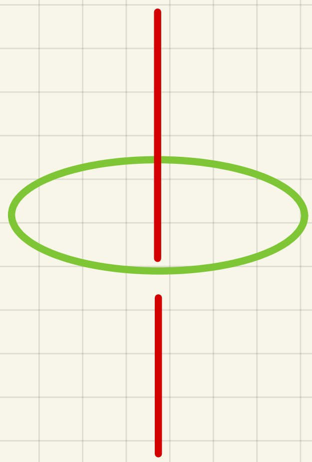
S^3 è un fibrato su S^2 con fibre S^1.

Primo esempio di fibrato principale <u>NON</u> banale.

<u>pensiamo</u> a $S^3/\mathbb{Z}_2$ come a $\overline{D^3_\pi(0)}$, con le opportune identificazioni.

- la fibra per N è l'asse NORD-SUD (un S^1 con le identificazioni)

- le fibre per S sono tutte le rotazioni di π con asse ortogonale all'asse NORD-SUD



Per dimostrare che

$$S^3 \not\cong S^2 \times S^1$$

utilizziamo la formula di Künneth

$$H^1(S^3) = 0$$

$$H^1(S^2 \times S^1) = H^1(S^2) \otimes H^0(S^1) + H^0(S^2) \otimes H^1(S^1) = \mathbb{R}$$

$SO(4)$

$$
\begin{tikzcd}
SU(2) \times SU(2) \arrow[rr, "*"] \arrow[d] & & SO(4) \\
\dfrac{SU(2) \times SU(2)}{\mathbb{Z}_2} \arrow[urr, "\text{iso}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$SU(2) \times SU(2) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$
$$(q, \; q', \; x) \longmapsto \bar{q} \, x \, q'$$

dè un elemento di $SO(4)$