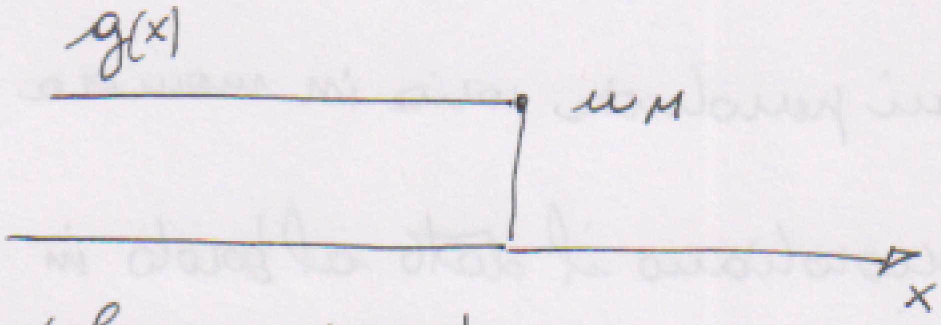
Onde di rarefazione: semaforo verde

Risolviamo il modello di traffico con la seguente c. I

$$g = \begin{cases} u_M & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

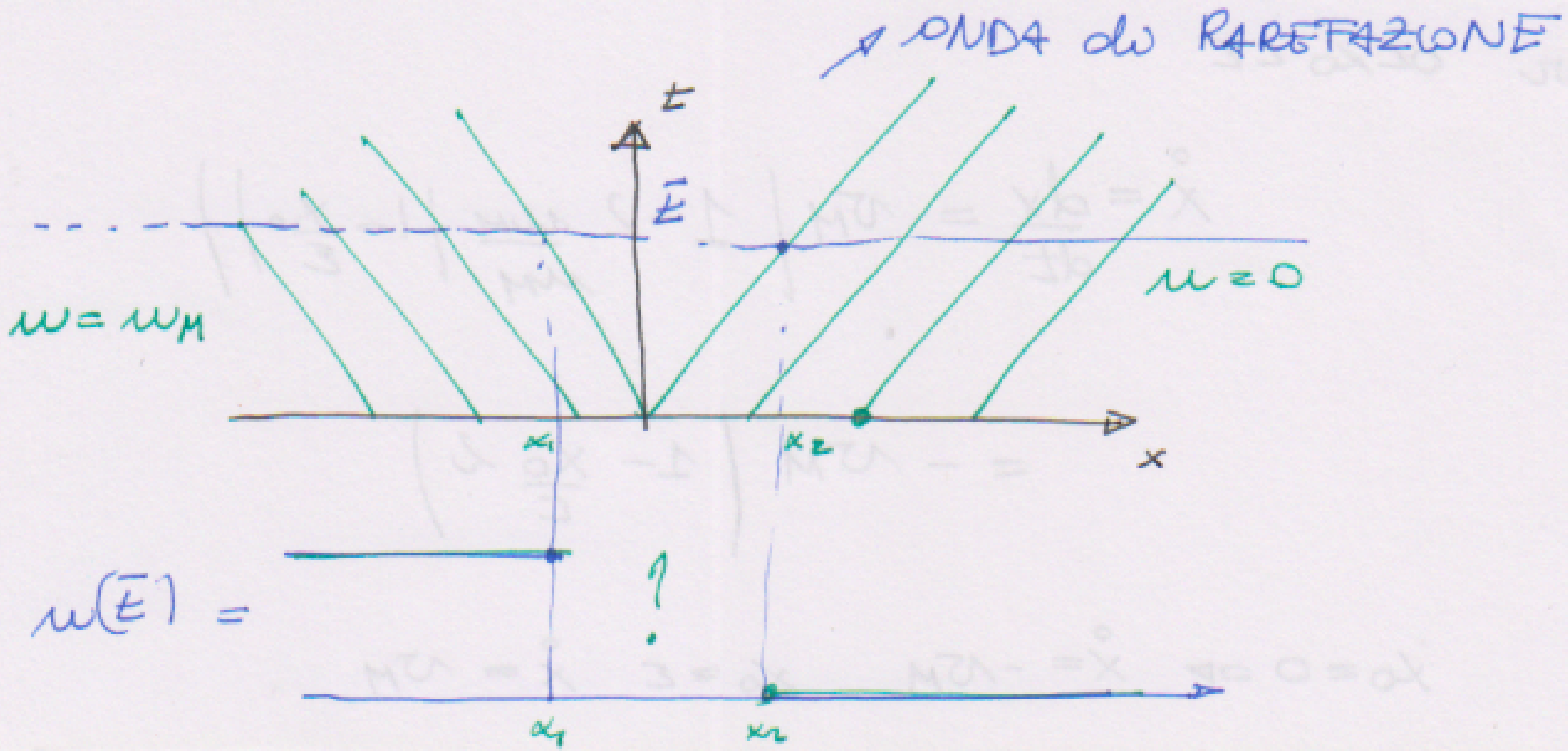


colonna di auto

Caratteristiche $\quad x_0 < 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_M\left(1 - 2\frac{\overset{u_M}{\overset{\shortparallel}{z(x_0)}}}{u_M}\right) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -v_M t + x_0 \\ t = s \end{cases}$$

$$x_0 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = v_M t + x_0 \\ t = s \end{cases}$$



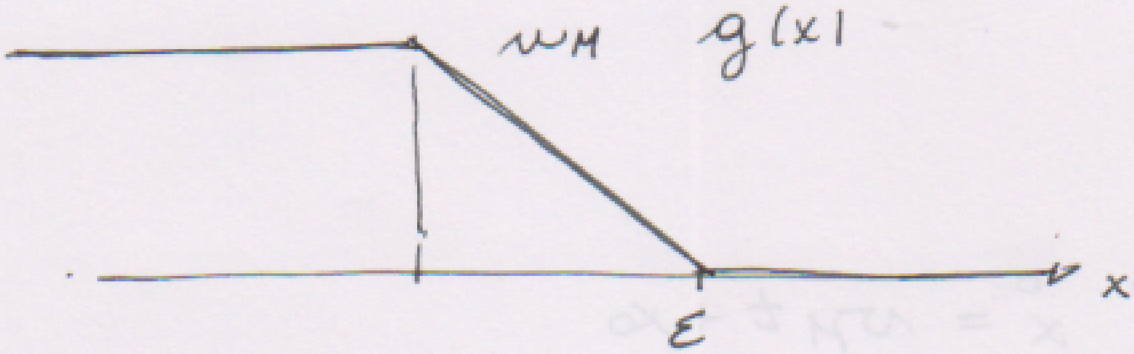
Una possibile soluzione: dall'equaz. per le caratt.

$$s = t$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_M \left(1 - 2 \frac{g(x_0)}{u_M} \right)$$

la discontinuità nel dato al bordo si riflette nella generazione di caratt. cui pendenza varia in maniera discontinua. Sol.: raccordiamo il dato al bordo in maniera continua

$$g(x) = \begin{cases} u_M & x \leq 0 \\ u_M \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & x > \varepsilon \end{cases}$$



Le traiettorie per $x_0 < 0$ e $x_0 > \varepsilon$ rimangono invariate

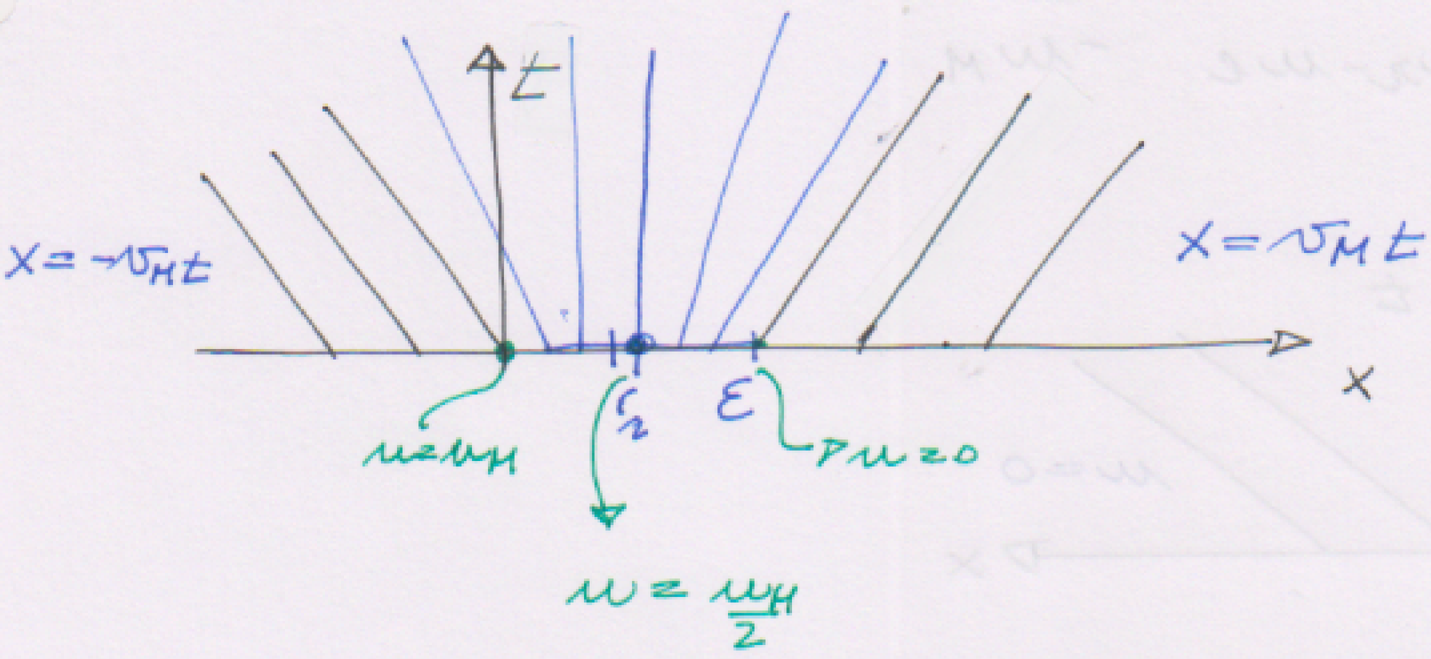
per $0 < x_0 < \varepsilon$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_M \left(1 - 2 \frac{u_M}{u_M} \left(1 - \frac{x_0}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$= - v_M \left(1 - \frac{x_0}{\varepsilon} 2 \right)$$

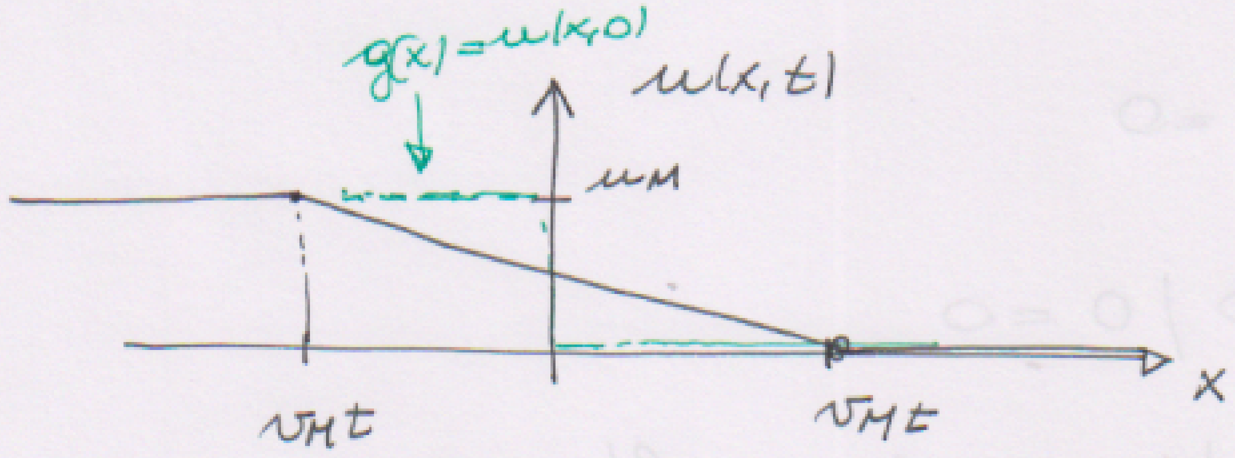
$x_0 = 0 \Rightarrow \dot{x} = -v_M \qquad x_0 = \varepsilon \quad \dot{x} = v_M$

le caratt. si raccordano con continuità



Nel lim $\varepsilon \to 0$

Otteniamo la soluzione $u_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} u_M & x \leq -v_M t \\ \frac{u_M}{2}\left(1 - \frac{x}{v_M t}\right) & -v_M t < x < v_M t \\ 0 & x \geq v_M t \end{cases}$

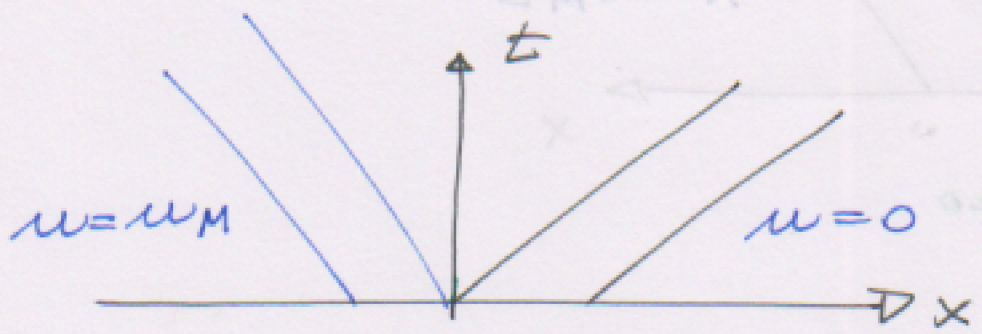


La parte di soluzione nel cono d'ombra è ricavata interpolando linearmente la soluzione.

Quella che abbiamo trovato non è però l'unica soluz. del problema.

Possiamo trovare una soluz. debole del prob. applicando la relaz. R-H che prevede l'esistenza di un salto della soluzione

$$\dot{\eta} = \frac{F_r - F_e}{u_r - u_e} = \frac{0}{-u_M} = 0$$



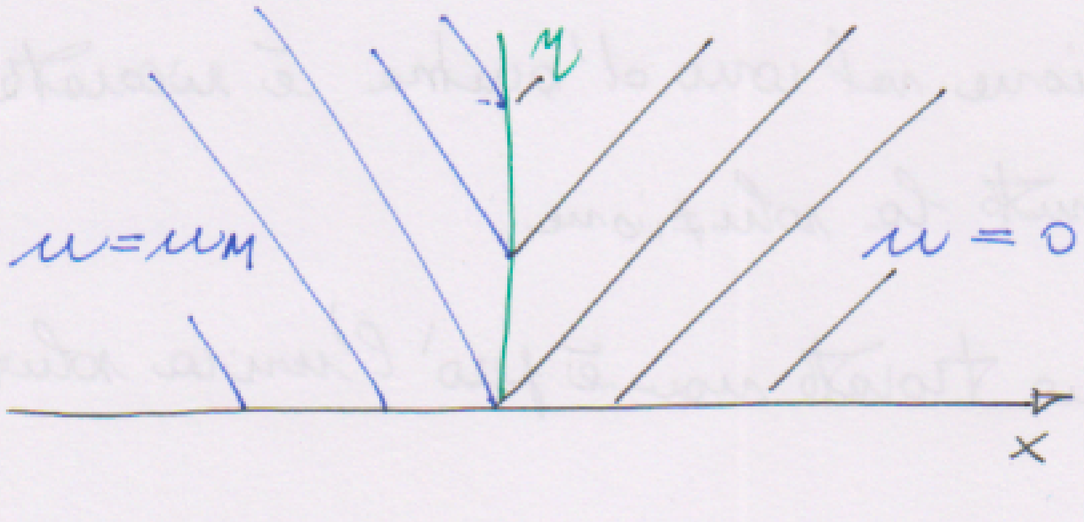
$$F(u) = v_M \left(1 - \frac{u}{u_M} \right) u$$

prendo $u_r = 0$ $u_e = u_M$

$$F_e = v_M \left(1 - 1 \right) = 0$$

$$F_r = v_M \left(1 - 0 \right) 0 = 0$$

La curva di shock coincide con l'asse t



In uno shock di compressione le curve caratt. si incontrano mentre in un'onda di rarefazione nascono dalla curva di shock e si dipartono

Il problema ammette più di una soluzione.

Esiste un criterio per poter sceglierne una?

- Criterio di ENTROPIA
- Metodo della viscosità.

Data l'eq. di conserv. $\partial_t u + \partial_x F(u) = 0$

modifichiamo la funzione flusso $F^{\varepsilon} = F' + \underbrace{\varepsilon \partial_x u}_{\text{introduciamo della viscosità}}$

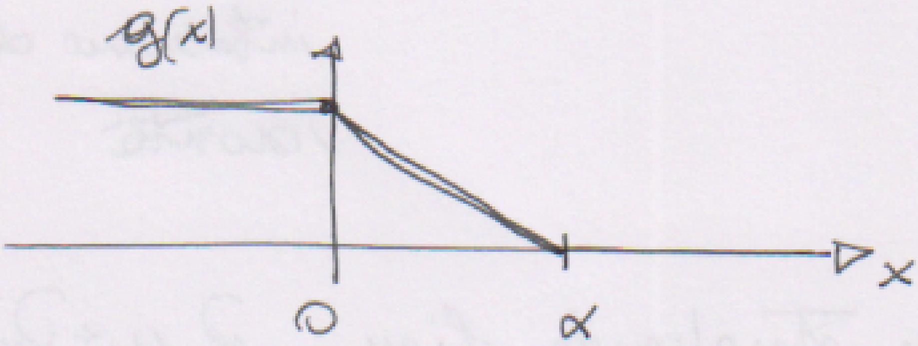
recuperiamo la soluzione studiando $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \partial_t u + \partial_x F^{\varepsilon}(u) = 0$

il limite tipicamente esiste ed è unico

Formazione di shock con c. I continue

$$\begin{cases} \partial_t u + u\,\partial_x u = 0 \\ u = g & t=0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 1 - x/\alpha & 0 < x < \alpha \\ 0 & x \ge \alpha \end{cases}$$



Soluz.