UNIVERSITA' DI FIRENZE – CDL IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
Prova scritta "a distanza" di "Matematica Discreta e Logica" del giorno 25 maggio 2020
Soluzione degli esercizi

Esercizio 1

Un numero naturale q si dice un quadrato perfetto se esiste un numero naturale n tale che

$$q = n^2 \, .$$

Si dimostri che ogni quadrato perfetto ha un numero dispari di divisori.

Soluzione – Per il teorema fondamentale dell'aritmetica, ogni numero naturale n si può scrivere (in uno e un solo modo) come

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$$

con p_1, p_2, $\dots p_s$ numeri primi tutti diversi fra loro. Se d è un divisore di n, ogni fattore primo di d è anche un fattore primo di n (per l'unicità della scomposizione in fattori primi), quindi i divisori di n si ottengono tutti scegliendo per ciascuno dei numeri primi p_i un esponente compreso fra 0 e k_i. Ci sono dunque $k_i + 1$ possibili scelte per l'esponente di ciascun p_i; applicando il principio di moltiplicazione si trova che il numero dei divisori di n è

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1) \, .$$

Se q è un quadrato perfetto, gli esponenti k_i dei suoi fattori primi p_i sono tutti pari; di conseguenza i numeri $k_i + 1$ sono tutti dispari, e il numero dei suoi divisori è dispari perché è un prodotto di numeri dispari.

Esercizio 2

Sia

$$\mathbf{I} := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

e sia $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{I}$, nel quale consideriamo la relazione di ordine di "inclusione" che indichiamo, come usuale, col simbolo " $\subseteq$ " .

Non è richiesta la verifica che $\subseteq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$.

Si dica, motivando la risposta, se $\subseteq$ è una relazione di ordine totale in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$. Posto inoltre

$$\mathbf{A} := \{\{a, d, h\},\ \{c, d, g, h\},\ \{b, c, d, g, h\},\ \{d, h\},\ \{d, g, h\}\}$$

si dica, motivando la risposta:

– se $\mathbf{A}$ ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se $\mathbf{A}$ ha estremo inferiore in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;
– se $\mathbf{A}$ ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se $\mathbf{A}$ ha estremo superiore in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Soluzione – La relazione di ordine $\subseteq$ di "inclusione" non è una relazione di ordine totale in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ perché esistono in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ elementi non confrontabili, ad esempio $\{a\}$ e $\{b\}$ (infatti non è $\{a\} \subseteq \{b\}$ e non è nemmeno $\{b\} \subseteq \{a\}$).

L'insieme **A** ha per minimo $\{d, h\}$, perché tale elemento è incluso in ogni elemento di **A**; poiché $\{d, h\}$ è il minimo di **A**, esso è anche l'estremo inferiore di **A** in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$.

L'insieme **A** non ha massimo, perché non c'è alcun elemento di **A** in cui tutti gli elementi di **A** siano inclusi; le limitazioni superiori di **A** in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ (cioè gli elementi di $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ in cui tutti gli elementi di **A** sono inclusi) sono i sottoinsiemi di **I** a cui appartengono a, b, c, d, g e h; l'estremo superiore di **A** in $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ è dunque

$$\{a, b, c, d, g, h\}.$$

<u>Esercizio 3</u>

Questa notte si verificherà un rarissimo evento celeste: saranno contemporaneamente visibili la cometa di Barlow e la cometa di Gamow.

Poiché la cometa di Barlow risulta visibile soltanto ogni $372\,193$ giorni, e la cometa di Gamow risulta visibile soltanto ogni $538\,492$ giorni, fra quanti giorni saranno di nuovo visibili contemporaneamente?

Si motivi il procedimento seguito per rispondere, dettagliando esplicitamente tutti i calcoli.

Soluzione $-$ Se fra m giorni vedremo contemporaneamente le due comete, m è un multiplo sia di $372\,193$ che di $538\,492$. La prima volta che ciò accadrà sarà quando m è il minimo comune multiplo μ fra $372\,193$ e $538\,492$.

Per trovare μ calcoliamo in primo luogo il massimo comun divisore fra $372\,193$ e $538\,492$ utilizzando l'algoritmo di Euclide:

$$538\,492 = 372\,193 \cdot 1 + 166\,299\,;$$

$$372\,193 = 166\,299 \cdot 2 + 39\,595\,;$$

$$166\,299 = 39\,595 \cdot 4 + 7\,919\,;$$

$$39\,595 = 7\,919 \cdot 5 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra $372\,193$ e $538\,492$ è dunque $7\,919$.

Ne segue che

$$\mu = \tfrac{372\,193 \cdot 538\,492}{7\,919} = 372\,193 \cdot \tfrac{538\,492}{7\,919} = 372\,193 \cdot 68 = 25\,309\,124\,.$$

Le due comete saranno di nuovo visibili contemporaneamente fra $25\,309\,124$ giorni (circa $69\,340$ anni).

Esercizio 4

Siano a, b, c, d, e, f, g variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, c\},\ \{a, \neg c, e, \neg f\},\ \{\neg a, \neg f\},\ \{\neg a, \neg c, f\},\ \{b, d\},\ \{b, \neg f\},\ \{b, \neg d, g\},\ \{c, f\},\ \{\neg c, \neg g\},\ \{\neg d, \neg e\},\ \{f, g\},\ \{g, \neg f\}\}\,.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, c, d, e, f, g ***rigorosamente in quest'ordine***, per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Soluzione — Applichiamo l'algoritmo di Davis e Putnam, scegliendo come primo *pivot* la variabile proposizionale a, come richiesto.

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{b, d\}, \{b, \neg f\}, \{b, \neg d, g\}, \{c, f\}, \{\neg c, \neg g\}, \{\neg d, \neg e\}, \{f, g\}, \{g, \neg f\}$;

$\mathrm{Ris}_a(\{a, c\}, \{\neg a, \neg f\}) = \{c, \neg f\}$;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, c\}, \{\neg a, \neg c, f\}) = \{c, \neg c, \neg f\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg c, e, \neg f\}, \{\neg a, \neg f\}) = \{\neg c, e, \neg f\}$;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg c, e, \neg f\}, \{\neg a, \neg c, f\}) = \{\neg c, e, f, \neg f\}$ (si sopprime perché tautologia) ;

$$\{\{b, d\}, \{b, \neg f\}, \{b, \neg d, g\}, \{c, f\}, \{\neg c, \neg g\}, \{\neg d, \neg e\}, \{f, g\}, \{g, \neg f\}, \{c, \neg f\}, \{\neg c, e, \neg f\}\}$$

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{c, f\}, \{\neg c, \neg g\}, \{\neg d, \neg e\}, \{f, g\}, \{g, \neg f\}, \{c, \neg f\}, \{\neg c, e, \neg f\}$;
non ci sono risolventi da calcolare! ;

$$\{\{c, f\},\ \{\neg c, \neg g\},\ \{\neg d, \neg e\},\ \{f, g\},\ \{g, \neg f\},\ \{c, \neg f\},\ \{\neg c, e, \neg f\}\}$$

Pivot c:

clausole non contenenti né c né $\neg c$: $\{\neg d, \neg e\},\ \{f, g\},\ \{g, \neg f\}$;

$\mathrm{Ris}_c(\{c, f\}, \{\neg c, \neg g\}) = \{f, \neg g\}$;
$\mathrm{Ris}_c(\{c, f\}, \{\neg c, e, \neg f\}) = \{e, f, \neg f\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_c(\{c, \neg f\}, \{\neg c, \neg g\}) = \{\neg f, \neg g\}$;
$\mathrm{Ris}_c(\{c, \neg f\}, \{\neg c, e, \neg f\}) = \{e, \neg f\}$;

$$\{\{\neg d, \neg e\},\ \{f, g\},\ \{g, \neg f\},\ \{f, \neg g\},\ \{\neg f, \neg g\},\ \{e, \neg f\}\}$$

Pivot d:

clausole non contenenti né d né $\neg d$: $\{f, g\},\ \{g, \neg f\},\ \{f, \neg g\},\ \{\neg f, \neg g\},\ \{e, \neg f\}$;
non ci sono risolventi da calcolare! ;

$$\{\{f, g\},\ \{g, \neg f\},\ \{f, \neg g\},\ \{\neg f, \neg g\},\ \{e, \neg f\}\}$$

Pivot e:

clausole non contenenti né e né $\neg e$: $\{f, g\},\ \{g, \neg f\},\ \{f, \neg g\},\ \{\neg f, \neg g\}$;
non ci sono risolventi da calcolare! ;

$$\{\{f, g\},\quad \{g, \neg f\},\quad \{f, \neg g\},\quad \{\neg f, \neg g\}\}$$

Pivot f:

clausole non contenenti né f né $\neg f$: non ce ne sono! ;

$\mathrm{Ris}_f(\{f, g\}, \{g, \neg f\}) = \{g\}$;
$\mathrm{Ris}_f(\{f, g\}, \{\neg f, \neg g\}) = \{g, \neg g\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_f(\{f, \neg g\}, \{g, \neg f\}) = \{g, \neg g\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_f(\{f, \neg g\}, \{\neg f, \neg g\}) = \{\neg g\}$;

$$\{\{g\},\quad \{\neg g\}\}$$

Pivot g:

clausole non contenenti né g né $\neg g$: non ce ne sono! ;
$\mathrm{Ris}_g(\{g\}, \{\neg g\}) = [\,]$;

$$\{[\,]\}$$

Avendo ottenuto la clausola vuota, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ non è soddisfacibile.

Esercizio 5

Si stabilisca se dalle premesse

(i) Ogni multiplo di 15 è un multiplo di 3;
(ii) qualche numero pari non è un multiplo di 3;

si può dedurre logicamente che

(iii) qualche multiplo di 15 non è un numero pari.

Soluzione – Introduciamo tre simboli di predicato unario (Q, T, P), che interpretiamo come segue per tradurre le premesse date:

$\mathrm{Q}(x) :=$ x è un multiplo di 15;
$\mathrm{T}(x) :=$ x è un multiplo di 3;
$\mathrm{P}(x) :=$ x è un numero pari.

In questo linguaggio della logica dei predicati, le premesse diventano:

(i) $(\forall x)(\mathrm{Q}(x) \to \mathrm{T}(x))$;

(ii) $(\exists x)(\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x))$;

e la supposta conclusione diventa

(iv) $(\exists x)(\mathrm{Q}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(x)$.

Dobbiamo pertanto vedere se

$$(\forall x)(\mathrm{Q}(x) \to \mathrm{T}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x)) \models (\exists x)(\mathrm{Q}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(x)$$

ossia se la formula ben formata φ definita da

$$(\forall x)(\mathrm{Q}(x) \to \mathrm{T}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x)) \wedge \neg((\exists x)(\mathrm{Q}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(x))$$

è o non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale prenessa:

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv (\forall x)(\mathrm{Q}(x) \to \mathrm{T}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x)) \wedge \neg((\exists x)(\mathrm{Q}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(x)) \equiv \\ &\equiv (\forall x)(\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{T}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x)) \wedge (\forall x)\neg(\mathrm{Q}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(x)) \equiv \\ &\equiv (\forall x)(\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{T}(x)) \wedge (\exists x)(\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{T}(x)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(x)) \equiv \\ &\equiv (\forall x)(\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{T}(x)) \wedge (\exists y)(\mathrm{P}(y) \wedge \neg\mathrm{T}(y)) \wedge (\forall x)(\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(x)) \equiv \\ &\equiv (\exists y)(\forall x)\big((\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{T}(x)) \wedge (\mathrm{P}(y) \wedge \neg\mathrm{T}(y)) \wedge (\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(x))\big)\,.\end{aligned}$$

Per ridurla in forma di Skolem, basta introdurre un simbolo di costante c e sostituirlo alla variabile individuale y, ottenendo:

$$(\forall x)\big((\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{T}(x)) \wedge (\mathrm{P}(c) \wedge \neg\mathrm{T}(c)) \wedge (\neg\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(x))\big)\,.$$

A questa formula resta associato il seguente schema di clausole:

$$\{\{\neg\mathrm{Q}(x), \mathrm{T}(x)\}, \{\mathrm{P}(c)\}, \{\neg\mathrm{T}(c)\}, \{\neg\mathrm{Q}(x), \mathrm{P}(x)\}\}\,.$$

Poiché l'universo di Herbrandt consiste della sola costante c, assegniamo direttamente alla x il valore c e otteniamo

$$\{\{\neg\mathrm{Q}(c), \mathrm{T}(c)\}, \{\mathrm{P}(c)\}, \{\neg\mathrm{T}(c)\}, \{\neg\mathrm{Q}(c), \mathrm{P}(c)\}\}\,.$$

Possiamo applicare l'algoritmo di Davis-Putnam!

Pivot P(c):

clausole non contenenti né P(c) né ¬P(c): $\{\neg\mathrm{Q}(c), \mathrm{T}(c)\}, \{\neg\mathrm{T}(c)\}$;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\neg\mathrm{Q}(c), \mathrm{T}(c)\}, \{\neg\mathrm{T}(c)\}\}\,.$$

Pivot T(c):

clausole non contenenti né T(c) né ¬T(c): non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_{\mathrm{T}(c)}(\{\neg\mathrm{Q}(c), \mathrm{T}(c)\}, \{\neg\mathrm{T}(c)\}) = \{\neg\mathrm{Q}(c)\}$;

$$\{\{\neg\mathrm{Q}(c)\}\}\,.$$

Pivot Q(c):

clausole non contenenti né Q(c) né ¬Q(c): non ce ne sono!

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\}\,.$$

Poiché abbiamo ottenuto l'insieme vuoto, l'insieme di clausole considerato è soddisfacibile ed abbiamo dunque dimostrato che la (iii) ***non*** è conseguenza logica delle (i) e (ii).

Un modello adeguato al linguaggio nel quale le (i) e (ii) sono vere ma la (iii) è falsa si ricava applicando al modello di Herbrand (che consiste nel solo elemento c) una valutazione di verità v ottenuta procedendo "a ritroso" sugli insiemi di clausole considerati: deve essere

$$v(\mathrm{Q}(c)) := 0, \qquad v(\mathrm{T}(c)) := 0, \qquad v(\mathrm{P}(c)) := 1$$

cioè i simboli di predicato Q, T e P vanno rispettivamente interpretati nei predicati Q_0, T_0 e P_0 che su c assumono i seguenti valori:

$\mathrm{Q}_0(c)$ è falso, $\qquad$ $\mathrm{T}_0(c)$ è falso, $\qquad$ $\mathrm{P}_0(c)$ è vero.