Classificazione delle equazioni del II ordine Lineari

Caso $\mathbb{R}^2$

Introduciamo la classif. delle eq. Lineari del II ordine in 4 famiglie: Eq. Paraboliche, Iperboliche, Ellittiche, Miste.

Consideriamo la forma generica di un'eq. del II ordine lineare in $\mathbb{R}^2$

$$a(x,y)\,\partial^2_{xx} u + 2b(x,y)\,\partial_x\partial_y u + c(x,y)\,\partial_{y^2} u +$$

$$d(x,y)\,\partial_x u + e(x,y)\,\partial_y u + f u = g(x,y)$$

con $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$

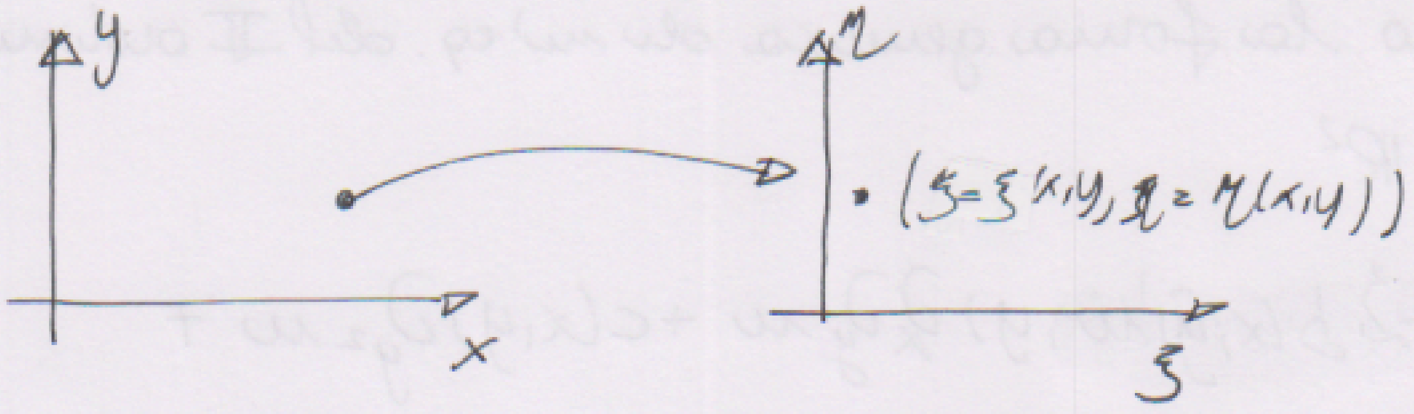
Focalizziamo l'attenzione sulla parte dell'eq. contenente i termini di grado massimo e che permettono di classif. le equazioni

$$\underbrace{a\,\partial^2_{xx} u + 2b\,\partial_{xy} u + c\,\partial^2_{yy} u}_{\text{Parte principale}} + F(x,y,u,\partial_x u,\partial_y u) = 0$$

$$F = d\,\partial_x u + e\,\partial_y u + f u - g$$

L'idea alla base della classificazione è quella di considerare un generico cambio di variabile $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(x,y) \to (\xi,\eta)$ in modo da modificare la forma delle equazioni e riportarle ad un set di casi standard che possiamo studiare

Consideriamo un generico cambio di variabile $\left(\xi(x,y), \eta(x,y)\right)$ Regolari ed invertibili



$$\begin{cases} \xi = \xi\,(x,y) \\ \eta = \eta\,(x,y) \end{cases} \qquad \xi, \eta \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

Hp lo Jacobiano della trasf non nullo

$$|J| = \partial_x \xi\, \partial_y \eta - \partial_x \eta\, \partial_y \xi \neq 0$$

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Data la generalità dell'equazione di partenza, applicando il cambio di variabile otterrò un'eq. simile ma espressa nelle nuove var. indip. (ξ, η)

detto $v(\xi,\eta) = w(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$

$$A(\xi,\eta)\partial^2_{\xi^2} v(\xi,\eta) + 2B(\xi,\eta)\partial^2_{\xi\eta} v + C(\xi,\eta)\partial^2_{\eta^2} v$$

$$+F(\xi,\eta,\partial v, v) = 0$$

Definiamo con discriminante la seguente quantità

$$\Delta = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$$

Verifichiamo il seguente enunciato

Th: Il segno del discriminante di un'eq. lineare del II ordine è invariante per una generica trasf. di coord. regolare e invertibile

Avremo $\operatorname{sgn}\left(b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)\right) =$

$$\operatorname{sgn}\left(B^2(\xi,\eta) - A(\xi,\eta)C(\xi,\eta)\right)$$

con $\xi = \xi(x,y)$ $\eta = \eta(x,y)$

Verifichiamo il teorema, calcolando esplicitamente la forma dei coeff. trasformati rispetto alla formulaz. originale

Applichiamo la regola di der. a catena

$$v(\xi(x,y),\eta(x,y)) = u(x,y)$$

$$\partial_x u = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\partial_y u = \partial_\xi v\, \partial_y \xi + \partial_\eta v\, \partial_y \eta$$

$$\partial^2_{xx} u = \partial^2_{\xi^2} v \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi,\eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\partial^2_{yy} u = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\partial^2_{xy} u = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) +$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

Sostituiamo nell'equazione iniziale e raggruppiamo i termini omologhi troviamo

$$A \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial v}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + D \frac{\partial v}{\partial \xi} + E \frac{\partial v}{\partial \eta} + F v = G$$

con

$$A(\xi,\eta) = a(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

$$B = a \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$C = a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

analizziamo il legame fra i coefficienti, notiamo che l'equaz. precedente può essere scritta in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} = J \, \underline{m} \, J^T$$

$$\det(M) = AC - B^2 = |\det(J)|^2 \det m = |J|^2 (ac - b^2)$$

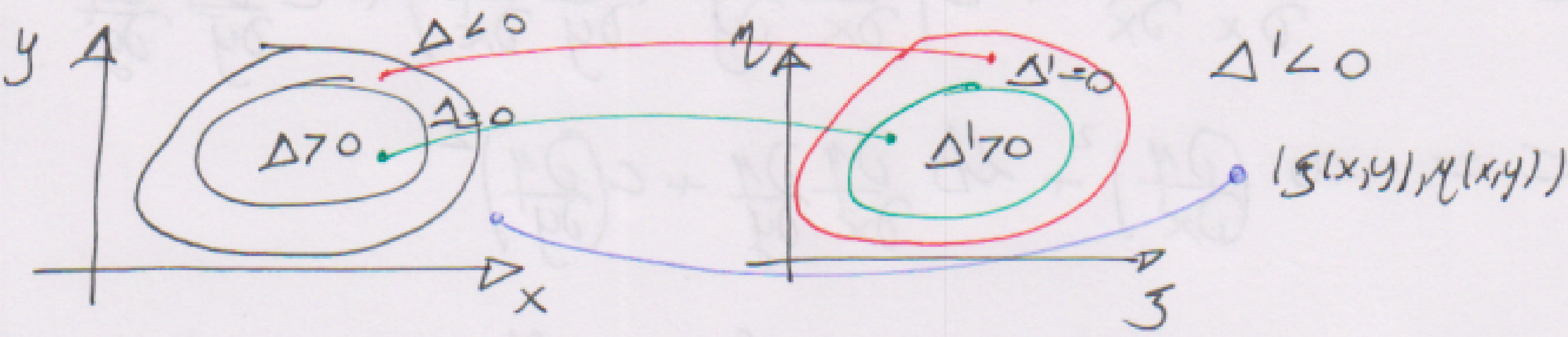
poiché $|J|^2 > 0$

segno $(AC - B^2) =$ sg $(ac - b^2)$

Quindi un generico cambio di variabile può cambiare la forma dell'equaz. ma non il segno del discriminante, che è quindi una proprietà INTRINSECA dell'equaz. (indip. dalle coordinate utilizzate per esprimerlo).

Nota: il sgn è una quantità <u>locale</u> dipende in generale dal pt. in cui lo calcolo

$\Delta = B^2 - AC \qquad \Delta(x, y)$



Poiché il sgn ha 3 valori posso classificare un'equaz. in 1 dei 4 sottoclassi

$B^2 - AC > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Eq. Iperbolica

$B^2 - AC = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Eq Parabolica

$B^2 - AC < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Eq Ellittica

$B^2 - AC$ segno non def. $\Rightarrow$ Eq. Mista

L'interno della classificazione è legato al seguente risultato: in funzione della famiglia di appartenenza, data un'equaz. lineare II ordine in $\mathbb{R}^2$ è sempre possibile trovare una trasformazione di coordinate $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ regolare e invertibile tale che, nelle nuove coordinate l'equazione ha le seguenti caratt.

1) Caso iperbolico $(B^2 - AC > 0) \Rightarrow \bar{A} = 0 \quad \bar{C} = 0$

$$a\partial_x^2 u + 2b\,\partial_{xy}^2 u + c\,\partial_y^2 u + F = 0 \Rightarrow 2B(\eta,\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\,\partial\xi} + F' = 0$$

$\xi(x,y)$
$\eta(x,y)$

$$v(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$$

2) Caso parabolico $(B^2 - AC = 0) \Rightarrow A = 0 \quad B = 0$

$$c(\eta,\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + F'(v,\xi,\eta,\partial_\xi v,\partial_\eta v) = 0$$

3) Caso Ellittico $(B^2 - AC < 0) \Rightarrow A = C \quad B = 0$

$$A(\xi,\eta)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + A(\xi,\eta)\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + F'(v,\xi,\eta,\partial_\xi v,\partial_\eta v) = 0$$

Verifichiamo la class. delle equazioni studiate

Laplaciano $\Delta u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow a = 1, \; c = 1 \quad b = 0$$

$$b^2 - ac = -1 < 1 \quad \text{ellittica}$$

$$a = c$$

Equazione del calore $\partial_x u - \partial_y^2 u = 0$

$$a = 0, \; b = 0, \; c = -1 \Rightarrow b^2 - ac = 0 \Rightarrow \text{parabolica}$$

Equaz. delle onde $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$

$$a = 1, \; b = 0, \; c = -1 \Rightarrow b^2 - ac = 1 > 0 \Rightarrow \text{iperbolica}$$

Riduzione di una equazione iperbolica in forma canonica

Iperbolico $\Rightarrow$ $B^2 - AC > 0$

Analizziamo la sola parte principale dell'equazione

$$A\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$A(\xi,\eta) = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

$$C(\xi,\eta) = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

cerco ξ ed η t.c. $A = C = 0$

assumiamo $a \neq 0$ consideriamo il termine A

indichiamo con $X = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ $\quad Y = \frac{\partial \xi}{\partial y}$

$$aX^2 + 2bYX + cY^2 = 0 \quad \rightarrow \text{eq. II ordine in } X$$

$$\parallel$$

$$a\underbrace{(X - X_1)(X - X_2)}_{\text{radici}}$$

$$X = \frac{-bY \pm \sqrt{b^2Y^2 - aY^2c}}{a} = \frac{Y}{a}\left(-b \pm \sqrt{\underset{>0}{b^2 - ac}}\right)$$

Sostituendo, abbiamo trovato la seguente espressione

$$A = a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \left(\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \left(\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)=0$$

ho quindi 2 possibilità

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x} + \left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x} + \left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

consideriamo la 1^a eq. I ordine non lineare, risolvibile

col metodo delle caratt.

$$F = a\,p_x + \left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)p_y = 0$$

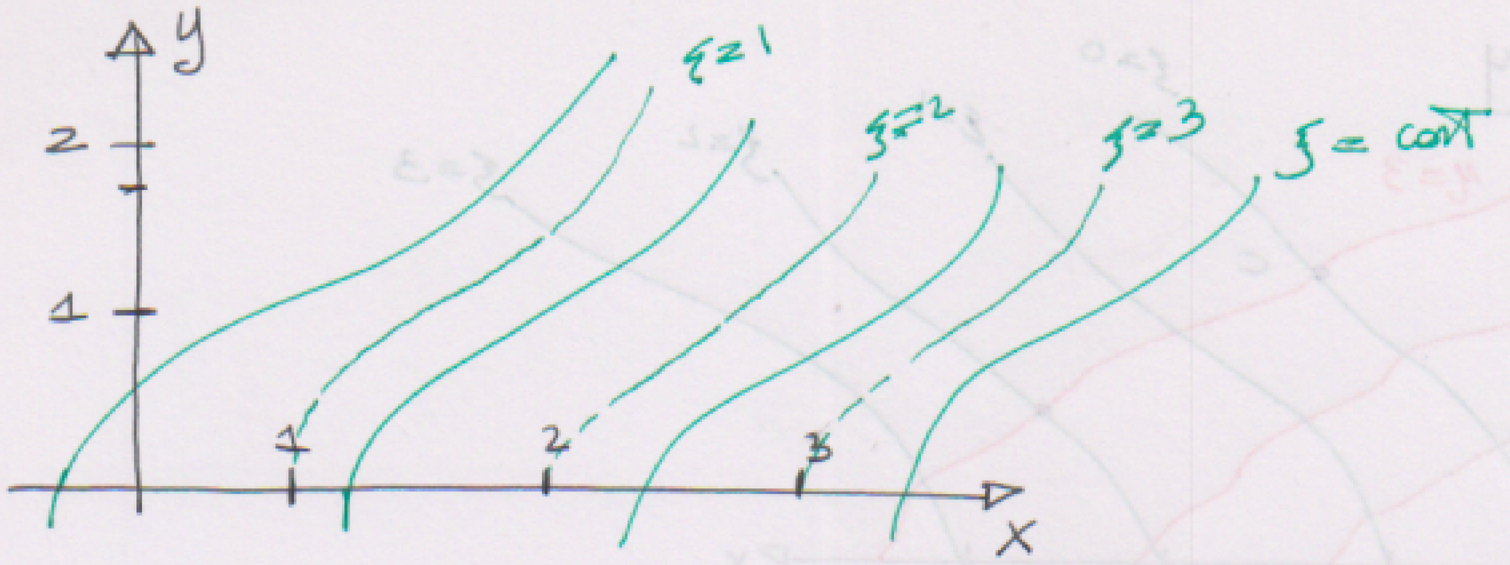
$$\mathring{\gamma} = \nabla_p F \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a \\ \dfrac{dy}{ds} = b-\sqrt{b^2-ac} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

F è lineare in $\vec{p} \Rightarrow \mathring{z} = p\,\nabla_p F = F = 0$

$\mathring{z} = 0 \Rightarrow$ soluzione ξ costante lungo le caratteristiche

Integrando le caratteristiche posso trovare una funzione

ξ t.c. (1) è soddisfatta



per c. I posso imporre ad esempio che le caratt. partano dall'asse x e che $\xi(s=0) = x$

In maniera analoga, posso determinare η t.c. $c = 0$

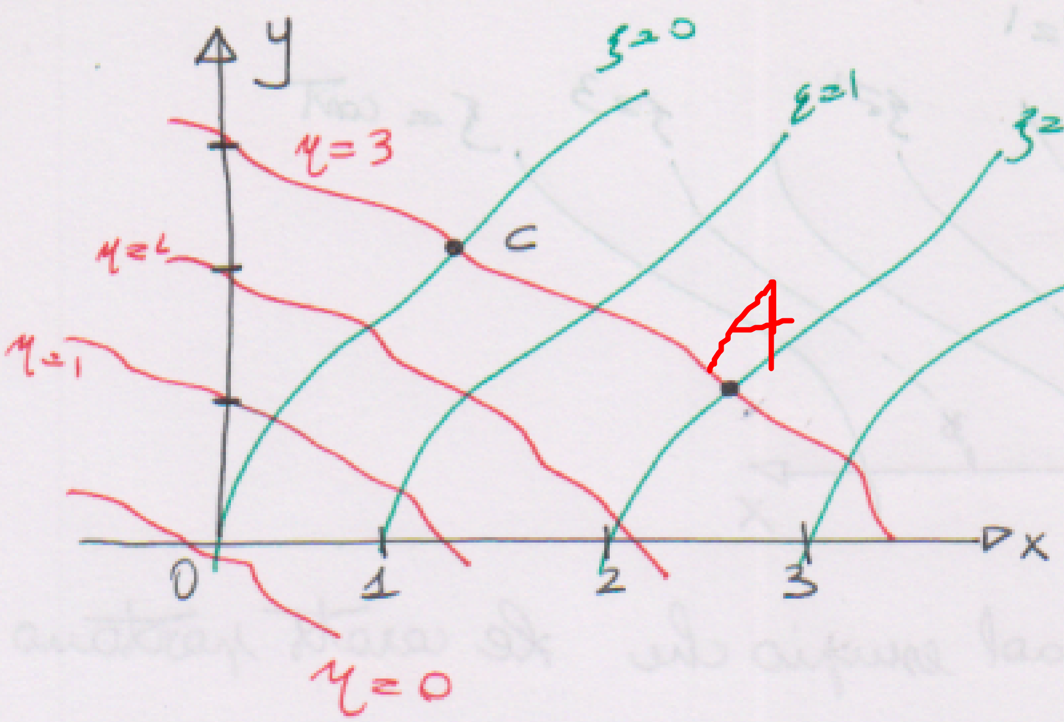
Otterrò per η esattamente le 2 eq. ottenute per ξ

adesso richiedo che η risolva 2

$$a \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

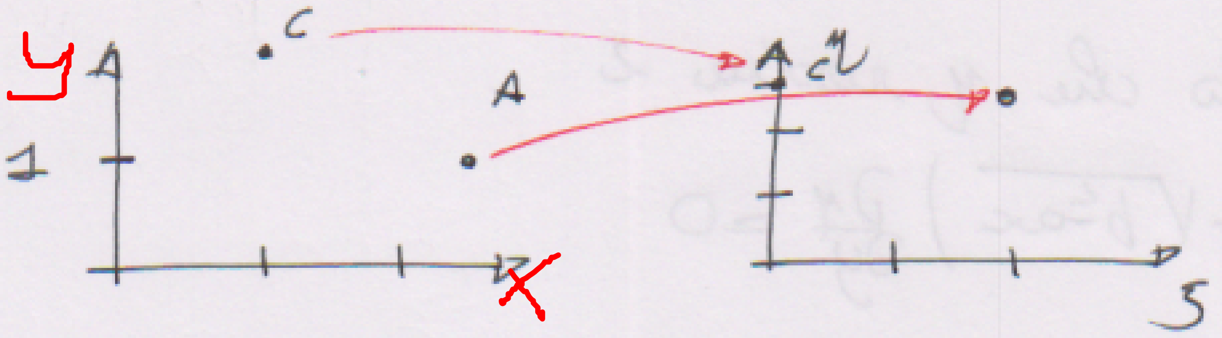
caratt. $\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a \\[2ex] \dfrac{dy}{ds} = b + \sqrt{b^2 - ac} \end{cases}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

η costante lungo le caratt.



attraverso le caratt. ho costruito un sistema di coord. curvilineo che costituisce il cambio di variabili

Ex $\quad A = (x=2{,}5, y=1) = (\xi=2, \eta=3)$



$C = (\xi=0, \eta=3) = (x=1{,}2;\ y=2{,}2)$

Verifichiamo che la trasformazione trovata è invertibile

Jac. $\neq 0$

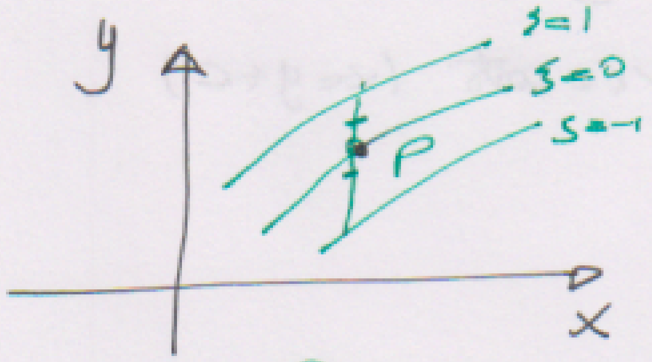
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \Rightarrow |J| = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$= \underbrace{-\left(\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}}_{\text{uso (1)}}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial\eta}{\partial y}\left(\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)}_{\text{uso (2)}} =$$

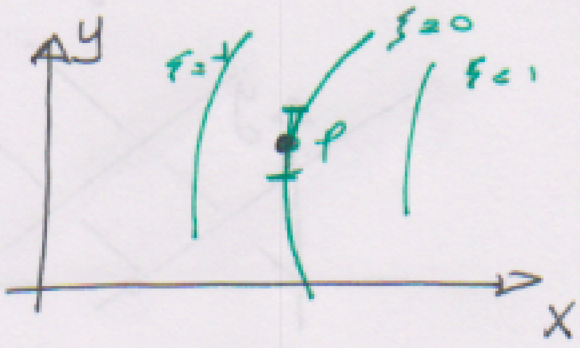
$$|J| = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\,\frac{2}{a}\,\underbrace{\sqrt{b^2-ac}}_{\neq 0}$$

inoltre $\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$

il caso in cui $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$ si verifica quando la caratt. è verticale (ξ è costante lungo le caratt.)



$\left.\frac{\partial \xi}{\partial y}\right|_P \neq 0$



$\left.\frac{\partial \xi}{\partial y}\right|_P = 0$

ma per il sistema (1) $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a} \neq \infty$

$a \neq 0$ e $b, a, c.$ regolari

Analoghe considerazioni valgono per η

$\Rightarrow \quad |J| \neq 0$ e la trasf. è loc. invertibile

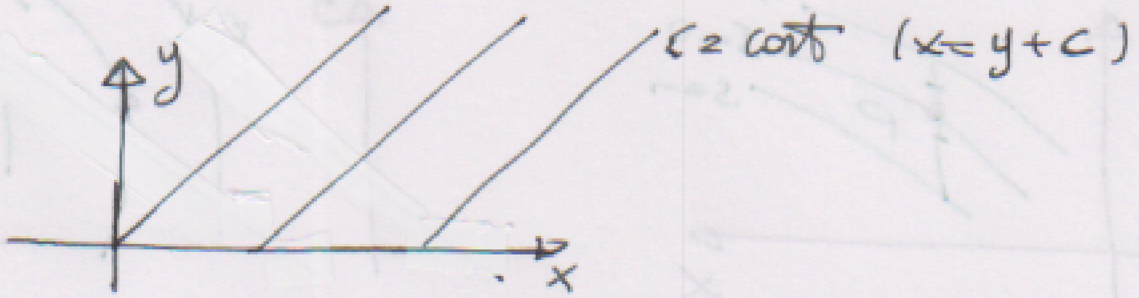
Caso eq. onde

$$\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$$

$a = 1$, $b = 0$; $c = -1$ $\qquad \Delta = 1$

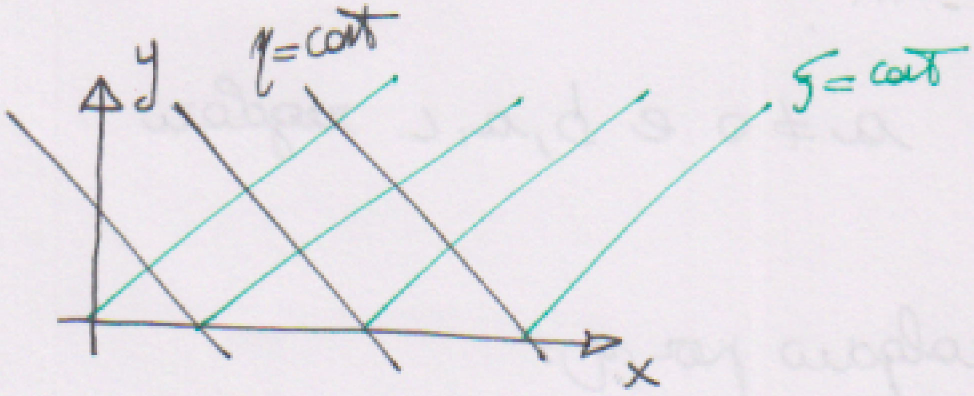
Eq (1)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \xi(x,y) = \xi_0(x-y)$$



$$\xi_0(x, y=0) = x \Rightarrow \xi = x - y$$

analog. $\qquad \eta = x + y$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$v = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Eq. Tricomi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad x < 0$$

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = x \qquad b^2 - ac = -x > 0 \text{ iperb.}$$

Eq. caratt. $\quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{-x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$

$$F = p_x + \sqrt{-x}\, p_y = 0$$

$$\dot{x} = \partial_{p_x} F = 1$$

$$\dot{y} = \sqrt{-x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{-x}$$

$$\int dy = \int \sqrt{-x}\, dx \Rightarrow y - y_0 = -\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$$

$$\frac{3}{2} y + (-x)^{3/2} = \text{cost} = \xi(x, y)$$

analog. $\eta \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} - \sqrt{-x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$

$$\eta = \frac{3}{2} y - (-x)^{3/2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{3}{2}(-x)^{1/2} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{3}{2}$$

utilizzando la deriv. di euf. composta

$$\partial_x u = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\partial_y u = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Svolgendo i calcoli

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -9(\xi-\eta)^{2/3}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\cdot \left(\frac{1}{6(\xi-\eta)}\right)\right]$$

della forma

$$-9(\xi-\eta)^{2/3}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + F(\xi,\eta,\partial v) = 0$$