Appunti per Geometria e Algebra Computazionale 3-3. La forma traccia B_h, localizzazione delle radici.

Corso di Laurea in Matematica, Università di Firenze, 2019/20

Giorgio Ottaviani

19 maggio 2020

La regola di Cartesio sui segni

La segnatura di una forma quadratica reale può essere determinata facilmente, ispezionando il polinomio caratteristico. Infatti è noto che tutti gli autovalori di una matrice simmetrica reale sono reali, e si può applicare la

Teorema (Regola di Cartesio sui segni)

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali con tutte le radici reali. Il numero delle radici positive è uguale al numero delle variazioni di segno tra due suoi coefficienti non nulli consecutivi. Radici multiple sono contate quanto la loro molteplicità.

Per una dimostrazione si veda [Abate]. Nel criterio di Sylvester per B_h vedremo un modo di contare le radici positive di un polinomio anche senza l'ipotesi che tutte le radici siano reali.
Riguardo la regola di Cartesio, siccome la molteplicità della radice nulla è uguale all'esponente del più piccolo monomio che appare, possono essere calcolate esattamente il numero delle radici positive, nulle e negative (queste ultime per differenza).

La matrice compagna come operatore simmetrico

Notiamo che M_x è simmetrico rispetto alla forma traccia di Killing, nel senso che $B(M_x a, b) = tr(M_{xab}) = B(a, M_x b)$. Attenzione, perché non è lecito applicare il teorema spettrale a meno che la forma non sia definita positiva, e infatti M_x può non essere diagonalizzabile.

Se la forma B è definita positiva sappiamo, grazie alla teoria spettrale delle matrici compagne e al criterio di Sylvester, che f ha n radici reali distinte e che M_x è diagonalizzabile, in accordo col teorema spettrale.

Il punto di vista classico, la matrice di Vandermonde

Osservazione

Supponiamo che f abbia radici $x_1, \ldots x_n$ tutte reali. Definiamo la matrice di Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Un facile calcolo mostra che $V^t \cdot V$ coincide con la matrice Bezoutiante. Questa osservazione fornisce un argomento alternativo al fatto che la Bezoutiante è semidefinita positiva se f ha tutte le radici reali ed è definita positiva se le radici reali sono anche distinte. Questa è stata la strada seguita nel XIX secolo da Sylvester.

La forma traccia B_h

Per ogni $a, b \in K[x]/(f(x))$, $h \in K[x]$ è definita la forma (bilineare) B_h (generalizzazione della forma di Killing)

$$\begin{array}{ccccc} K[x]/(f(x)) & \times & K[x]/(f(x)) & \longrightarrow & K \\ a & & b & \mapsto & tr(M_{hab}) \end{array}$$

È associata la forma quadratica $a \mapsto tr(M_{ha^2})$. La funzione $h(x)$ va pensata come una sorta di "funzione test", scegliendo $h(x)$ opportune di gradi 1 o 2 si possono avere informazioni rilevanti sulla localizzazione delle radici di f secondo la seguente proposizione, che generalizza il teorema di Sylvester. La forma di Killing B definita in precedenza corrisponde a B_1 (cioè con $h = 1$).

Generalizzazione a B_h del criterio di Sylvester

Teorema

Per un polinomio reale $h(x)$ di grado n, sia B_h la matrice della forma definita da $B_h(a,b) = tr(M_{hab})$ per ogni $a, b \in K[x]/(f(x))$.
(i) f ha n radici reali distinte p tali che $h(p) > 0$ se e solo se B_h è definita positiva.
(ii) Il rango di B_h è il numero di radici (reali o complesse) distinte p di f tali che $h(p) \neq 0$.
(iii) il numero di radici reali (distinte) di f tali che $h(p) > 0$ meno il numero di radici reali (distinte) di f tali che $h(p) < 0$ è uguale alla segnatura di B_h.
Inoltre supponiamo che $h(p) \neq 0 \ \forall p \in V(I)$, ipotesi soddisfatta se h è primo con f.
(iv) il numero di radici reali (distinte) di f tali che $h(p) > 0$ (risp. $h(p) < 0$) è uguale al numero di autovalori positivi (risp. negativi) di B_h meno il numero di autovalori negativi di B.

Dimostrazione del criterio di Sylvester per B_h, I

Dimostrazione.

Ancora riconduciamo il calcolo della segnatura di B_h su $K[x]/(f(x))$ a quello della segnatura su ogni addendo $K[x]/(p_i(x)^{n_i})$, che sono ancora ortogonali, per lo stesso ragionamento fatto per la forma di Killing B.
Nel caso in cui $K = \mathbb{R}$ abbiamo due casi da distinguere, dove $p(x) = x - c$ (radice reale) oppure dove $p(x) = x^2 + ax + b$ con $a^2 - 4b < 0$ (due radici complesse coniugate).
Nel primo caso, l'anello $K[x]/((x-c)^n)$ ha la base $1, x-c, (x-c)^2, \ldots, (x-c)^{n-1}$ e per quanto visto la matrice della forma B_h, ristretta al sottospazio $K[x]/((x-c)^n)$, ha tutti gli elementi nulli escluso quello in alto a sinistra, dove vale $\mathrm{tr}(M_h) = \mathrm{tr}\,(h(M_x))$, per le proprietà della matrice compagna, (iv). Siccome M_x ha il solo autovalore c, con molteplicità algebrica n, la traccia di $h(M_x)$ vale $nh(c)$. Pertanto, il rango di B_h, ristretta al sottospazio $K[x]/((x-c)^n)$, vale 1 se $h(c) \neq 0$ e vale 0 se $h(c) = 0$, la sua segnatura è 1 se $h(c) > 0$ mentre è -1 se $h(c) < 0$. $\square$

Dimostrazione.

Nel secondo caso, l'anello $K[x]/((x^2+ax+b)^n)$ ha la base $1, x, (x^2+ax+b), x(x^2+ax+b), (x^2+ax+b)^3 \ldots, x(x^2+ax+b)^{n-1}$ e per quanto visto la matrice della forma B_h ha tutti gli elementi nulli escluso quelli del blocco 2×2 in alto a sinistra, che corrisponde a

$$\begin{bmatrix} tr(M_h) & tr(M_{xh}) \\ tr(M_{xh}) & tr(M_{x^2h}) \end{bmatrix}$$

$\square$

Dimostrazione.

Infatti la matrice 2×2 può essere scritta come

$$\begin{bmatrix} h(\alpha)+h(\overline{\alpha}) & h(\alpha)\alpha+h(\overline{\alpha})\overline{\alpha} \\ h(\alpha)\alpha+h(\overline{\alpha})\overline{\alpha} & h(\alpha)\alpha^2+h(\overline{\alpha})\overline{\alpha}^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(\alpha) & 0 \\ 0 & h(\overline{\alpha}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \overline{\alpha} \end{bmatrix} = U^t D U$$

e ha quindi rango due se $h(\alpha) \neq 0$ e α ha parte immaginaria non nulla. Quando questa condizione è soddisfatta, la sua segnatura è $(1,1)$ perché il suo determinante è negativo in quanto vale $(\det U)^2 \det D$ ed abbiamo $(\det U)^2 = (-2i \cdot Im\alpha)^2 < 0$, $\det D = h(\alpha)h(\overline{\alpha}) = h(\alpha)\overline{h(\alpha)} = |h(\alpha)|^2 > 0$.

□

Nel caso $h(x) = x$, il criterio di Sylvester permette di calcolare le radici positive. Nel caso $h(x) = x - a$, il criterio di Sylvester per B_h permette di calcolare le radici $> a$.

Osservazione

E' possibile calcolare il numero di radici contenute in un qualunque intervallo. Infatti il numero di radici nell'intervallo $(a, b]$ *si ottiene sottraendo dal numero di radici* $> a$ *quelle che sono* $> b$.

Il caso B_x

La dimostrazione della proposizione seguente è formalmente identica a quella per $B = B_1$.

Proposizione

Sia $n = \deg f$. *La matrice della forma* B_x *nella base* $\{1, x, \dots x^{n-1}\}$ *è*

$$B_x = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ s_3 & s_4 & \dots & & s_{n+2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & & s_{2n-1} \end{bmatrix}$$

Numerando le righe e le colonne da 0 *a* $n-1$, *il coefficiente di posto* (i,j) *di* B' *è* s_{i+j+1}.

Calcolo di B_h

Osservazione

La matrice di B_h nella base standard $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ si può calcolare nel modo seguente. Se $h(x) = \sum_k a_k x^k$ allora al posto (i, j) (con la solita numerazione da 0 a $n-1$) abbiamo $\sum_k a_k s_{i+j+k}$ (dove s_i è la i-esima somma di potenze nelle radici di f), calcolabile facilmente con Macaulay 2 come $tr(h(M_x)M_x^{i+j}) = tr(M_{h(x)x^{i+j}})$, dove M_x è la matrice compagna.

Criterio per calcolare il numero di radici reali di un polinomio

Sia dato un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Dalla traccia della matrice compagna e delle sue potenze si calcola la matrice Bezoutiante. Dalla regola di Cartesio si può calcolare, mediante il polinomio caratteristico della matrice Bezoutiante B, il numero di autovalori positivi e il numero di autovalori negativi di B.

Allora, per il teorema di Sylvester, il numero di radici reali (distinte) è dato dal numero di autovalori positivi di B meno il numero di autovalori negativi di B.

Calcolo effettivo delle molteplicità delle radici.

Per conoscere effettivamente le molteplicità di ciascuna radice di $f(x)$, si può calcolare $f_{rid} = \frac{f}{MCD(f,f')}$ e poi continuare induttivamente a valutare le radici di $f_2 = f/f_{rid} = MCD(f, f')$, $f_3 = f_2/f_{2\,rid}$, e così via. Se chiamiamo d_i il numero di radici distinte di f_i , calcolabile mediante il Criterio di Sylvester (ii), allora il numero di radici di molteplicità i è uguale a $d_i - d_{i+1}$.

Analogamente, se chiamiamo r_i il numero di radici reali distinte di f_i , calcolabile mediante il Criterio di Sylvester (iii), allora il numero di radici reali di molteplicità i è uguale a $r_i - r_{i+1}$. Analogamente si possono trovare le molteplicità delle radici in un qualunque intervallo.

Criterio per stabilire se una matrice reale è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

Sia data A matrice reale. Si calcola il polinomio minimo di A, considerando la dipendenza lineare tra $\{A^0, A^1, \ldots, A^i\}$. Si calcola la matrice Bezoutiante B del polinomio minimo.

A è diagonalizzabile se e solo se B è definita positiva. Questo segue da (i) del criterio di Sylvester e dal criterio di diagonalizzabilità.

Ricordiamo che B è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono positivi.