CdL in SCIENZE BIOLOGICHE

Programma dettagliato del corso di
MATEMATICA a.a. 2018/2019 - Corso B (lettere M-Z)

Docenti: C. Bianchini (6CFU/12CFU), F. Mugelli (6CFU/12CFU)

Carico didattico: 12 CFU pari a 96 ore di lezione.

Programma svolto: il corso si divide in due parti: una parte di Probabilità e Statistica, una parte di Calcolo. Si elencano gli argomenti trattati.

Statistica: **Indici di posizione:** vari di tipi di medie (media campionaria, media campionaria pesata, media geometrica, media armonica, media integrale); Il logaritmo della media geometrica è la media artimetica dei logartimi (con dim); mediana, moda e classi modali. Indici di posizione con dati raggruppati con le frequenze. **Indici di dispersione:** intervallo di variazione; scarti semplici, varianza, deviazione standard (del campione e della popolazione); quantili (quartili, decili, percentili); distanza interquartile.

Scelta di un **campione rappresentativo**. **Rappresentare insiemi di dati:** grafici per punti, per spezzate; istogrammi, grafici delle frequenze (assolute, relative, percentuali), grafici a torta. **Raggruppamento di dati:** scelta delle classi. Analisi qualitativa degli istogrammi delle frequenze.

Distribuzione a due caratteri: diagramma di dispersione; coefficiente di correlazione lineare: formula per calcolarlo e sua interpretazione; retta di regressione lineare (senza dim); valore predittivo.

Test di ipotesi sulla media: impostazione generale. Scelta dell'ipotesi nulla e dell'ipotesi alternativa; scelta della statistica del test; determinazione della zona di rigetto in base all'affidabilità α; relazione tra affidabilità con cui si rigetta H_0 e fiducia con cui si afferma H_1. Il Test Z. Test di Student e distribuzione di Student. Test di Student combinato per il confronto di due campioni

Teoria delle probabilità: **spazio degli eventi**, proprietà, eventi incompatibili, eventi indipendenti, evento complementare. Calcolo delle probabilità.

Variabili aleatorie discrete: distribuzione uniforme, di Bernoulli, binomiale. Scrittura delle v.a., calcolo del valore atteso e della varianza. **Probabilità condizionata. Test diagnostici:** tasso di incidenza, specificità, sensibilità, valore predittivo di esito positivo e negativo; esempi. **Calcolo combinatorio.** Applicazioni alla genetica: legge di Hardy-Weinberg. Tabella dei genotipi (dal genotipo dei genitori al genotipo del figlio) e delle relative probabilità.

Distribuzioni di probabilità continue con densità: come si ottiene la curva di distribuzione delle frequenze. Definizione di densità di prob. e sue proprietà; calcolo della moda, mediana, media, varianza per v.a. continue con densità. Come si riconosce una densità di probabilità; la funzione di distribuzione; media e varianza di v.a. continue con densità.

La distribuzione Gaussiana. Grafico della funzione Gaussiana, interpretazione del grafico (significato dell'area del sottografico, relazione tra media e dev.standard e il grafico). Calcolo dell'area della Gaussiana standard con l'uso della tabella (reperibile sulla piattaforma moodle tra il materiale). Relazione tra la Gaussiana standard e la Gaussiana di parametri m,s. Data X v.a. Gaussiana di parametri m,s, calcolare la probabilità che X sia compresa tra R e P.

Calcolo: **Numeri reali:** assiomi algebrici, assiomi d'ordine e assioma di completezza. $\sqrt{2}$ non è razionale (dim.), i razionali non soddisfano l'assioma di compattezza. **Intervalli** aperti e chiusi, limitati e illimitati. Proprietà degli intervalli aperti: per ogni punto x appartenente all'intervallo esiste un $r > 0$ tale che $(x - r, x + r)$ è contenuto nell'intervallo. Distanza tra numeri reali: valore assoluto e proprietà, disuguaglianza triangolare (dim.).

Funzioni: definizione, dominio, codominio, immagine, rappresentazione cartesiana, esempi. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche, funzione inversa. Il grafico di f^{-1} è il simmetrico rispetto alla bisettrice del grafico di f. Funzione composta, funzioni strettamente crescenti/decrescenti, e loro iniettività, esempi. Funzioni pari, dispari e proprietà di simmetria dei loro grafici, esempi. Funzioni lineari, valore assoluto e grafico. **Funzione potenza** con esponenti interi, e loro inverse, potenze con esponenti razionali e reali, proprietà delle potenze, grafico di x^b (casi $b < -1$, $-1 < b < 0$, $0 < b < 1$ e $b > 1$). **Funzione esponenziale**, definizione, proprietà di stretta monotonia e invertibilità (base diversa da 1), grafico di a^x (caso $0 < a < 1$ e $a > 0$). **Funzione logaritmo** $log_a(x)$ (caso $0 < a < 1$ e $a > 0$), definizione, grafico, proprietà dei logaritmi (dim.). Equazioni esponenziali e logaritmiche, disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Definizione di **radianti**. Definizione di pi greco (cenno con assioma di completezza). **Funzioni periodiche**. **Funzioni goniometriche:** Funzioni seno, coseno e tangente: definizione, prima e seconda relazione fondamentale della trigonometria, archi associati, proprietà di crescita/decrescita stretta nei rispettivi intervalli, parità/disparità, periodicità, grafici. Funzioni trigonometriche inverse: definizione e grafico. Introduzione equazioni trigonometriche. $\sin(x) < x < \tan(x)$ se $0 < x < \pi/2$. Formule di addizione, duplicazione, bisezione, parametriche, prostaferesi. Equazioni trigonometriche: metodo grafico, equazioni omogenee, formule parametriche. Disequazioni trigonometriche.

Legge di annullamento del prodotto dagli assiomi dei numeri reali, domini di funzioni.

Successioni. Limiti di successioni: successioni convergenti, divergenti, limitate, esempi. Unicità del limite (dim.). Una successione convergente è limitata (dim.). Algebra dei limiti finiti e infiniti: il limite di due successioni convergenti è il prodotto dei limiti (dim.). Forme indeterminate e primi esempi. Teorema di permanenza del segno (dim.). La successione di Fibonacci (cenno). Applicazioni al teorema di permanenza del segno. Teorema del confronto di limiti finiti (dim.) e infinito. Teorema dei carabinieri (dim.). Il prodotto tra una successione limitata e una infinitesima è infinitesima (dim.). Limiti notevoli: potenza, esponenziale, radice n-esima di una costante e di una potenza, ordini di infinito (logaritmo, potenza, esponenziale, fattoriale, n^n), numero di Nepero.

Limiti di funzioni: motivazioni, definizione di limite finito e infinito al finito e all'infinito (mediante disuguaglianze). Asintoto orizzontale e asintoto obliquo.

(Teorema ponte) Teorema di collegamento tra limiti di successione e limiti di funzione. Calcolo di limiti (di funzione e di successione) utilizzando i limiti notevoli. Esistenza del limite mediante limite destro e limite sinistro. Asintoto verticale. Definizione di limite con gli intorni della retta reale estesa. Estensione dei risultati dai limiti di successione ai limiti di funzione (mediante teorema ponte). Limite del prodotto di una funzione infinitesima ed una limitata è 0 (dim.). Limiti di funzioni composte: teorema del cambio di variabile.

Funzioni continue: definizioni e proprietà. Continuità delle funzioni elementari. Algebra delle funzioni continue. Teorema di continuità delle funzioni composte. Esempi.

Discontinuità: discontinuità eliminabili, di prima e seconda specie. Esempi. Non esiste limite ad infinito di $\sin x$ (esistono due successioni che danno limiti diversi). Teorema di permanenza del segno per funzioni continue. Teorema di esistenza degli zeri. Primo Teorema dei valori intermedi (dim.). Teorema di Weierstrass: analisi delle ipotesi. Secondo Teorema dei valori intermedi: caratterizzazione dell'immagine di un intervallo chiuso e limitato mediante una funzione continua (dim.). Teorema di continuità dell'inversa di una funzione strettamente monotona e continua. Cambio di variabili e limiti notevoli, forme indeterminate 1^∞; $f^g = e^{(g \ln f)}$.

Calcolo differenziale: motivazioni, definizione di derivata prima in un punto, significato geometrico della derivata, derivabilità delle funzioni elementari. Esempi di funzioni non derivabili, punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale: $|x|$, radice cubica di x^2, radice cubica di x. Continuità delle funzioni derivabili in un punto (con dim.), operazioni algebriche sulle derivate, teorema di derivazione della funzione composta, teorema di derivazione della funzione inversa: enunciati, interpretazione geometrica.

Definizione di massimo/minimo relativo. Teorema di Fermat (con dim.), analisi ipotesi. Teorema di Rolle (con dim.). Teorema di Lagrange (con dim.). Corollari del Teorema di Lagrange: Criterio di Monotonia, Caratterizzazione delle funzioni costanti su un intervallo (con dim.). Condizioni sufficienti del primo ordine per max/min relativi.

Come si ottiene il grafico qualitativo di $A\ f(Bx + C) + D$, per A, B, C, D parametri reali, a partire dal grafico di f(x) con traslazioni, simmetrie, dilatazioni/contrazioni.

Derivata Seconda, definizione di concavità e convessità, Criterio di concavità e convessità, Condizioni sufficienti del secondo ordine per max/min relativi. Applicazione del calcolo differenziale all'esistenza e alla molteplicità delle soluzioni di equazioni. Teorema: se esiste il limite destro (o sinistro) della derivata allora coincide con la derivata destra (o sinistra). Esempio di funzione derivabile con derivata non continua. Teorema di de l'Hôpital: enunciato della forma 0/0, estensioni e applicazioni al calcolo dei limiti. Condizioni sufficienti di ordine superiore al secondo per la ricerca di max/min locali e flessi. Esempio di funzione per cui $f'(0) \neq 0$, $f''(0) = 0$ e 0 non è un punto di flesso.

Calcolo integrale: motivazioni dal calcolo di aree di figure piane (integrale definito) e dalla ricerca di primitive di una funzione data (integrale indefinito). Il metodo di esaustione di Archimede per il settore di parabola. Teorema di integrabilità di funzioni continue. Proprietà dell'integrale definito: additività, linearità, monotonia. Teorema della Media Integrale (dim.). Definizione di primitiva di una funzione e Caratterizzazione delle primitive di una funzione continua su un intervallo (dim.). Definizione della Funzione Integrale. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (dim.), Formula fondamentale del Calcolo Integrale (dim.). Applicazioni del teorema fondamentale del calcolo e della caratterizzazione delle primitive su un intervallo: definizione di integrale indefinito, integrale indefinito di funzioni elementari, linearità dell'integrale indefinito.

Metodi di integrazione: decomposizione in somma. Divisione tra polinomi e Teorema di divisione. Formula di integrazione per parti (dim.). Integrazione di funzioni razionali con denominatore di grado 2. Integrazione per sostituzione: forma diretta e indiretta. Sostituzioni razionalizzanti.

Integrali impropri: definizione e calcolo di aree su tutto l'asse reale; valore atteso e varianza di densità di probabilità.

Equazioni differenziali: cosa significa che $f(x)$ risolve un'equazione differenziale. Eq.ni differenziali del tipo $y' = f(x)$ da risolvere per integrazione diretta. Eq.ni diff. a variabili separabili $y' = f(x)g(y)$. Modelli per lo studio dell'andamento di una popolazione con solo natalità; natalità e mortalità. Modello per lo sviluppo di un'epidemia (eq.ne della logistica). Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine: Formula risolutiva per l'integrale generale (dim.), unicità e formula della soluzione del Problema di Cauchy associato (dim.). Modello per l'andamento di una popolazione con natalità, mortalità e immigrazione/emigrazione: analisi del futuro della popolazione in relazione ai parametri di natalità, mortalità, immigrazione/emigrazione. Equazioni di Bernoulli.

Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Unicità del problema di Cauchy. Equazione caratteristica associata all'equazione omogenea. Somma e prodotto per costanti di soluzioni dell'equazione omogenea sono ancora soluzioni (dim.). Caratterizzazione delle soluzioni dell'equazione omogenea (con verifica). La differenza tra due soluzioni dell'equazione non omogenea è soluzione dell'equazione omogenea (dim.). Caratterizzazione delle soluzioni dell'equazione non omogenea (somma di una soluzione particolare e soluzioni dell'equazione omogenea). Soluzioni particolari se i termini noti sono prodotti tra polinomi e esponenziali, seni e coseni.

Dal modello all'equazione: come si ottiene l'eq. diff. che modellizza un fenomeno. Esempi: dinamica di popolazione: modello di Malthus con natalità, mortalità, immigrazione, modello di Verhust con effetti di sovrappopolazione; scioglimento di un cubetto di ghiaccio; decadimento radioattivo; andamento di una grandezza che triplica ogni due ore; equazioni del moto dei corpi. s