Appunti per Geometria e Algebra Computazionale 3-2. Forma traccia, criterio di Sylvester.

Corso di Laurea in Matematica, Università di Firenze, 2019/20

Giorgio Ottaviani

19 maggio 2020

La forma traccia di Killing

Sia $f(x) \in K[x]$ un polinomio. Per ogni $a, b \in K[x]/(f(x))$ è definita la forma (bilineare) B di Killing

$$\begin{array}{ccccc} K[x]/(f(x)) & \times & K[x]/(f(x)) & \longrightarrow & K \\ a & & b & \mapsto & B(a,b) := tr(M_{ab}) \end{array}$$

dove M_{ab} è l'applicazione lineare $K[x]/(f(x)) \xrightarrow{M_{ab}} K[x]/(f(x))$ data dalla moltiplicazione per ab. Notiamo che $M_a M_b = M_b M_a = M_{ab}$.

È associata la forma quadratica $a \mapsto B(a,a) = tr(M_{a^2})$.

La forma traccia espressa dalle somme di potenze

Proposizione

Sia $n = \deg f$. *La matrice della forma di Killing nella base* $\{1, x, \dots x^{n-1}\}$ *ha la forma*

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & & s_{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & & s_{2n-2} \end{bmatrix}$$

dove s_i *è la* i*-esima somma di potenze nelle radici* $x_1, \dots x_n$ *di* f, *cioè* $s_i = \sum_{j=1}^n x_j^i$ *e prende il nome di Bezoutiante. Numerando le righe e le colonne da* 0 *a* $n-1$, *il coefficiente di posto* (i,j) *è* s_{i+j}.

Dimostrazione dell'espressione della forma traccia

Dimostrazione.

Numeriamo le righe e le colonne da 0 a $n-1$. Allora il coefficiente di posto (i,j) è $tr(M_{x^{i+j}})$.

Dimostrazione dell'espressione della forma traccia

Dimostrazione.

Numeriamo le righe e le colonne da 0 a $n-1$. Allora il coefficiente di posto (i,j) è $tr(M_{x^{i+j}})$. Per la teoria spettrale della matrice compagna, gli autovalori di M_x sono le radici $x_1, \ldots, x_n$ di $f(x)$ e quindi gli autovalori di $M_{x^{i+j}} = (M_x)^{i+j}$ sono $x_1^{i+j}, \ldots, x_n^{i+j}$ e la loro somma coincide con s_{i+j}. $\square$

Ortogonalità della decomposizione del teorema cinese

Teorema

I sottospazi di $K[x]/(f(x))$ isomorfi a $K[x]/(p_i(x)^{n_i})$, identificati tramite l'isomorfismo dato dal Teorema cinese , sono ortogonali a due a due rispetto alla forma di Killing B.

Ortogonalità della decomposizione del teorema cinese

Teorema

I sottospazi di $K[x]/(f(x))$ isomorfi a $K[x]/(p_i(x)^{n_i})$, identificati tramite l'isomorfismo dato dal Teorema cinese , sono ortogonali a due a due rispetto alla forma di Killing B.

Dimostrazione.

Due sottospazi sono generati rispettivamente da $b_i(x)g_i(x)$ e da $b_j(x)g_j(x)$. Abbiamo che $f(x)$ divide $g_i(x)g_j(x)$ e quindi l'applicazione lineare $M_{b_i(x)g_i(x)}M_{b_j(x)g_j(x)}$ è nulla in $K[x]/(f(x))$, pertanto la sua traccia è nulla. Questo prova che $\forall a \in K[x]/(p_i(x)^{n_i}), b \in K[x]/(p_j(x)^{n_j})$, vale $B(a, b) = 0$, come volevamo. $\square$

Gli addendi nel caso reale

Distinguiamo due casi.

1. Gli autospazi generalizzati della matrice compagna M_x corrispondono agli addendi $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ quando $p_i(x) = x - c_i$, cioè corrispondono alle radici c_i di f. Se la molteplicità della radice c_i è 1 allora l'autospazio generalizzato coincide con l'autospazio generalizzato relativo a c_i. Infatti $(M_x - c_i I)^{n_i} = M_{(x-c_i)^{n_i}} = 0$.

Gli addendi nel caso reale

Distinguiamo due casi.

1. Gli autospazi generalizzati della matrice compagna M_x corrispondono agli addendi $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ quando $p_i(x) = x - c_i$, cioè corrispondono alle radici c_i di f. Se la molteplicità della radice c_i è 1 allora l'autospazio generalizzato coincide con l'autospazio generalizzato relativo a c_i. Infatti $(M_x - c_i I)^{n_i} = M_{(x-c_i)^{n_i}} = 0$. $(x - c_i)^{n^i - 1}$ è autovettore con autovalore c_i.

Gli addendi nel caso reale

Distinguiamo due casi.

1. Gli autospazi generalizzati della matrice compagna M_x corrispondono agli addendi $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ quando $p_i(x) = x - c_i$, cioè corrispondono alle radici c_i di f. Se la molteplicità della radice c_i è 1 allora l'autospazio generalizzato coincide con l'autospazio generalizzato relativo a c_i. Infatti $(M_x - c_i I)^{n_i} = M_{(x-c_i)^{n_i}} = 0$. $(x - c_i)^{n^i - 1}$ è autovettore con autovalore c_i.
2. Quando $p_i(x)$ è un polinomio di secondo grado con una coppia di radici complesse coniugate $\{\alpha_i, \overline{\alpha_i}\}$, $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ è M_x-invariante, ed è somma dei due autospazi generalizzati corrispondenti alla coppia di radici su $\mathbb{C}$.

Gli addendi nel caso reale

Distinguiamo due casi.

1. Gli autospazi generalizzati della matrice compagna M_x corrispondono agli addendi $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ quando $p_i(x) = x - c_i$, cioè corrispondono alle radici c_i di f. Se la molteplicità della radice c_i è 1 allora l'autospazio generalizzato coincide con l'autospazio generalizzato relativo a c_i. Infatti $(M_x - c_i I)^{n_i} = M_{(x-c_i)^{n_i}} = 0$. $(x - c_i)^{n^i - 1}$ è autovettore con autovalore c_i.
2. Quando $p_i(x)$ è un polinomio di secondo grado con una coppia di radici complesse coniugate $\{\alpha_i, \overline{\alpha_i}\}$, $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ è M_x-invariante, ed è somma dei due autospazi generalizzati corrispondenti alla coppia di radici su $\mathbb{C}$. M_x non ha autovettori reali.

Gli addendi nel caso reale

Distinguiamo due casi.

1. Gli autospazi generalizzati della matrice compagna M_x corrispondono agli addendi $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ quando $p_i(x) = x - c_i$, cioè corrispondono alle radici c_i di f. Se la molteplicità della radice c_i è 1 allora l'autospazio generalizzato coincide con l'autospazio generalizzato relativo a c_i. Infatti $(M_x - c_i I)^{n_i} = M_{(x-c_i)^{n_i}} = 0$. $(x - c_i)^{n^i - 1}$ è autovettore con autovalore c_i.
2. Quando $p_i(x)$ è un polinomio di secondo grado con una coppia di radici complesse coniugate $\{\alpha_i, \overline{\alpha_i}\}$, $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ è M_x-invariante, ed è somma dei due autospazi generalizzati corrispondenti alla coppia di radici su $\mathbb{C}$. M_x non ha autovettori reali.

In entrambi i casi $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ è un *anello locale*, con unico ideale massimale generato dalla classe di $p_i(x)$. Il quoziente rispetto all'ideale massimale è isomorfo a $\mathbb{R}$ nel primo caso ed a $\mathbb{C}$ nel secondo caso.

Gli addendi nel caso reale come sviluppi di Taylor

Gli elementi in $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ possono essere riguardati come sviluppi di Taylor in $x = c_i$ nel primo caso e come una "coppia di sviluppi di Taylor coniugati" rispetto a $x = \alpha_i$ e $x = \overline{\alpha_i}$ nel secondo caso.

Gli elementi in $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ possono essere riguardati come sviluppi di Taylor in $x = c_i$ nel primo caso e come una "coppia di sviluppi di Taylor coniugati" rispetto a $x = \alpha_i$ e $x = \overline{\alpha_i}$ nel secondo caso. In particolare gli elementi invertibili di $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ corrispondono nel primo caso alle classi dei polinomi $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $q(c_i) \neq 0$, mentre nel secondo caso alle classi dei polinomi $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $q(\alpha_i) \neq 0$ (e dunque anche $q(\overline{\alpha_i}) \neq 0$.

Gli addendi nel caso reale come sviluppi di Taylor

Gli elementi in $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ possono essere riguardati come sviluppi di Taylor in $x = c_i$ nel primo caso e come una "coppia di sviluppi di Taylor coniugati" rispetto a $x = \alpha_i$ e $x = \overline{\alpha_i}$ nel secondo caso. In particolare gli elementi invertibili di $\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ corrispondono nel primo caso alle classi dei polinomi $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $q(c_i) \neq 0$, mentre nel secondo caso alle classi dei polinomi $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $q(\alpha_i) \neq 0$ (e dunque anche $q(\overline{\alpha_i}) \neq 0$.

$\mathbb{R}[x]/(p_i(x)^{n_i})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n_i nel primo caso e di dimensione $2n_i$ nel secondo caso.

Il criterio di Sylvester sul numero di radici reali

Teorema (Sylvester)

Sia B la matrice Bezoutiante di f, cioè la matrice della forma di Killing associata.
(i) f ha n radici reali e distinte se e solo se B è definita positiva.

Il criterio di Sylvester sul numero di radici reali

Teorema (Sylvester)

Sia B la matrice Bezoutiante di f, cioè la matrice della forma di Killing associata.
(i) f ha n radici reali e distinte se e solo se B è definita positiva.
(ii) f ha tutte le radici reali se e solo se B è semidefinita positiva.

Il criterio di Sylvester sul numero di radici reali

Teorema (Sylvester)

Sia B la matrice Bezoutiante di f, cioè la matrice della forma di Killing associata.
(i) f ha n radici reali e distinte se e solo se B è definita positiva.
(ii) f ha tutte le radici reali se e solo se B è semidefinita positiva.
(iii) Il rango di B è il numero di radici (reali o complesse) distinte di f.

Il criterio di Sylvester sul numero di radici reali

Teorema (Sylvester)

Sia B la matrice Bezoutiante di f, cioè la matrice della forma di Killing associata.
(i) f ha n radici reali e distinte se e solo se B è definita positiva.
(ii) f ha tutte le radici reali se e solo se B è semidefinita positiva.
(iii) Il rango di B è il numero di radici (reali o complesse) distinte di f.
(iv) il numero di radici reali (distinte) di f è uguale al numero di autovalori positivi di B meno il numero di autovalori negativi di B.

Teorema (Sylvester)

Sia B la matrice Bezoutiante di f, cioè la matrice della forma di Killing associata.
(i) f ha n radici reali e distinte se e solo se B è definita positiva.
(ii) f ha tutte le radici reali se e solo se B è semidefinita positiva.
(iii) Il rango di B è il numero di radici (reali o complesse) distinte di f.
(iv) il numero di radici reali (distinte) di f è uguale al numero di autovalori positivi di B meno il numero di autovalori negativi di B.

Dimostrazione.

L'ortogonalità della decomposizione del teorema cinese permette di ricondurre il calcolo della segnatura della forma di Killing su $K[x]/(f(x))$ a quello della segnatura su ogni addendo $K[x]/(p_i(x)^{n_i})$. □

Dimostrazione del criterio di Sylvester, la radice reale

Tutte le applicazioni lineari della forma

$$M_{p(x)} \colon K[x]/(p(x)^n) \to K[x]/(p(x)^n)$$

sono nilpotenti, quindi hanno tutti gli autovalori nulli e la traccia nulla.

Nel caso in cui $K = \mathbb{R}$ abbiamo due casi da distinguere,

1. $p(x) = x - c$ (radice reale)
2. $p(x) = x^2 + ax + b$ con $a^2 - 4b < 0$ (due radici complesse coniugate).

Nel primo caso, l'anello $K[x]/((x-c)^n)$ ha la base $1, x-c, (x-c)^2, \ldots, (x-c)^{n-1}$ e per quanto visto la matrice della forma di Killing ha tutti gli elementi nulli escluso quello in alto a sinistra, dove vale n, che è la traccia dell'identità. Pertanto il suo rango è 1 e la sua segnatura è 1, cioè ha un solo autovalore positivo e nessun autovalore negativo.

Dimostrazione del criterio di Sylvester, la coppia di radici coniugate, I

Nel secondo caso, l'anello $K[x]/((x^2+ax+b)^n)$ ha la base $1, x, (x^2+ax+b), x(x^2+ax+b), (x^2+ax+b)^2 \ldots, x(x^2+ax+b)^{n-1}$ e per quanto visto la matrice della forma di Killing ha tutti gli elementi nulli escluso quelli del blocco 2×2 in alto a sinistra, che corrisponde a

$$\begin{bmatrix} tr(1) & tr(M_x) \\ tr(M_x) & tr(M_{x^2}) \end{bmatrix}$$

Dimostrazione del criterio di Sylvester, la coppia di radici coniugate, II

Adesso $tr(1) = 2n$. Gli autovalori di M_x sono le radici di $(x^2 + ax + b)^n$. Chiamo $\alpha, \overline{\alpha}$ le due radici di $x^2 + ax + b = 0$, da cui $tr(M_x) = n(\alpha + \overline{\alpha})$, $tr(M_{x^2}) = n(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2)$.
Quindi la segnatura della forma di Killing su $K[x]/((x^2 + ax + b)^n)$ equivale alla segnatura della matrice

$$n \begin{bmatrix} 2 & \alpha + \overline{\alpha} \\ \alpha + \overline{\alpha} & \alpha^2 + \overline{\alpha}^2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$$

Dividendo la matrice per n (questo non modifica la segnatura), il determinante è $(\overline{\alpha} - \alpha)^2 = (-2i \cdot Im(\alpha))^2 = -4(Im\alpha)^2 < 0$, da cui abbiamo un autovalore positivo e un autovalore negativo. Inoltre il rango è 2.
Sommando i contributi di tutti gli addendi, si ottiene la segnatura della forma di Killing come nel teorema di Sylvester.