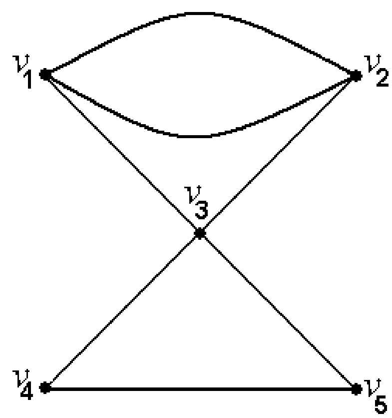
Soluzioni per gli esercizi di ***Teoria dei grafi***.

Esercizio 1

Sia $\mathcal{G}$ il multigrafo (con 5 vertici e 7 lati) disegnato qui sotto nel piano senza sovrapposizione di lati. Si dica:

(i) se $\mathcal{G}$ è euleriano;
(ii) se $\mathcal{G}$ ha cammini euleriani, e in caso affermativo se ne descriva uno;
(iii) se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.

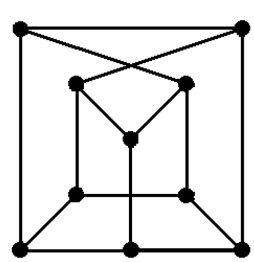


Soluzione – Poiché $\mathcal{G}$ è connesso e ha esattamente due vertici di grado dispari, $\mathcal{G}$ non è euleriano ma ha almeno un cammino euleriano (che ha per estremi i due vertici di grado dispari). Ad esempio c'è quello che parte da v_1, arriva a v_2 per uno dei due lati che hanno per estremi questi due vertici, torna a v_1 per l'altro lato ancora disponibile, poi tocca nell'ordine v_3, v_4, v_5, ancora v_3 e finisce in v_2 .

$\mathcal{G}$ non è hamiltoniano perché non è $2-$ connesso (sopprimendo il vertice v_3 e tutti i lati ad esso incidenti si ottiene un grafo con due componenti connesse).

Esercizio 2

Sia $\mathcal{G}$ il grafo disegnato qui sotto, che ha 10 vertici e 15 lati. Si dica se $\mathcal{G}$ è un grafo piano.



Soluzione – Il grafo dato ha calibro 5. Se fosse piano, sarebbe (indicando con λ il numero dei lati, con n il numero dei vertici e con c il calibro)

$$\lambda \leq \tfrac{c}{c-2}(n-2)$$

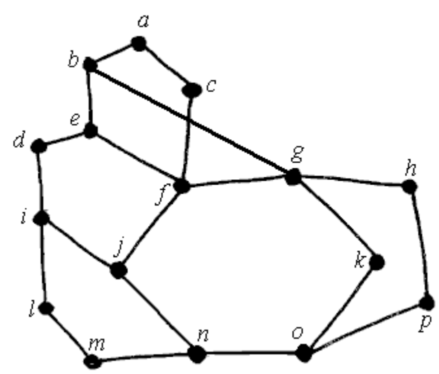
ossia

$$15 \leq \tfrac{5}{3} \cdot 8 = \tfrac{40}{3}$$

Poiché tale disuguaglianza è falsa, il grafo non è piano.

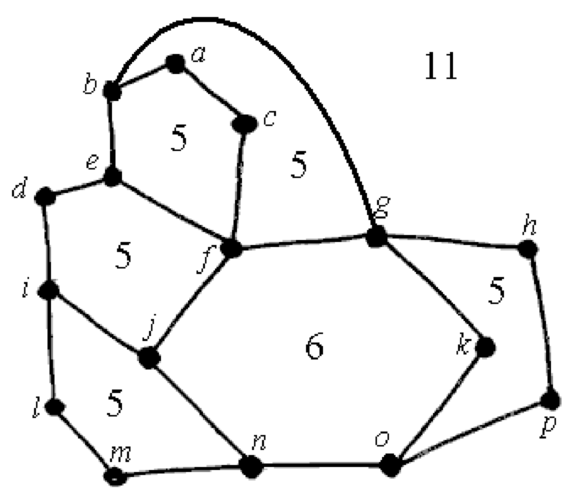
Esercizio 3

Sia $\mathcal{G}$ il grafo disegnato qui sotto, che ha 16 vertici e 21 lati. Si dica se $\mathcal{G}$ è euleriano e/o hamiltoniano.



Soluzione – Poiché i vertici contrassegnati dalle lettere b, e, i, j, n e o hanno tutti grado dispari, $\mathcal{G}$ non è euleriano.

Osserviamo adesso che $\mathcal{G}$ è un grafo piano; per disegnarlo nel piano senza sovrapposizione di lati basta disegnare il lato di estremi b e g in modo che non attraversi quello di estremi c e f:



Supponiamo che in $\mathcal{G}$ esista un ciclo hamiltoniano $\mathcal{C}$: sia x la differenza fra il numero e_5 delle facce col bordo di 5 lati esterne a $\mathcal{C}$ e il numero i_5 delle facce col bordo di 5 lati interne a $\mathcal{C}$; osserviamo poi che esiste una sola faccia col bordo di 6 lati, e che esiste infine una sola faccia col bordo di 11 lati, necessariamente esterna a $\mathcal{C}$. Per il teorema di Grinberg deve essere

$$3x \pm 4 \pm 9 = 0$$

ossia

$$4 = \pm(9 \pm 3x)$$

ma questo è assurdo perché il primo membro non è multiplo di 3 mentre il secondo lo è: dunque in $\mathcal{G}$ non può esistere un ciclo hamiltoniano, cioè $\mathcal{G}$ non è hamiltoniano.

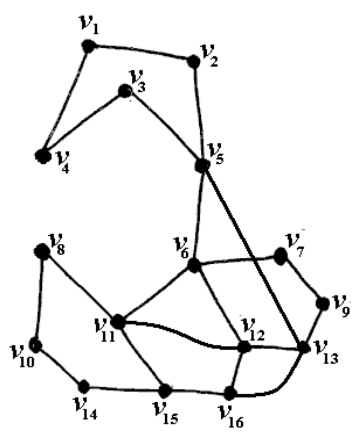
Esercizio 4

Sia $\mathcal{G}$ il grafo disegnato qui di seguito, che ha 16 vertici e 22 lati. Si dica

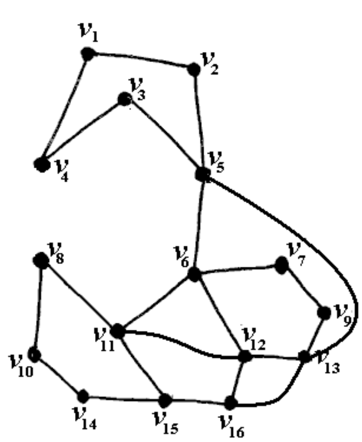
(i) se $\mathcal{G}$ è un grafo piano;

(ii) se $\mathcal{G}$ è un grafo euleriano; se $\mathcal{G}$ possiede un circuito euleriano; se $\mathcal{G}$ possiede un cammino euleriano;

(iii) se $\mathcal{G}$ è un grafo hamiltoniano.



Soluzione – Poiché $\mathcal{G}$ può essere disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati (basta disegnare in modo diverso il lato di estremi v_2 e v_7), $\mathcal{G}$ è un grafo piano.

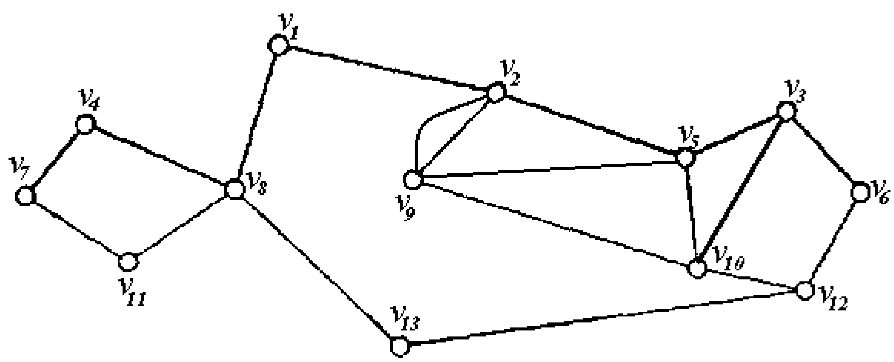


Poiché $\mathcal{G}$ ha esattamente due vertici di grado dispari (v_{15} e v_{16}), $\mathcal{G}$ non è euleriano (cioè non possiede un circuito euleriano), ma $\mathcal{G}$ possiede un cammino euleriano i cui estremi sono appunto v_{15} e v_{16} .

Infine, poiché $\mathcal{G}$ non è $2 -$ connesso (basta sopprimere il vertice v_5 per ottenere un grafo non connesso) $\mathcal{G}$ non è hamiltoniano.

Esercizio 5

Sia $\mathcal{G}$ il (multi)grafo senza orientamento qui disegnato, che ha 13 vertici e 19 lati:

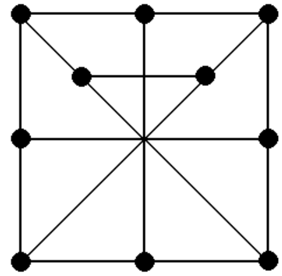


Si stabilisca se $\mathcal{G}$ è un (multi)grafo euleriano e/o possiede un cammino euleriano, precisando in quest'ultimo caso quali vertici possono essere gli estremi di tale cammino. Si stabilisca inoltre se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.

Soluzione – Poiché non tutti i vertici di $\mathcal{G}$ hanno grado pari, $\mathcal{G}$ non è euleriano; poiché $\mathcal{G}$ è connesso e soltanto due vertici di $\mathcal{G}$ (v_3 e v_{12}) hanno grado dispari, $\mathcal{G}$ ha un cammino euleriano che ha per estremi appunto v_3 e v_{12} ; poiché $\mathcal{G}$ non è $2 -$ *connesso* (infatti basta sopprimere il vertice v_2 perché il grafo risultante non sia connesso), $\mathcal{G}$ non è hamiltoniano.

Esercizio 6

Sia $\mathcal{G}$ il grafo disegnato qui sotto, che ha 10 vertici e 15 lati. Si dica se $\mathcal{G}$ è un grafo piano.



Soluzione – Il grafo dato ha calibro 5. Se fosse piano, sarebbe (indicando con λ il numero dei lati, con n il numero dei vertici e con c il calibro)

$$\lambda \leq \frac{c}{c-2}(n-2)$$

ossia

$$15 \leq \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3}$$

Poiché tale disuguaglianza è falsa, il grafo non è piano.

Esercizio 7

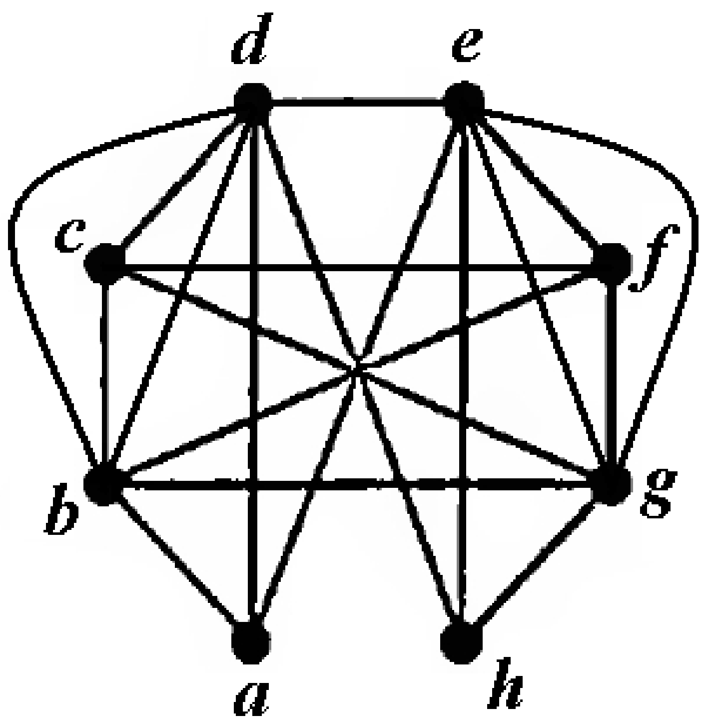
Sia $\mathcal{G}$ il (multi)grafo senza orientamento disegnato qui sotto, che ha come vertici i punti a, b, c, d, e, f, g, h. Si dica:

(i) se $\mathcal{G}$ è euleriano;

(ii) se $\mathcal{G}$ ha un cammino euleriano (e quali sono i possibili estremi di tale cammino);

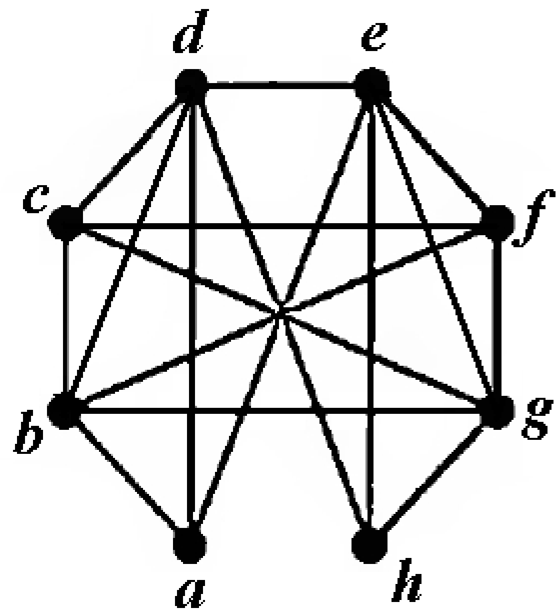
(iii) se $\mathcal{G}$ è un grafo piano;

(iv) se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.



Soluzione – Da un controllo diretto risulta che i vertici b, c, d, e, f e g hanno grado pari, mentre i vertici a e h hanno grado dispari. Dunque $\mathcal{G}$ non è euleriano, ma possiede un cammino euleriano che necessariamente inizia in a e finisce in h o viceversa.

Per valutare se $\mathcal{G}$ si può disegnare sul piano senza sovrapposizione di lati, ragioniamo sul suo sostegno (infatti $\mathcal{G}$ ha due coppie di lati paralleli, la prima fra i vertici b e d, la seconda fra i vertici e e g):



Il sostegno di $\mathcal{G}$ è un grafo con 17 lati, 8 vertici e calibro 3, dunque soddisfa la disuguaglianza

$$17 \leq 3 \cdot (8 - 2) = 18$$

cosa che non ci consente di concludere alcunché.

Una attenta osservazione ci permette però di individuare il sottografo indotto dai vertici b, c, d, e, f e g, che è isomorfo al grafo completo bipartito $\mathcal{K}_{3,3}$ (con $\mathcal{V}_1 := \{b, c, e\}$ e $\mathcal{V}_2 := \{d, f, g\}$). Dunque possiamo concludere che $\mathcal{G}$ non è un grafo piano.

Resta da stabilire se $\mathcal{G}$ sia hamiltoniano; una verifica diretta mostra che

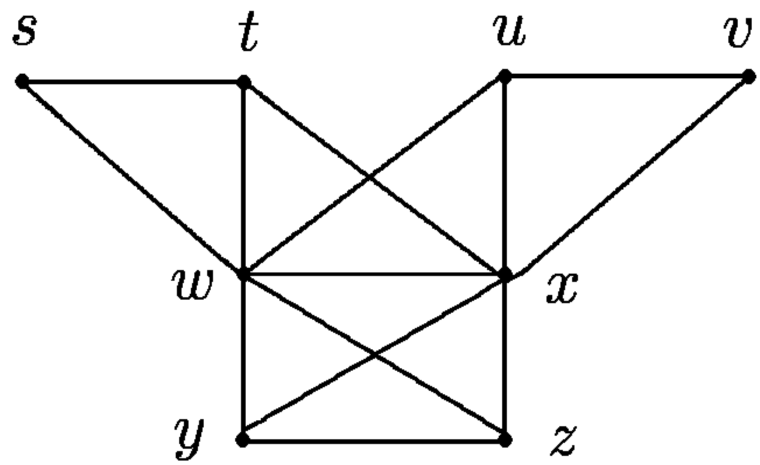
$$a - e - h - g - f - b - c - d - a$$

è un ciclo hamiltoniano di $\mathcal{G}$, dunque $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.

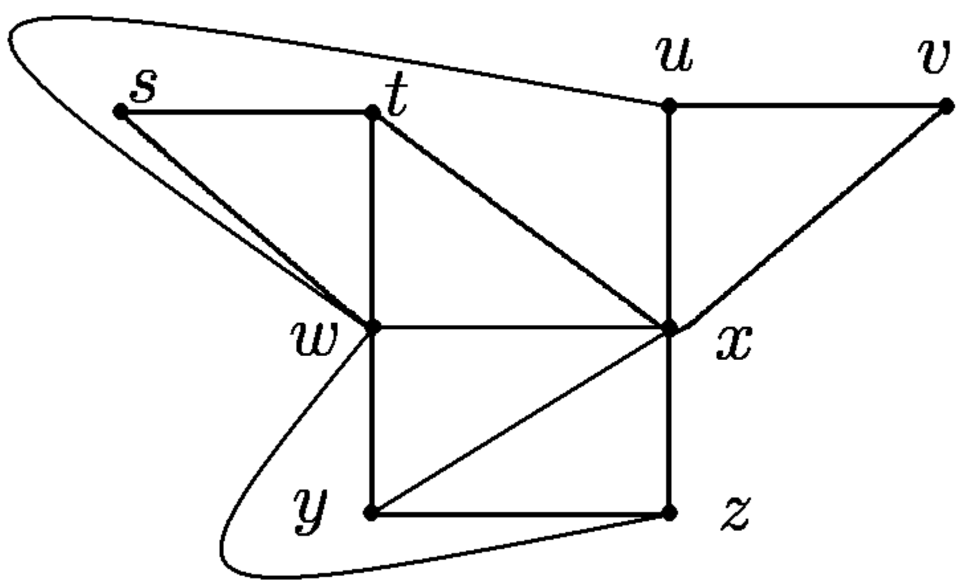
Esercizio 8

Sia $\mathcal{G}$ il grafo (con 8 vertici e 14 lati) disegnato qui sotto. Si dica:

(i) se $\mathcal{G}$ è un grafo piano;
(ii) se $\mathcal{G}$ è un grafo euleriano;
(iii) se $\mathcal{G}$ ha cammini euleriani, e in caso affermativo se ne descriva uno;



Soluzione – Disegnando il lato di estremi $w - z$ in modo che non incroci quello di estremi $x - y$ e disegnando il lato $w - u$ in modo che non incroci quello di estremi $x - t$ si ottiene un disegno di $\mathcal{G}$ nel piano senza sovrapposizione di lati:

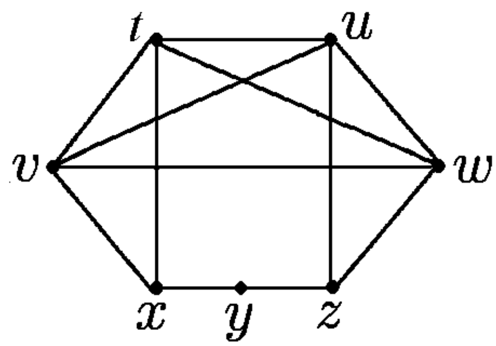


Dunque $\mathcal{G}$ è un grafo piano. Poiché i vertici t, u, y e z hanno grado dispari ($= 3$), $\mathcal{G}$ non è un grafo euleriano e non ha alcun cammino euleriano.

Esercizio 9

Sia $\mathcal{G}$ il grafo (con 7 vertici e 12 lati) disegnato qui sotto. Si dica:

(i) se $\mathcal{G}$ è un grafo piano;
(ii) se $\mathcal{G}$ è un grafo euleriano;
(iii) se $\mathcal{G}$ ha cammini euleriani, e in caso affermativo se ne descriva uno;
(iv) se $\mathcal{G}$ è un grafo hamiltoniano.



Soluzione – Sia $\mathcal{G}$' il sottografo che si ottiene da $\mathcal{G}$ sopprimendo i lati vt e uw, e sia $\mathcal{G}$'' il grafo che si ottiene da $\mathcal{G}$' sopprimendo il vertice y e sostituendo i due lati xy e yz con un unico lato xz: è immediato verificare che $\mathcal{G}$'' è isomorfo a $\mathbf{K}_{3,3}$. Dunque $\mathcal{G}$ non è un grafo piano perché ha un sottografo ($\mathcal{G}$') isomorfo a una suddivisione di $\mathbf{K}_{3,3}$.

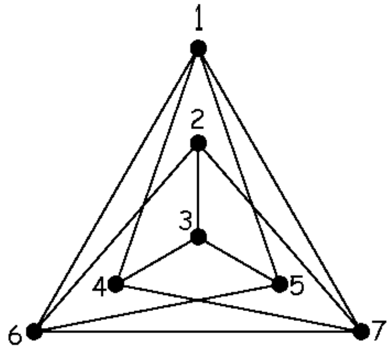
Poiché $\mathcal{G}$ è connesso ed ha esattamente due vertici di grado dispari, $\mathcal{G}$ non è un grafo euleriano ma ha un cammino euleriano, ad esempio

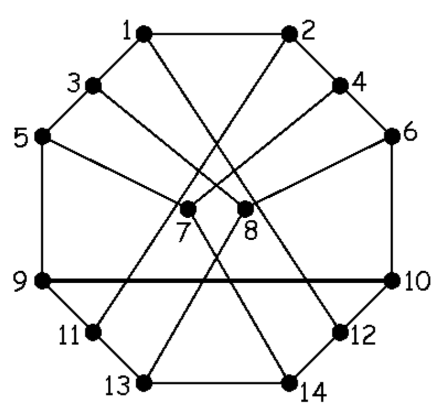
$$x, (xv), v, (vt), t, (tu), u, (uv), v, (vw), w, (wt), t, (tx), x, (xy), y, (yz), z, (zu), u, (uw), w, (wz), z\,.$$

$\mathcal{G}$ è infine un grafo hamiltoniano perché il ciclo che tocca successivamente i vertici x, y, z, w, u, t e v per ritornare a x è un ciclo hamiltoniano.

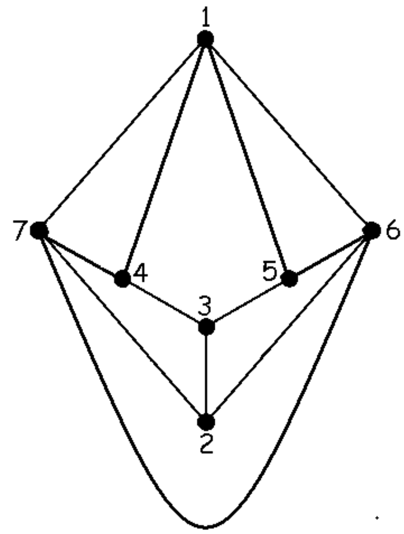
Esercizio 10

Siano $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ i grafi disegnati qui di seguito: il primo ha 7 vertici e 12 lati, il secondo ha 14 vertici e 21 lati. Si dica per ciascuno di essi se è un grafo piano.





Soluzione – Il grafo $\mathcal{G}_1$ è un grafo piano, perché si può disegnare nel piano senza sovrapposizione di lati, come si vede qui:



Il grafo $\mathcal{G}_2$ invece non è piano. Osserviamo innanzitutto che il suo calibro è 6 (per la simmetria del disegno basta considerare i cicli che passano per il vertice 1 e quelli che passano per il vertice 7). Se $\mathcal{G}_2$ fosse un grafo piano, indicando con λ il numero dei lati, con c il calibro e con n il numero dei vertici dovrebbe essere

$$\lambda \leq \tfrac{c}{c-2}(n-2)$$

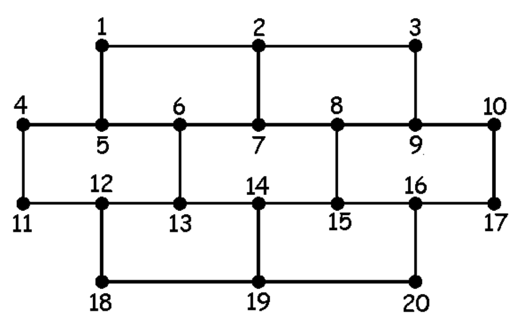
ossia

$$21 \leq \tfrac{6}{4}(14-2) = 18\,.$$

Poiché invece $21 > 18$, possiamo concludere che $\mathcal{G}_2$ non è un grafo piano.

Esercizio 11

Si dica, motivando la risposta, se il seguente grafo $\mathcal{G}$ è euleriano e/o hamiltoniano:



Soluzione – Certamente $\mathcal{G}$ non è euleriano, perché presenta vertici di grado dispari (ad esempio, il 2, il 5 e il 6).

Possiamo usare il teorema di Grinberg per dimostrare che $\mathcal{G}$ non è nemmeno hamiltoniano. Esso infatti è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati, ed ha 3 facce col bordo formato da 6 lati, 4 facce col bordo formato da 5 lati e una faccia (quella esterna) col bordo formato da 14 lati. Se esistesse un ciclo hamiltoniano, con le usuali notazioni dovrebbe essere

$$3(i_5 - e_5) + 4(i_6 - e_6) = 12\,.$$

In particolare, $i_6 - e_6$ dovrebbe essere divisibile per 3, quindi (ricordando che $i_6 + e_6 = 3$) $i_6 = 3$ e $e_6 = 0$ (o viceversa).

Nel caso $i_6 = 0$ e $e_6 = 3$ si arriverebbe ad avere

$$3(i_5 - e_5) = 24$$

cioè $i_5 - e_5 = 8$, impossibile perché $i_5 + e_5 = 4$ (ricordiamo che gli i_j e gli e_j sono tutti numeri interi non negativi). Resta la possibilità che sia $i_6 = 3$ e $e_6 = 0$, da cui

$$3(i_5 - e_5) = 0$$

ossia $i_5 = e_5$ e quindi $i_5 = e_5 = 2$. Due facce col bordo di 5 lati dovrebbero essere esterne al ciclo hamiltoniano, come la faccia che ha il bordo di 14 lati; e questo non è possibile perché al ciclo hamiltoniano devono appartenere anche i vertici $1, 2, 3, 18, 19$ e 20.

Esercizio 12

Sia $\mathcal{G}$ un grafo connesso disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati con 10 vertici (dei quali 5 hanno grado 2 e 4 hanno grado 3) e 5 facce (tutte, tranne una, col bordo formato da 5 lati).

Si dica, motivando la risposta,

- che grado ha il decimo vertice;
- se $\mathcal{G}$ è euleriano;
- se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.

Soluzione – Per la formula di Euler, il numero λ dei lati di $\mathcal{G}$ soddisfa la relazione

$$10 - \lambda + 5 = 2$$

e dunque $\lambda = 13$. Pertanto la somma dei gradi dei dieci vertici è 26; se 5 vertici hanno grado 2 e 4 vertici hanno grado 3, il decimo vertice deve avere grado 4.

Poiché in $\mathcal{G}$ ci sono vertici di grado dispari, $\mathcal{G}$ non è euleriano.

Poiché non conosciamo $\mathcal{G}$, non possiamo cercare direttamente un ciclo hamiltoniano in $\mathcal{G}$, e certamente il teorema di Ore non è applicabile; possiamo però cercare di escludere la possibilità che $\mathcal{G}$ sia hamiltoniano applicando il teorema di Grinberg: infatti, ogni lato appartiene al bordo di esattamente due facce (altrimenti in $\mathcal{G}$ ci sarebbero vertici di grado uno) e dunque la quinta faccia ha il bordo formato da sei lati. Supponiamo che in $\mathcal{G}$ ci sia un ciclo hamiltoniano $\mathcal{C}$, e indichiamo

- con e_5 il numero delle facce esterne a $\mathcal{C}$ col bordo formato da 5 lati
- con i_5 il numero delle facce interne a $\mathcal{C}$ col bordo formato da 5 lati
- con e_6 il numero delle facce esterne a $\mathcal{C}$ col bordo formato da 6 lati
- con i_6 il numero delle facce interne a $\mathcal{C}$ col bordo formato da 6 lati.

Per il teorema di Grinberg deve essere

$$3(e_5 - i_5) + 4(e_6 - i_6) = 0$$

ossia, poiché c'è una sola faccia col bordo formato da 6 lati, $3(e_5 - i_5) = \pm 4$

e ciò è assurdo perché 3 non divide 4. Dunque possiamo concludere che $\mathcal{G}$ non è un grafo hamiltoniano.

Esercizio 13

Per ciascuna delle seguenti affermazioni sui grafi si dica, motivando la risposta, se è vera oppure è falsa. Se l'affermazione è vera, si faccia esplicito riferimento ai teoremi studiati nel corso dai quali ciò consegue; se l'affermazione è falsa, si trovi un controesempio.

(a) se $\mathcal{G}$ è un grafo finito senza orientamento con esattamente 12 vertici dei quali 9 hanno grado 6 e i restanti hanno grado 5, allora $\mathcal{G}$ è hamiltoniano;

(b) se $\mathcal{G}$ è un grafo finito senza orientamento nel quale tutti i vertici hanno grado 2, allora $\mathcal{G}$ è euleriano.

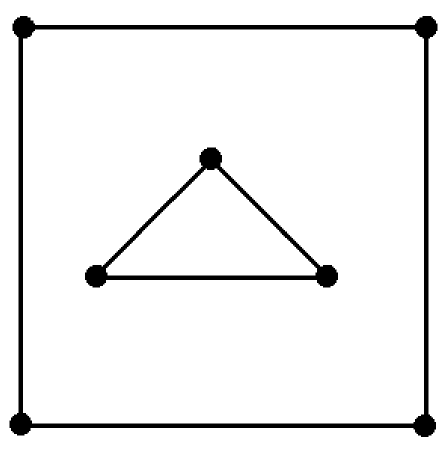
Soluzione – Esaminiamo separatamente le due affermazioni.

(a) se $\mathcal{G}$ è un grafo finito senza orientamento con esattamente 12 vertici dei quali 9 hanno grado 6 e i restanti hanno grado 5, allora $\mathcal{G}$ è hamiltoniano;

Tale implicazione è vera perché in essa la premessa è certamente falsa. Infatti, se $\mathcal{G}$ è un grafo finito senza orientamento con esattamente dodici vertici dei quali 9 hanno grado 6 e i restanti hanno grado 5, in esso ci sono esattamente 3 vertici di grado dispari; ma noi sappiamo (Teorema 1.3.2) che in qualsiasi grafo finito senza orientamento il numero dei vertici di grado dispari è pari.

(b) se $\mathcal{G}$ è un grafo finito senza orientamento nel quale tutti i vertici hanno grado 2, allora $\mathcal{G}$ è euleriano.

Tale implicazione è falsa, come mostra il seguente controesempio:



Esercizio 14

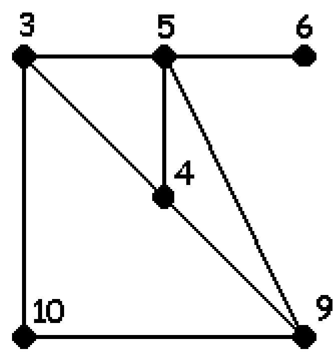
Sia $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ il grafo semplice e senza orientamento per il quale $\mathcal{V} := \{3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ e comunque presi $v, w \in \mathcal{V}$

esiste un lato incidente v e w se e soltanto se MCD$(v, w) = 1$.

Si dica, motivando la risposta,

– se $\mathcal{G}$ può essere disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati;
– se $\mathcal{G}$ è euleriano;
– se in $\mathcal{G}$ esiste un cammino euleriano;
– se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano;
– se in $\mathcal{G}$ esiste un cammino hamiltoniano.

Soluzione – È facile disegnare $\mathcal{G}$ nel piano senza sovrapposizione di lati:



e dal disegno si ricava subito che

– $\mathcal{G}$ non è euleriano, né esiste in $\mathcal{G}$ un cammino euleriano, perché i vertici $3, 4, 6$ e 9 hanno tutti grado dispari;

– $\mathcal{G}$ non è hamiltoniano, perché non è 2 – connesso (infatti sopprimendo il vertice 5 si ottengono due componenti connesse);

– in $\mathcal{G}$ esiste un cammino hamiltoniano che tocca nell'ordine i vertici $6, 5, 9, 4, 3$ e 10.

Esercizio 15

Sia $\mathcal{G}$ un grafo senza orientamento sul quale si hanno le seguenti informazioni:

– $\mathcal{G}$ è connesso;

– $\mathcal{G}$ è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati;

– tutte le facce di $\mathcal{G}$ hanno il bordo formato da 5, 8 o 22 lati, e precisamente: $\mathcal{G}$ ha 12 facce col bordo formato da 5 lati, una faccia col bordo formato da 8 lati e una faccia col bordo formato da 22 lati;

– esattamente 9 vertici di $\mathcal{G}$ hanno grado 2, e tutti gli altri hanno lo stesso grado.

Si dica, motivando ogni risposta:

– se $\mathcal{G}$ è un grafo semplice;
– quanti lati ha $\mathcal{G}$;
– quanti vertici ha $\mathcal{G}$;
– se $\mathcal{G}$ è euleriano;
– se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano.

Soluzione – Il grafo $\mathcal{G}$ è semplice, altrimenti ci sarebbero facce col bordo formato da un solo lato (quando ci sono cappi) o da due lati (quando ci sono lati paralleli). Invece ci sono 12 facce col bordo formato da 5 lati, una faccia col bordo formato da 8 lati e una faccia col bordo formato da 22 lati: la somma dei numeri di lati che compaiono sui bordi delle facce è dunque

$$12 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 22 = 60 + 8 + 22 = 90\,.$$

Poiché ciascun lato compare sul bordo di esattamente due facce (altrimenti i vertici di $\mathcal{G}$ avrebbero tutti grado uno oppure due, e non ci potrebbero essere facce col bordo formato da 5, 8 e 22 lati) il numero di lati di $\mathcal{G}$ è $\frac{90}{2} = 45$. Poiché $\mathcal{G}$ è connesso, il numero n dei suoi vertici deve soddisfare la relazione

$$n - 45 + 14 = 2$$

cosicché $n = 45 - 14 + 2 = 33$.

Poiché 24 ($= 33 - 9$) vertici hanno tutti lo stesso grado (e come sappiamo la somma dei gradi di tutti i vertici è il doppio del numero dei lati), ognuno di tali vertici ha grado

$$\tfrac{90 - 9 \cdot 2}{24} = \tfrac{72}{24} = 3\,.$$

In particolare, $\mathcal{G}$ non è un grafo euleriano e nemmeno vi è in $\mathcal{G}$ un cammino euleriano.

Per valutare infine se $\mathcal{G}$ può essere hamiltoniano, applichiamo il teorema di Grinberg.

Supponiamo che in $\mathcal{G}$ esista un ciclo hamiltoniano $\mathcal{C}$; sia x la differenza fra il numero e_5 delle facce col bordo di 5 lati esterne a $\mathcal{C}$ e il numero i_5 delle facce col bordo di 5 lati interne a $\mathcal{C}$; per il teorema di Grinberg deve essere

$$3x \pm 6 \pm 20 = 0$$

ossia

$$\pm\, 20 = 3x \pm 6$$

ma questo è assurdo perché il primo membro non è multiplo di 3 mentre il secondo lo è: dunque in $\mathcal{G}$ non può esistere un ciclo hamiltoniano, cioè $\mathcal{G}$ non è hamiltoniano.