

UNIVERSITA' DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA PRELIMINARE "A DISTANZA"
PER L'ESAME DI "MATEMATICA DISCRETA E LOGICA" - 20200525

Avvertenze

Tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

All'inizio di *ogni pagina* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine) e il numero di matricola del candidato.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 3$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a *scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni*: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato *non svolto*.

Questo compito è formato da 5 esercizi disposti su due pagine.

Esercizio 1 (6 punti)

Un numero naturale q si dice un quadrato perfetto se esiste un numero naturale n tale che

$$q = n^2.$$

Si dimostri che ogni quadrato perfetto ha un numero dispari di divisori.

Suggerimento – Se il numero naturale n si può scrivere come

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$$

con p_1, p_2, \dots, p_s numeri primi tutti diversi fra loro, quanti sono i divisori di n ?

Esercizio 2 (6 punti)

Sia

$$\mathbf{I} := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

e sia $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di \mathbf{I} , nel quale consideriamo la relazione di ordine di "inclusione" che indichiamo, come usuale, col simbolo " \subseteq ".

Non è richiesta la verifica che \subseteq è effettivamente una relazione di ordine in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$.

Si dica, motivando la risposta, se \subseteq è una relazione di ordine totale in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$. Posto inoltre

$$\mathbf{A} := \{\{a, d, h\}, \{c, d, g, h\}, \{b, c, d, g, h\}, \{d, h\}, \{d, g, h\}\}$$

si dica, motivando la risposta:

- se \mathbf{A} ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
- se \mathbf{A} ha estremo inferiore in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;
- se \mathbf{A} ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
- se \mathbf{A} ha estremo superiore in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Esercizio 3 (4 punti)

Questa notte si verificherà un rarissimo evento celeste: saranno contemporaneamente visibili la cometa di Barlow e la cometa di Gamow.

Poiché la cometa di Barlow risulta visibile soltanto ogni 372 193 giorni, e la cometa di Gamow risulta visibile soltanto ogni 538 492 giorni, fra quanti giorni saranno di nuovo visibili contemporaneamente?

Si motivi il procedimento seguito per rispondere, dettagliando esplicitamente tutti i calcoli.

Esercizio 4 (7 punti)

Siano a, b, c, d, e, f, g variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, c\}, \{a, \neg c, e, \neg f\}, \{\neg a, \neg f\}, \{\neg a, \neg c, f\}, \{b, d\}, \{b, \neg f\}, \\ \{b, \neg d, g\}, \{c, f\}, \{\neg c, \neg g\}, \{\neg d, \neg e\}, \{f, g\}, \{g, \neg f\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, c, d, e, f, g **rigorosamente in quest'ordine**, per stabilire se \mathcal{K} è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa \mathcal{K} .

Attenzione! Ogni altra modalità di svolgimento dell'esercizio sarà valutata 0 (*zero*) punti.

Esercizio 5 (7 punti)

Si stabilisca se dalle premesse

- (i) Ogni multiplo di 15 è un multiplo di 3;
- (ii) qualche numero pari non è un multiplo di 3;

si può dedurre logicamente che

- (iii) qualche multiplo di 15 non è un numero pari;

formalizzando le (i), (ii) e (iii) in un opportuno linguaggio della logica dei predicati nel quale va precisato con chiarezza il significato dei simboli usati.

Si esprima quanto richiesto dall'esercizio attraverso lo studio della soddisfacibilità di un'opportuna formula del linguaggio; la si traduca in un insieme di clausole, e si effettui se possibile una confutazione oppure si trovi un modello adeguato al linguaggio nel quale le (i) e (ii) sono vere ma la (iii) è falsa.