

Modello per il traffico veicolare

Consideravano un modello molto semplice che descrive il moto di veicoli lungo una direttrice. Il modello è basato su una serie di ipotesi semplificative

- Sistema unidimensionale (strada a singola corsia)
- Assenza di sorpassi o dispersione di auto...
- La densità di auto viene descritta da una funzione continua $n(x, t)$
- La velocità dei veicoli è una funzione (densità) della sola densità di veicoli

$$v(u) = v_m \left(1 - \frac{u}{u_m} \right) \quad (1)$$

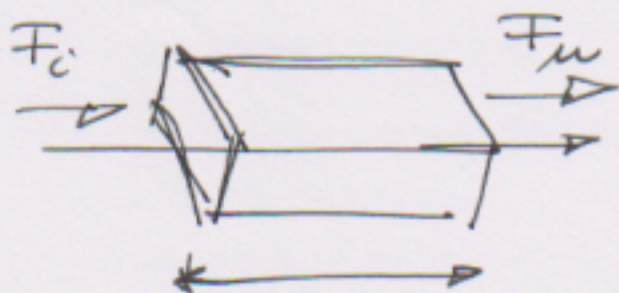
\downarrow
vel. max

\rightarrow densità max di veicoli

Eq. di evoluzione della densità veicolare

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (\overbrace{v(u)n}^{\text{Flusso di veicoli}}) = 0 \quad (2)$$

Conservazione della massa



la variazione di numero di veicoli in una unità di lung.

è uguale alla diff fra il numero di vico entranti e uscenti nel vol. considerato, nell'unità di tempo

$$1) \Rightarrow 2) = \partial_z w + v_M \left| 1 - \frac{2z}{\mu_M} \right| \partial_x w = 0$$

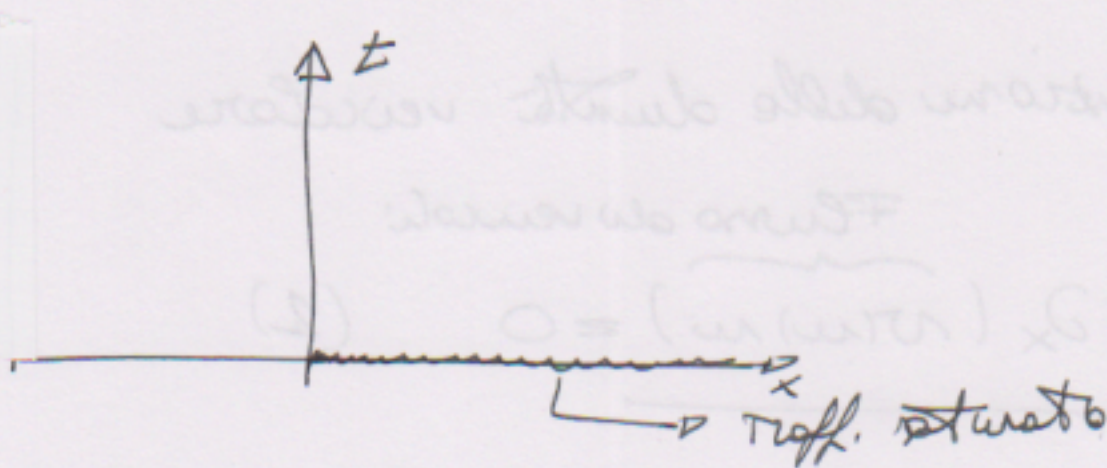
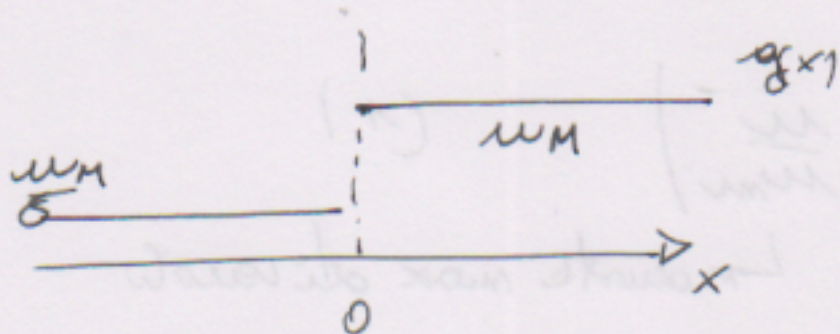
Formazione di un impiego

Risoliamo l'eq. $\partial_z w + v_M \left| 1 - \frac{2z}{\mu_M} \right| \partial_x w = 0$

con C.I.

$$w(x, 0) = g(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \mu_M & x < 0 \\ \mu_M & x > 0 \end{cases}$$



$$F = \partial_z w + v_M \left| 1 - \frac{2z}{\mu_M} \right| \partial_x w = 0$$



$$\dot{z} = \rho \cdot \nabla_{\rho} F = 0 \quad \text{a costante lungo le coratt.}$$

$$\dot{Y} = \nabla_{\rho} F$$

$$\dot{x} = v_M \left| 1 - \frac{2z}{w_M} \right|$$

$$\dot{z} = 1$$

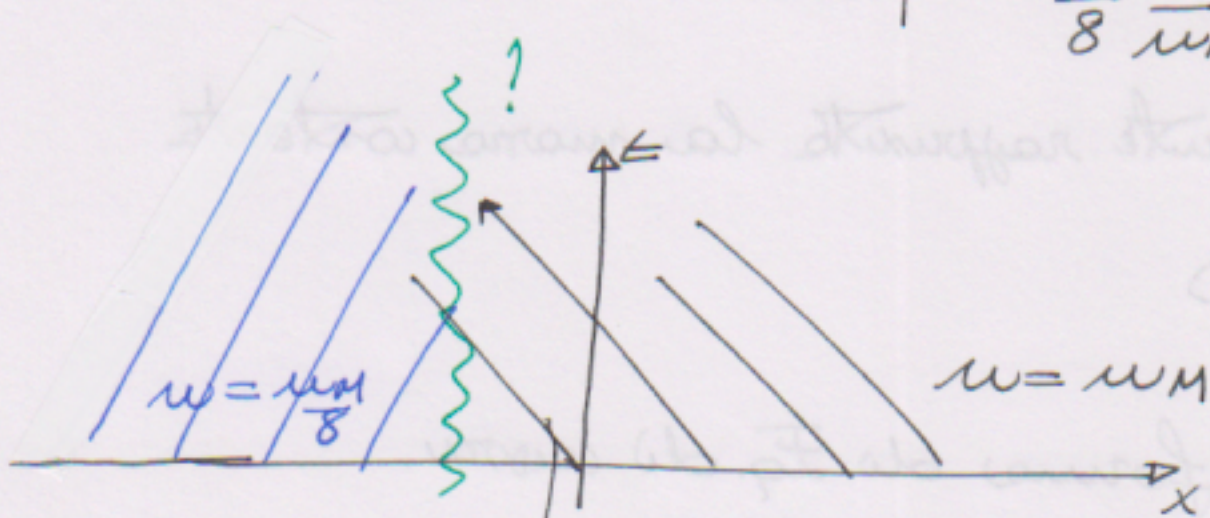
$$\int x(s) = v_M \left| 1 - \frac{2z(s)}{w_M} \right| s + x_0$$

$z = s$

$$s = 0 \Rightarrow z(0) = w(x_0) = g(x_0)$$

$$x_0 > 0 \Rightarrow x(z) = v_M \left| 1 - \frac{2w_M}{w_M} \right| t = -v_M t$$

$$x < 0 \Rightarrow x(t) = v_M \left| 1 - \frac{2 \frac{w_M}{8}}{w_M} \right| t = \frac{3}{4} v_M t$$



NOTA: le coratt. non corrispondono

alle travett. dei veicoli

Equazioni di conservazione e relazioni di

Rankine-Hugoniot

Equazioni di conservazione (\mathbb{R}^2)

$$(1) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & t=0 \end{cases}$$

Sia u a reg. compatto e $F(u) = 0$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t u dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x F dx$$

$$= -F \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \Rightarrow \text{la quantità } \int_{-\infty}^{\infty} u dx \text{ è}$$

conservata, tipicamente rappresenta la massa contenuta
in un intervallo 1D

Eq. Staffio ha la forma di Eq. di conservazione.

In presenza di shock (linee di incontro delle caratt.)
il metodo alle caratt. non è ^{in grado} di fornire la soluz. del prob.

(ambiguità ad esempio sulle rette delle caratt. da
prolungare)

Un'indagine più approfondita mostra che in presenza di shock si perde regolarità nella soluzione (tipicamente appaiono discontinuità). Il metodo alle caratteristiche è stato rivisitato ipotizzando la derivabilità della soluzione.

L'equazione stessa $F(\nabla u, u, x) = 0$

richiede u derivabile; come estendere la soluzione

a f . non derivabili? **SOLUZIONE DEBOLE**

dell'equazione.

Spazio delle funzioni TEST $v: \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad v \in C_0^\infty$

supporto compatto

Moltip. Eq. conv. per v e integriamo

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\partial_t u + \partial_x F(u)) v \, dx \, dt = 0$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \partial_t u v \, dx \, dt = \int_{-\infty}^\infty \underbrace{\left(\int_0^t \partial_t u v \, dt \right)}_{\text{int per parte}} \, dx$$

$$= \int_0^t (u \partial_t v) \, dt + uv \Big|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \partial_t u v \, dt \, dx = - \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty u \partial_t v \, dt \, dx$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v \partial_x F(u) dx dt = - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u) \partial_x v dx dt$$

$$- \int_{-\infty}^\infty F(u) \partial_x v dx + \underbrace{F(u) v}_{0} \Big|_{-\infty}^\infty$$

abbiamo ottenuto

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (v(x,t) \partial_x v + F(u) \partial_x v) dx dt = 0 \quad (2)$$

diremo che $u(x,t)$ è soluz. debole di Eq. (1) se

l'eq. int. (2) è soddisfatta $\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$

Nota: in (2) non è richiesta nessuna derivata di u

$\Rightarrow u$ debole può essere anche non derivabile

In contrapposizione, $u \in C^1$ soluz. di (1) è detta soluz. FORTE dell'eq. di conservazione.

I conti precisi mostrano che FORTE \Rightarrow DEBOLE non vale però in generale il viceversa.

L'insieme delle soluz. debole è più ampio dell'insieme delle soluz. forti.

Quali è il legame fra forte e debole! Si può verificare che

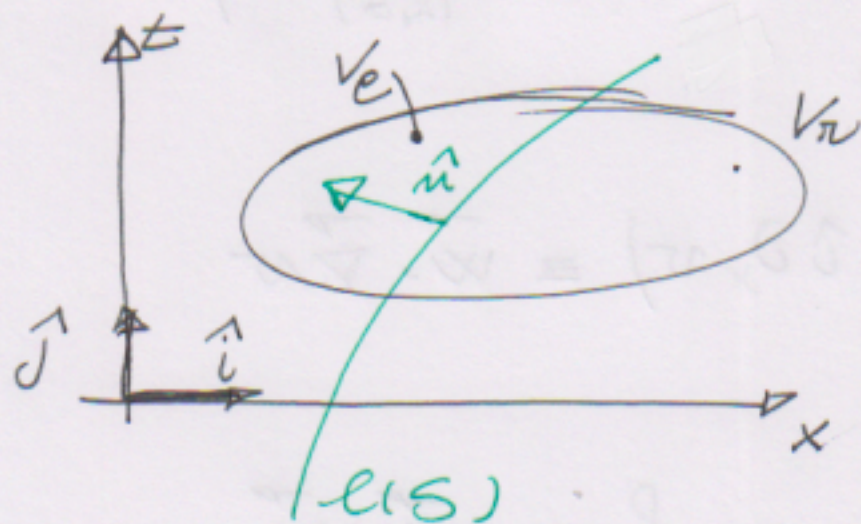
se w è sol. debole e $w \in C^1 \Rightarrow w$ è anche sol. forte

forte: infatti ripercorrendo i passaggi prec. all'inviluppo otteniamo che deve valere

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\partial_z w + \partial_x F(w)) v \stackrel{\text{dritt}}{=} 0 \quad \forall v \in C_0^\infty$$

$$\Rightarrow \partial_z w + \partial_x F(w) = 0$$

Proviamo ad affrontare il problema dello shock



$$V = V_e \cup V_r$$

↓ ↙

ajuti

Immaginiamo che esista w regolare a sx e a dx delle curve e che risolva l'eq. cons. nelle zone di regolarità

Le eventuali irregolarità di w sono localizzate lungo

la curva $V_e \cap V_r$

w : sol. debole regolare in $V_e \cup V_r$

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w (\partial_z v + F(w) \partial_x v) dz$$

poiché w è reg. in V_e e $V_r \Rightarrow \partial_z w + \partial_x F(w) = 0$ in $V_e \cup V_r$

in questi non solo lungo le curve e

prendo v a nyh $C^1 V = V_e \cup V_r$

$$0 = \int \int_{\underbrace{V}_{= V_r \cup V_e}} (u \partial_t v + \partial_x v \cdot F(u)) dx dt =$$

$$\int_{V_r} (u \partial_t v + \partial_x v \cdot F) dx dt + \int_{V_e} (u \partial_t v + \partial_x v \cdot F) dx dt$$

$$\int_{V_r} (u \partial_t v + \partial_x v \cdot F) = \int_{V_r} (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}_{(t,x)} v) dx dt$$

$$(u \hat{j} + F \hat{i}) \cdot (\hat{j} \partial_t v + \hat{i} \partial_x v) \equiv \vec{w} \cdot \vec{\nabla} v$$

$$= - \int_{V_r} \vec{\nabla}_{(t,x)} \vec{w} \cdot v dx dt + \int_{\partial V_r} v \vec{w} \cdot \vec{\nu}$$

↳ normale
wante e V_r

$$= - \int_{V_r} (\partial_t u + \partial_x F) v dx dt + \int_{\partial V_r} v (u n_t + F n_x) ds$$

||
0

u sol. forte in V_r

$\hat{n} = n_t \hat{j} + n_x \hat{i}$

Analogamente $\int_{V_e} (u \partial_t v + \partial_x v \cdot F) dx dt =$

$$= - \int_{\partial V_e} v (u n_t + F n_x) ds$$

abbiamo visto che la normale unita a $V_r = -$ la normale unita a V_e

u_e, F_e sono i limiti su (quello calcolato a partire

dai valori calcolati di u_e, F_e in V_e) di u_e, F_e

$$\left. \begin{array}{l} V_e \\ u_e, F_e \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_r \\ u_r, F_r \end{array}$$

$$\int_{\partial} v (u_r n_z + F_r n_x) dS - \int_{\partial} v (u_e n_z + F_e n_x) dS = 0$$

$$\int_{\partial} v [n_z (u_r - u_e) + n_x (F_r - F_e)] dS = 0 \quad \text{II}$$

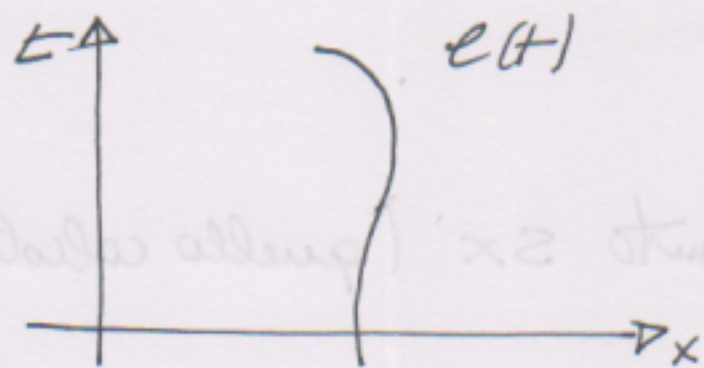
Quanto vale \hat{n} ? La tg alla curva $\partial(S)$ è

$$\frac{d\ell}{ds} = (\dot{\ell}_z, \dot{\ell}_x) \Rightarrow \hat{n} = \frac{(\dot{\ell}_x, -\dot{\ell}_z)}{\sqrt{\dot{\ell}_z^2 + \dot{\ell}_x^2}}$$

$$n_z = \frac{1}{\sqrt{\dot{\ell}_z^2 + \dot{\ell}_x^2}} \dot{\ell}_x \quad n_x = -\frac{\dot{\ell}_z}{\sqrt{\dot{\ell}_z^2 + \dot{\ell}_x^2}}$$

Per la quantità di v II $\Rightarrow \dot{\ell}_x (u_r - u_e) = + \dot{\ell}_z (F_r - F_e)$

parametr. la curva l con $S = t$



$$l(t) = (t, \eta(t)) = \underset{l_t}{(S, \underset{l_x}{\eta(S)})}$$

$$\frac{dl}{dS} = (1, \dot{\eta}) \quad l_t = 1 \quad l_x = \dot{\eta}$$

Relazione Rankine-Hugoniot

$$\dot{\eta} (w_r - w_l) = (F_r - F_l)$$

La soluz. deboli dell'eq. di conservazione può essere

discontinua lungo una curva, ma \exists una relazione

fra il retto della soluz. att. la curva e l'inclinazione
della curva stessa

Applichiamo la r. R-H al prob. del congestionamento
veicolare

Una soluz. della due nodolineare R-H ovvero lo
shock può avvenire solo a convoluzione

$$\dot{\eta} = \frac{F_r - F_e}{u_r - u_e} = \frac{-\frac{7}{8} \frac{1}{8} u_M u_M}{u_M - \frac{u_M}{8}} = -\frac{1}{8} u_M = \nabla \eta = -\frac{1}{8} u_M t$$

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0$$

$$F = u u = u_M \left| 1 - \frac{u}{u_M} \right| u$$

$$F_r = u_M \left| 1 - \frac{u_M}{u_M} \right| u_M = 0$$

$$F_e = u_M \left| 1 - \frac{1}{8} \frac{u_M}{u_M} \right| \frac{1}{8} u_M = \frac{7}{8} \frac{1}{8} u_M u_M$$

