La fibrazione di Hopf

$$S^3 \longrightarrow S^2$$

è un esempio di fibrato principale (non banale) con gruppo di strutture S^1.

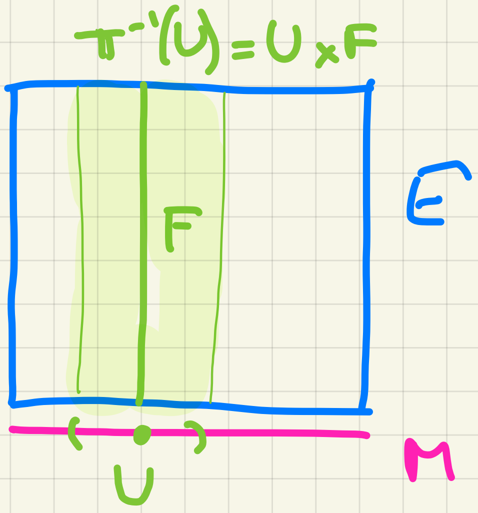
- Siano E, M, F varietà.

Sia $\pi : E \longrightarrow M$ una mappa C^∞ suriettiva. Una <u>banalizzazione locale</u> per π con <u>fibre</u> F è un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U\}$ di M con una collezione

$$\{\phi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F \mid U \in \mathcal{U}\}$$

di diffeomorfismi che preservano le fibre:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & U \times F \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$



Un <u>fibrato con fibra F</u>

è una mappa $\pi : E \to M$

suriettiva che ammette una

banalizzazione locale.

F fibra

E spazio totale del fibrato

M base del fibrato.

- la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ è una sottovarietà di E diffeo a F.

Sia G un gruppo di Lie.

Un **G-fibrato principale** P su M è un fibrato $\pi : P \longrightarrow M$ con fibre G se

- G agisce a destra su P
- le mappe di banalizzazione locale $\phi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ sono G-equivarianti: a destra

es: rivedere la fibrazione di Hopf alla luce di questa definizione

Sia $\pi : P \longrightarrow M$ un

G-fibrato principale e sia

$\rho : G \longrightarrow Aut(V)$ una   ← appl. lin. da V in V invertibile

rappresentazione del gruppo G,

ossia ρ è un omomorfismo:

$$\rho(e) = id_V$$

$$\rho(g \cdot h) = \rho(g) \circ \rho(h)$$

fissando una base di V

trovo $\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$

o

$\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$

se V è complesso.

Se ρ è iniettiva la rappresentazione si dice fedele.

Dati $\rho : G \to Aut(V)$ e $P \xrightarrow{\pi} M$ fibrato principale con gruppo di struttura G costruiamo il fibrato associato con fibra V:

$$\boxed{E = P \times_\rho V}$$

dove $P \times_\rho V = \dfrac{P \times V}{\sim}$

e $(p, v) \sim (p', v')$ se esiste $g \in G$ t.c. $p' = p \cdot g$ e $v' = \rho(g^{-1}) v$

NOTA: E è un fibrato vettoriale su M di rango uguale alla dimensione di V.

Verifica:

$$\pi_E : E = P \times_\rho V \longrightarrow M$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ [pg,\, \rho(g^{-1})v]}}{[p, v]} \longmapsto \underset{\substack{\shortparallel \\ \pi(pg)}}{\pi(p)}$$

banalizzazione locale: sia ψ una banalizzazione locale per P, allora:

$$\pi^{-1}(U) \times_\rho V \overset{①}{\xrightarrow{\sim}} (U \times G) \times_\rho V \overset{②}{\xrightarrow{\sim}} U \times V$$

$$\underbrace{[\,p\,,\,v\,]}_{\substack{\shortparallel \\ \pi_E^{-1}(U)}} \longmapsto [(\pi(p), g), v] \longmapsto (\pi(p), \rho(g)v)$$

1. diffeo per def di banalizzazione locale di P

2. $$(U \times G) \times_\rho V \longrightarrow U \times V$$
$$[(x, g), v] \longmapsto (x, \rho(g)v)$$

ben definita :

$$[(x, g)h, \rho(h^{-1})v]$$
$$\longmapsto (x, \rho(gh)\rho(h^{-1})v) = (x, \rho(g)v)$$

C^∞ e biunivoca!

sia $\psi : U \times V \longrightarrow (U \times G) \times_\rho V$
$$(x, v) \longmapsto [(x, 1), v]$$

$$
\begin{tikzcd}
(U\times G)\times_\rho V \arrow[rr, shift right, "\phi"'] \arrow[dr, "\pi_E"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U\times V \arrow[ll, shift right, "\psi"'] \arrow[dl] \\
 & U &
\end{tikzcd}
$$

- $\phi([(x,g),v]) = (x, \rho(g)v)$
- $\psi(x,v) = ([(x,1),v])$
- $(\psi\circ\phi)([(x,g),v]) = \psi(x,\rho(g)v)$

$$= ([(x,1),\rho(g)v])$$

$$([(x,g),\rho(g^{-1})\rho(g)v])$$

$$= ([(x,g),v])$$

- $(\phi\circ\psi)(x,v) = \phi([(x,1),v]) = (x,v)$

ϕ e ψ sono uno l'inversa dell'altra e sono C^∞.

NOTA: sia $p \in P$ e $x = \pi(p)$

Il punto p definisce uno isomorfismo di spazi vettoriali:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow E_x \\ v &\longmapsto [p, v] \end{aligned}$$

Esempi:

- fibrato aggiunto: sia G un gruppo di Lie e sia $Ad: G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$ la rappresentazione aggiunta.

$\boxed{Ad\,P = P \times_{Ad} \mathfrak{g}}$ si dice fibrato aggiunto di P

- Sia M una varietà differenziabile. Consideriamo il fibrato principale dei riferimenti di M: $P(M, GL(n,\mathbb{R}))$ è un fibrato principale su M con gruppo $GL(n,\mathbb{R})$.

Come insieme

$$P(M, GL(n,\mathbb{R})) = \bigsqcup_{x \in M} Fr(T_x M)$$

quindi $p \in P$ è una base di $T_x M$ per un certo $x \in M$

$$\pi : P \longrightarrow M$$
$$p \longmapsto x$$

banalizzazione locale:

Sia $\{(U,\phi)\}$ un atlante di M:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) &\xrightarrow{\ \Phi\ } U \times GL(n,\mathbb{R}) \\ p &\longmapsto (\pi(p), A) \end{aligned}$$

dove $p = (v_1, \ldots, v_n)$ e

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) A = (v_1, \ldots, v_n)$$

Φ è G-equivariante e

preserva le fibre.

NOTA: i fibrati tangente e cotangente, così come il fibrato delle k-forme su M, sono fibrati associati a $P(M, GL(n,\mathbb{R}))$.

- $\rho : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Aut(\mathbb{R}^n)$

$$A \longmapsto (x \mapsto Ax)$$

dà il fibrato tangente

- $\rho^{\vee} : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Aut((\mathbb{R}^n)^*)$

$$A \longmapsto (x \mapsto A^{-T} x)$$

dà il fibrato cotangente

NOTA: sia $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e $p = (v_1, \quad, v_n)$

$$[p, \underline{a}] \xmapsto{\sim} [(\pi(p), A), \underline{a}] \mapsto (\pi(p), A\underline{a})$$

abbiamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) A = (v_1, \quad, v_n)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) A\underline{a} = (v_1, \quad, v_n)\underline{a}$$

dunque

è il vettore di $T_{\pi(p)}M$ di coordinate $\underline{a}$ rispetto alla base p e coordinate $A\underline{a}$ rispetto alla base $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$.

NOTA: sia $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^n)^*$ e $p = (r_1, , r_n)$

$$[p, \underline{a}] \stackrel{\sim}{\longmapsto} [(\pi(p), A), \underline{a}] \mapsto (\pi(p), A^{-T}\underline{a})$$

abbiamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, , \frac{\partial}{\partial x^n}\right) A = (v_1, , v_n)$$

dunque

$$(dx^1, , dx^n) A^{-T} = (v_1^*, , v_n^*)$$

dunque $[p, \underline{a}]$ è la 1-forma di coordinate $\underline{a}$ rispetto alla base duale di p e di coordinate $A^{-T}\underline{a}$ rispetto alla base $(dx^1, \dots, dx^n)$

FIBRATO PRINCIPALE

$$\begin{tikzcd} & P(M, GL(n,\mathbb{R})) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ TM & T^*M & k\text{-forme su } M \end{tikzcd}$$

FIBRATI VETTORIALI ASSOCIATI

<u>NOTA</u> Sia $E \longrightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango r.

Il fibrato dei riferimenti di E è un fibrato principale con gruppo $GL(r, \mathbb{R})$.

FUNZIONI DI TRANSIZIONE DI $\pi : P \longrightarrow M$ CON GRUPPO STRUTTURALE G.

<u>Proposizione</u> Sia $\pi : P \to M$ un G-fibrato principale. Allora G agisce transitivamente sulle fibre.

<u>Dim</u> Localmente, per $x \in M$ esiste U t.c. $x \in U$ e

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G \quad \text{diffeo}$$

G-equivariante. In particolare

$$\phi : \pi^{-1}(x) \to \{x\} \times G$$

poiché G agisce transitivamente su $\{x\} \times G$ allora G agisce transitivamente sulla fibra $\pi^{-1}(x)$.

<u>Proposizione</u> Per ogni gruppo di Lie G una mappa G-equivariante a destra

$$f : G \longrightarrow G$$ è necessariamente una traslazione sinistra.

<u>Dimostrazione</u>:

Sappiamo che $\forall \; x, g \in G$

$$f(xg) = f(x)g$$

ponendo $x = e$ otteniamo

$$f(g) = f(e)\,g$$

quindi $f = L_{f(e)}$ $\blacksquare$

Funzioni di transizione:

Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una banalizzazione locale di $\pi : P \longrightarrow M$.

Siano $\alpha, \beta \in A$ t.c. $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

allora

$$U_{\alpha\beta} \times G \xleftarrow{\ \phi_\alpha\ } \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\ \phi_\beta\ } U_{\alpha\beta} \times G$$

quindi

$$U_{\alpha\beta} \times G \xleftarrow{\ \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}\ } U_{\alpha\beta} \times G$$

è una mappa G-equivariante a destra che preserva le fibre.

Quindi su ogni fibra è una traslazione sinistra:

$$\boxed{\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x,h) = (x, g_{\alpha\beta}(x)h)}$$

traslazione a sinistra

con $(x,h) \in U \times G$ e

$g_{\alpha\beta}(x) \in G$

NOTA: $\boxed{g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G}$

è C^∞, questo si deduce, ponendo $h=e$, ~~dal~~ dal fatto che $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ è C^∞.

Le funzioni $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G$ sono chiamate <u>funzioni di transizione</u> di $\pi : P \to M$ relative alla banalizzazione locale $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Le funzioni di transizione soddisfano la CONDIZIONE DI COCICLO

$$\boxed{g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}}$$

se $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$

se ne deduce:

- $g_{\alpha\alpha}(x) = e \quad \forall\; x \in U_\alpha$

- $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

NOTA Possiamo assegnare un fibrato assegnando una collezione di funzioni di transizione. Più precisamente:

Sia M una varietà, sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di M e sia G un gruppo di Lie.

Data una collezione di mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ $\forall\, \alpha, \beta$ t.c. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ che soddisfano la condizione di cociclo possiamo costruire un fibrato principale $P(M,G)$ con funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ relative allo banalizzazione locale $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

$$P(M,G) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times G \right) \Big/ \sim$$

dove $(x,h) \in U_\alpha \times G$

$(x',h') \in U_\beta \times G$

sono equivalenti se

$x = x' \in U_{\alpha\beta}$ e $h = g_{\alpha\beta}(x) h'$ ∎

NOTA: Sia $\pi : P \longrightarrow M$ un G-fibrato principale.

Assegnare una banalizzazione locale $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di P equivale ad assegnare una collezione di sezioni locali

$$s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow P$$

con $(\pi \circ s_\alpha)(x) = x \quad \forall\, x \in U_\alpha$

Infatti: data $\{U_\alpha\}$ con

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$$

definiamo $s_\alpha(x) = \phi_\alpha^{-1}(x, e)$

<u>Viceversa</u>: dati $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$

e $s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow P$ t.c.

$(\pi \circ s_\alpha)(x) = x \quad \forall\, x \in U_\alpha$

notiamo che, se $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$

$\exists$ un unico $g \in G$ t.c.

$p = s_\alpha(\pi(p))\, g$ ⟵ denotiamo $g_\alpha(p)$

quindi è definita:

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$

$$p \longmapsto (\pi(p), g_\alpha(p))$$

ϕ_α è G-equivariante

$$\phi_\alpha(ph) = \left(\pi(ph),\, g_\alpha(ph)\right) =$$
$$= \left(\pi(p),\, g_\alpha(p)h\right)$$

infatti:

se $\quad p = s_\alpha(\pi(p))\, g_\alpha(p)$

$$ph = s_\alpha(\pi(p))\, g_\alpha(p)\, h$$

dunque $\quad g_\alpha(ph) = g_\alpha(p)\, h$

$$\left(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}\right)(x,h) = \left(x,\, g_{\alpha\beta}(x)\, h\right)$$

$$\phi_\beta^{-1}(x,h) = \phi_\alpha^{-1}\left(x,\, g_{\alpha\beta}(x)\, h\right)$$

$h = e$

$$\boxed{s_\beta(x) = s_\alpha(x)\, g_{\alpha\beta}(x)}$$

Funzioni di transizione e fibrati vettoriali associati:

Sia $\pi : P \longrightarrow M$ un G-fibrato principale e sia E il fibrato associato a P mediante una rappresentazione $\rho : G \longrightarrow Aut(V)$.

Ricordiamo che una banalizzazione locale di P dà luogo a una banalizzazione locale di E.

Localmente $\pi^{-1}(U_\alpha) \overset{\phi_\alpha}{\simeq} U_\alpha \times G$

$$\pi_E^{-1}(U_\alpha) \overset{\psi_\alpha}{\simeq} U_\alpha \times V$$

allora

$$(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(x, h) = (x, g_{\alpha\beta}(x) h)$$

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, v) = (x, \rho(g_{\alpha\beta}(x)) v)$$

<u>Esempio</u> $P(M, GL(n, \mathbb{R}))$ e TM

Siano $(U_\alpha, x^1, \ldots, x^n)$ e
$(U_\beta, y^1, \ldots, y^n)$

due carte locali di M.

Allora

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times GL(n, \mathbb{R})$$
$$p \longmapsto (\pi(p), A)$$

dove $p = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) A$

$$\phi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times GL(n,\mathbb{R})$$

$$p \longmapsto (\pi(x), B)$$

con $\quad p = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) B$

$$\begin{array}{ccccc} U_{\alpha\beta}\times GL(n,\mathbb{R}) & \xleftarrow{\ \phi_\alpha\ } & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\ \phi_\beta\ } & U_{\alpha\beta}\times GL(n,\mathbb{R}) \\ (\pi(p), A) & \longleftarrow\!\!\shortmid & p & \longmapsto & (\pi(p), B) \end{array}$$

$$(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(\pi(p), B) = (\pi(p), A)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) A = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) B$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) \underset{J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})}{\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ & & \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad A = J(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}) B$$

Quindi $\quad g_{\alpha\beta}(x) = J(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})$

e

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, \underline{b}) = (x, J(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})\underline{b})$$

$\underline{b}$ = coordinate rispetto a $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right)$

Riduzione del gruppo di struttura

Sia H un sottogruppo di Lie di G e sia $P \xrightarrow{\pi} M$ un G fibrato principale. Il gruppo di struttura G si dice riducibile ad H se esiste un sottofibrato P' di P con gruppo di struttura H.

NOTA: il gruppo di struttura G è riducibile al gruppo di struttura H se e solo se esiste un ricoprimento banalizzante di M con funzioni di transizione $\boxed{g_{\alpha\beta} \in H}$

Esempi :

$P(M, GL(n,\mathbb{R}))$:

- M orientabile se e solo se $GL(n,\mathbb{R})$ si riduce a $GL(n,\mathbb{R})_+$
- dotare M di una metrica Riemanniana g significa ridurre $GL(n,\mathbb{R})$ a $O(n)$
- - se consideriamo M Riemanniana e orientata $GL(n,\mathbb{R})$ si riduce a $SO(n)$.

quindi $g_{\alpha\beta} \in SO(n)$.

Lift del gruppo di struttura

Esempio: consideriamo

$$SU(2) \longrightarrow SO(3)$$

rivestimento.

Il gruppo di struttura $SO(3)$ può essere liftato al gruppo $SU(2)$ se

$$\begin{tikzcd} & SU(2) \arrow[d] \\ g_{\alpha\beta} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & SO(3) \end{tikzcd}$$

liftano a $SU(2)$.

se il lift esiste otteniamo un fibrato

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & P \arrow[dl] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

dove p, fibra per fibra, coincide con la mappa di rivestimento

$$SU(2) \longrightarrow SO(3)$$